

二次元層流噴流の温度分布

土屋良明*

(昭和47年5月31日受理)

1. 緒言

噴流は、最も基本的な流れの一つであり、実用的にも広範囲に応用されている。したがって、古くから数多くの研究^{1)~3)}がなされており、本研究で取り扱う静止空間中に噴出する自由噴流においては、流れが層流または乱流かによってそれぞれに異なるが、噴出口から十分離れた領域において、噴流の速度分布が相似性を示すことが知られている。加熱された噴流が、静止空間中に噴出されたときの温度分布については、例えば、層流噴流の場合には、Hug と Warder⁴⁾の研究があり、Corrsin と Uberoi⁵⁾による乱流噴流の詳細な実験、等があるが、比較的、取り扱いが少ない。一方、熱伝達の解析に関連して、境界層の温度分布については、プラントル数の広い範囲について、扱われている⁶⁾。

そこで、本研究では、加熱された二次元層流噴流の温度分布がプラントル数によって及ぼされる影響について、若干の解析を試みる。流れは定常であり、簡単のために、流体の物性値は一定として、さらに、浮力および摩擦による発熱の影響は無視出来るとする。これらの単純化は、一般的には、流速が小さく、また、加熱の程度が弱い場合に相当し、本解析の適用範囲が制限されることになるが、定性的な傾向はうかがい得るものと思はれる。解析に際して、速度分布は、境界層近似を用いて求められている Schlichting の結果⁷⁾を用いる。以下、第2章では、境界層近似によって、速度および温度についての基礎方程式を求め、第3章では、速度分布について Schlichting の得た結果を述べる。引き続き第4章では、前章で得た結果を用いて、温度分布の解を導き、また、第5章では、いくつかのプラントル数についての数値計算例を示し、若干の考察を行なう。

2. 基礎方程式

静止空間中に噴出する二次元層流噴流の流れを支配する方程式は、境界層近似によれば、次式で表わされる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_x \beta (T - T_\infty), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

* 機械工学教室 助手

ただし、流れは定常で、座標系は流れ方向に x 軸、 x 軸と直角方向に y 軸をとり、速度は、 x 軸方向に u 、 y 軸方向に v とし、また、 T は流体の温度であり、 T_∞ は噴流から十分離れた所の流体の温度を表わす。 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性係数、 p は圧力、 g_x は x 方向の重力の加速度および β は流体の体積膨脹率をそれぞれ表わす。運動方程式 (1) 式は、加速度項が、圧力項、粘性による摩擦力項および浮力項と、 x 方向について、釣り合っていることを示している。(2) 式は連続の方程式である。境界条件は、流れが $y=0$ 面について対称であることを考慮して、

$$y=0: \frac{\partial u}{\partial y} = 0, v=0; y=\infty: u=0, \quad (3)$$

である。

一方、この場合のエネルギー方程式は、流れの場合と同様に境界層近似によれば、次式で表わされる。

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (4)$$

ここに、 a は、流体の熱伝導率 λ を流体の密度および比熱 c_p で割った温度伝導率である。

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (5)$$

(4) 式は、対流によってはこぼれる熱量が、熱伝導と摩擦による発熱の量と釣り合っていることを示している。境界条件は、速度分布の場合と同様に考えて、

$$y=0: \frac{\partial T}{\partial y} = 0; y=\infty: T = T_\infty, \quad (6)$$

である。ここに、簡単のために、以下の様な仮定をする。

- 1) 密度、動粘性係数および温度伝導率等の流体の物性値は温度によって変らない。
- 2) 運動方程式 (1) 式において、通常行なわれている様に、圧力は流れの場で一定であり、さらに、浮力項は無視出来る。
- 3) エネルギー方程式 (4) 式において、摩擦による発熱項は無視出来る。

これらの仮定は、必ずしも現実とは一致しないが、一般的には、層流噴流であることに相当して流速が小さく、また、噴出流体の加熱の度合いが弱く温度差が小さい場合には適用出来る。したがって、(1) 式、(2) 式および (4) 式は、おのこの、次式の様に簡単化される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (9)$$

境界条件は、速度および温度に対して、それぞれ、(3)式および(6)式で与えられる。結局、ここで取り扱かう最も簡単な場合の速度および温度について満足すべき基礎方程式を、運動方程式(7)式、連続の方程式(8)式およびエネルギー方程式(9)式の様を得る。

3. H. Schlichting による速度分布の解

運動方程式(7)式および連続の方程式(8)式より、速度分布に対して Schlichting⁷⁾は、相似性を仮定し、さらに次の二つの条件、

- 1) x 方向の運動量が任意の断面で一定である、
- 2) 運動方程式の加速度項と摩擦力項が x について同じ次数である、

の下に、運動方程式を常微分方程式に変換して解を求めた。その結果、速度に対して次式の様を得ている。

$$u = \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta), \quad (10)$$

$$v = -\frac{1}{3} \nu^{1/2} x^{-2/3} (f - 2\eta f'). \quad (11)$$

ここに、 $f(\eta)$ は、流れ函数 Ψ に、次式、

$$\Psi = \nu^{1/2} x^{1/3} f(\eta), \quad (12)$$

で含まれるものであり、' ' は η についての微分を示す。また、 η は、次式である。

$$\eta = \frac{1}{3\nu^{1/2}} \cdot \frac{y}{x^{2/3}}. \quad (13)$$

さらに、

$$\xi = \alpha\eta; \quad f = 2\alpha \tanh \xi, \quad (14)$$

なる変換をして、結局、

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \tanh^2 \xi), \quad (15)$$

$$v = \frac{2}{3} \alpha \nu^{1/2} x^{-2/3} (2\xi - \tanh \xi - 2\xi \tanh \xi), \quad (16)$$

$$\alpha = 0.8255(k/\nu^{1/2})^{1/3}, \quad (17)$$

を得ている。ここに、 k は、 x 方向の運動量を密度で割ったものである。

4. 温度分布の解

温度分布を求めるために、エネルギー方程式 (9) 式をみれば、運動方程式 (7) 式との比較から容易にわかる様に、速度 u の分布と同様な形の解を持つことが予想される。したがって、流体の温度 T と無限遠方での流体の温度 T_∞ との差を、次式、

$$T - T_\infty = \alpha_\theta x^{-1/3} \theta(\eta), \quad (18)$$

で表わされるとする。ここに、 α_θ は、熱流束一定の条件から定める定数で、時に (27) 式で示される。

いま、摩擦による発熱はエネルギー方程式 (9) 式で省略されているから、噴流の任意の断面で熱流束 H は一定である。(10) 式および (18) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho c_p u (T - T_\infty) dy \\ &= \rho c_p \alpha \alpha_\theta \nu^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f' \theta d\eta, \end{aligned} \quad (19)$$

となって、 x は含まれず、熱流束は任意の断面で一定である。

次に、エネルギー方程式 (9) 式の左辺と右辺の x についての次数を比較するために、(10) 式より $u \sim x^{-1/3}$ であることを考慮して、(18) 式を代入すれば、

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \sim a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim x^{-5/3}, \quad (20)$$

となって、 x について同じ次数になる。この様にして、(18) 式に示す温度分布の形が、前章においての速度分布に対する二つの条件に対応して、

- 1) x 軸上の任意の断面で、熱流束が一定である、
- 2) エネルギー方程式で、対流による項と熱伝導による項が、 x について同じ次数である、

ことを、満足することが確かめられた。

したがって、速度についての (10) 式と (11) 式ならびに、温度についての (18) 式をエネルギー方程式 (9) 式に代入して、運動方程式 (7) 式の場合と同様に、座標を (x, y) 座標から、 (x, η) 座標に変換する。これらの計算を行ない、各項の共通因子で除して簡単化すれば、結局、 η についての常微分方程式になり、次式をうる。

$$\theta'' + P_r (f' \theta + f \theta') = 0, \quad (21)$$

$$P_r = \nu/a. \quad (22)$$

ここに、 P_r はプラントル数である。 f は (14) 式で与えられており、したがって、 η を独立変数とする θ についての二階常微分方程式となる。

(21)式を一度積分すれば次式となる.

$$\theta' + P_r f \theta = 0. \quad (23)$$

ここに, 積分定数は, 境界条件,

$$\eta = 0 : \theta' = 0, \quad f = 0, \quad (24)$$

より零である. (23)式を, 0から η までの範囲で再び積分すれば, $\eta = 0$ で $\theta = 1$ であることを考慮して, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \ln \theta &= -P_r \int_0^\eta f d\eta. \\ \therefore \theta &= \exp\left(-P_r \int_0^\eta f d\eta\right). \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, 速度分布について Schlichting により得られた結果 (14)式を (25)式に代入すれば, 結局, 温度分布について, 速度分布と同様に無次元量 ξ を変数とする次式を得る.

$$\theta = (1 - \tanh^2 \xi)^{P_r}. \quad (26)$$

上式は, 温度分布がプラントル数が異なる流体において変る様子を示している. $P_r = 1$ のときは (15)式との比較から, 温度分布 θ と $\eta = 0$ の速度で無次元化した x 軸方向の速度分布は一致する.

次に, (18)式における定数 α_0 を求めするために, 熱流束 H を示す(19)式に, 速度についての(15)式と(17)式, ならびに, 温度についての(18)式と(26)式を代入すれば, 結局, α_0 について次式を得る.

$$\alpha_0 = A \cdot \frac{H}{\rho c_p \nu^{1/3} k^{1/3}}, \quad (27)$$

$$A = \frac{0.3028}{\int_0^\infty (1 - \tanh^2 \xi)^{1+P_r} d\xi}. \quad (28)$$

α_0 は, (18)式に示す様に, $\eta = 0$ 面において x 軸方向に温度が下がる度合を示す係数であり, プラントル数によって異なる.

5. 数値計算例および考察

図1にプラントル数が0.1から10の範囲での温度分布 θ を(26)式によって計算した結果を示す. $P_r = 1$ の曲線は, 速度分布と一致している. $P_r < 1$ のときは, 速度分布より温度分布の拡がり著しく, $P_r > 1$ の場合はその逆となる. $P_r = 0.7$ は空気の場合に相当している.

次に, 温度分布の幅 $\xi_{1/2}$ を, $\theta = 1/2$ になる点で定義すれば, (26)式より次式となる.

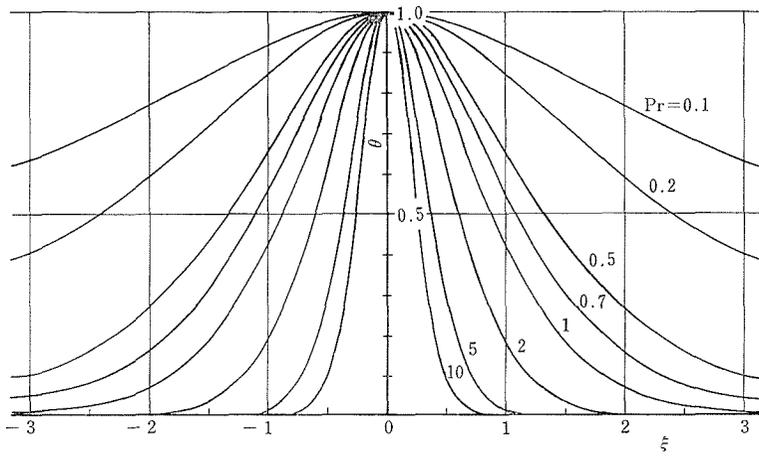


図1 温度分布

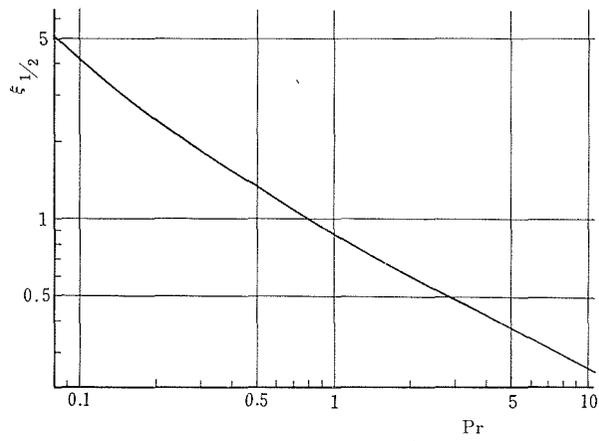


図2 温度分布の幅

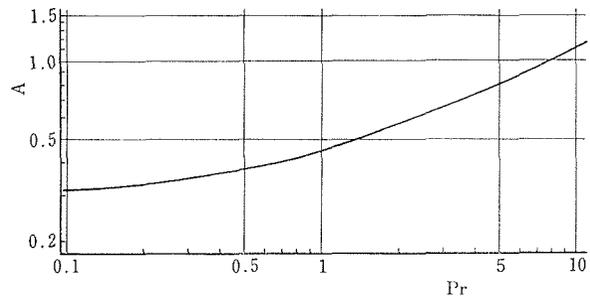


図3 A の 値

$$\xi_{1/2} = \tanh^{-1}(1 - 2^{-1/Pr}). \quad (29)$$

図2に、計算結果を示す。プラントル数が小さくなるとともに、温度分布が拡がることに対応して、幅は大きくなっている。x軸方向の温度減少の割合を示す α_0 は、(28)式に示す様にプラントル数によって変る。Aの値を図3に示す。Aの値が大きくなることは、温度減少の割合が流れ方向に小さくなることに対応している。

プラントル数は、流体によって広い範囲の値をとり、また、温度による変化が顕著な流体もある。例えば、20°Cで水銀は0.025、変圧器油では480程度であり、後者の場合、100°Cでは約1/8に減少する。したがって、プラントル数等の流体の物性値が温度によって変らないとした本解析の適用範囲は制限される。また、エネルギー方程式(9)式で、境界層近似を用い、x軸方向の熱伝導項を無視したが、プラントル数が小さくなるとともに、その影響は大きくなる。つまり、エネルギー方程式において、x軸方向への熱伝導項が、対流による伝熱項と比較しうる大きくなる。したがって、これら二つの項の相対的な大きさが、x軸方向への熱伝導項を無視したことの妥当性の目易となる。GroshとChess⁸⁾によれば、平板境界層からの層流熱伝達の解析で、レイノルズ数 Re とプラントル数の積が、 $Re \cdot Pr > 50$ 、であれば、流れ方向の熱伝導項を無視してよいことを指摘している。さらに、ここでの取り扱いには、運動方程式(7)式で浮力項を無視したことに対応して、自然対流の程度を示すグラスホス数が小さいことが必要である。

6. 結 言

静止空間中に噴出する加熱された二次元層流噴流の温度分布について、(26)式に示す様に、プラントル数との関係式を得た。解析に際しては、いくつかの仮定をして取り扱いの簡単化がなされ、適用範囲は制限されるが、プラントル数が温度分布に及ぼす影響についての定性的な傾向は示されている。また、軸対称な層流噴流についても、二次元の場合と同様に取り扱わうことができる。温度による物性値の変化、浮力ならびに摩擦による発熱等、本解析で省略した項を考慮することは、今後の課題である。

終りに、多大の御援助と御助言をいただいた、本学部大路通雄教授、山口功助教授、高田治彦助教授ならびに長野高専山之上寛二教授に深く感謝いたします。

文 献

- 1) H. Schlichting : *Boundary layer theory*. McGraw Hill (1960) Chap. 23.
- 2) S.I. Pai : *Fluid dynamics of jets*. D. Van Nostrand Com. (1954).
- 3) G.N. Abramovich : *The theory of turbulent jets*. MIT Press (1963).
- 4) W.F. Hug & R.C. Warder : Laminar free jet with arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluid* 9 (1966) 1250.
- 5) S. Corrsin & M.S. Uberoi : Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet. NACA TN No. 1865 (1949).
- 6) 例えば、甲藤好郎 : 伝熱概論. 養賢堂 (1964) 4章.
- 7) H. Schlichting : Laminare Strahlausbreitung. *ZAMM* 13 (1933) 260.
- 8) R.J. Grosh & R.D. Cess : Heat transfer of fluids with low Prandtl numbers for flow across plates and cylinders of various cross section. *Trans. ASME* 80 (1958) 667.

Summary

The Temperature Distribution of a Two-dimensional Heated Laminar Jet

Yosiaki TUTIYA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

The effect of Prandtl number on the temperature distribution is estimated in the case of a two-dimensional heated laminar jet which is effused into motion-less fluid. For simplicity, it is assumed that fluid properties are constant and that both the buoyancy force in the motion equation and the heat generation due to friction in the energy equation are neglected. The temperature distribution is obtained by using the result of velocity distribution which was obtained by Schlichting.

The result shows that temperature diffuses rapidly as Prandtl number decreases and *vice versa*. Some numerical results are given as an illustration.