# 乱れの Lagrange スペクトルの漸近形

余 越 正 一 郎*

(昭和47年5月31日受理)

## 1. まえがき

中間乱子領域における Lagrange スペクトルが乱子の寿命振動数 $\omega$ の－2乗に比例することは相似理論を用いて Weizsäcker (1948) によりはじめて示され，次いで井上 (1952) の乱子理論からも示された．すなわち，平均エネルギー逸散密度を $\langle\varepsilon\rangle$ として，

$$E_{11}(\omega)\sim\langle\varepsilon\rangle\,\omega^{-2}, \tag{1}$$

である．この結果は現在も乱流拡散の研究に広く用いられている．

しかし，フロックの形成や破壊の問題，河川における浮遊砂の問題などにおいては，それらの現象のスケールからして最小乱子領域におけるスペクトルに関する知識も必要になってくる．著者 (1969) は河川における土砂の浮遊限界について考察するさいに，最小乱子領域においては乱れのエネルギーはすべて層流逸散するものと考えて，最小乱子領域における Lagrange スペクトルとして，

$$E_{11}(\omega)\sim\sqrt{\frac{\langle\varepsilon\rangle^3}{\nu}}\,\omega^{-3}, \tag{2}$$

を用いた．$\nu$ は動粘性係数である．しかし，この函数形では，いわゆる ultraviolet catastrophe の問題が残ることになる．

本文はすべての乱子領域をカバーする Lagrange スペクトルの漸近形を提案し，その1適用例を示すものである．

## 2. 乱れの相似理論

レイノルズ数 $R$ の非常に大きな乱流場を考える．Kolmogorov の第1相似仮説によると (Монин и Яглом, 1967)，乱子の寿命時間 $\tau$ が最大乱子の寿命時間 $\tau_0$ より充分小さい時間領域での Lagrange 構造函数は，

$$D_{11}(\tau)=v_{\infty}^2\beta_1\left(\frac{\tau}{\tau_\infty}\right)\ :\ \tau\ll\tau_0, \tag{3}$$

となり，同様に，乱子の寿命振動数 $\omega$ が最大乱子の寿命振動数 $\omega_0$ より大きい領域での Lagrange スペクトルは，

* 土木工学教室　助教授

$$E_{11}(\omega)=\frac{v_\infty^2}{\omega_\infty}\beta_2\left(\frac{\omega}{\omega_\infty}\right)\ :\ \omega\gg\omega_0, \tag{4}$$

となる，ここで，$v_\infty$ は最小乱子の乱子速度，$\beta_1$, $\beta_2$ はユニバーサルな函数，$\tau_\infty, \omega_\infty$ はそれぞれ最小乱子の寿命時間と寿命振動数であり，$\omega_\infty=2\pi/\tau_\infty$ である．Lagrange 速度を $v_i$ とすれば，構造テンソル $D_{ij}(\tau)=\langle[v_i(t+\tau)-v_i(t)][v_j(t+\tau)-v_j(t)]\rangle$ は相関テンソル $B_{ij}(\tau)=\langle v_i(t)v_j(t+\tau)\rangle$ と，

$$D_{ij}(\tau)=2[B_{ij}(0)-B_{ij}(\tau)], \tag{5}$$

なる関係にあるので，構造テンソルとスペクトルテンソルの間には，

$$D_{ij}(\tau)=2\int_0^\infty(1-\cos\omega\tau)\,E_{ij}(\omega)\,d\omega, \tag{6}$$

の関係がある．

第2相似仮説，その他より，(3)の構造函数は中間乱子領域および最小乱子領域でそれぞれ，

$$D_{11}(\tau)=\begin{cases}C_L\langle\varepsilon\rangle\tau\ :\ \tau_\infty\ll\tau\ll\tau_0, & (7)\\[2ex] C_L'\sqrt{\dfrac{\langle\varepsilon\rangle^3}{\nu}}\tau^2\ :\ \tau\ll\tau_\infty, & (8)\end{cases}$$

となる．$C_L$, $C_L'$ はいずれもユニバーサルな定数である．同じく第2相似仮説から(4)のスペクトルは中間乱子領域で次のようになる．

$$E_{11}(\omega)=A_L\langle\varepsilon\rangle\omega^{-2}\ :\ \omega_0\ll\omega\ll\omega_\infty, \tag{9}$$

$A_L$ もユニバーサルな定数である．(7) の $D_{11}(\tau)$ と (9) の $E_{11}(\omega)$ は (6) 式で関係づけられており，$A_L=C_L/\pi$ である．しかし，(6) 式の積分の収束条件からして，(8) 式の構造函数に対応するスペクトルは求めることができず，最小乱子領域における Lagrange スペクトルの函数形は未知である．

## 3. Lagrange スペクトルの漸近形

Lagrange スペクトルの函数形を求めるにあたり次の2つの考え方をもとにする．

1) 最小乱子の寿命時間より大きい時間領域における流体粒子の運動はマルコフ過程とみなされる．

井上(1952)は最初乱子理論から(7)式に相当する相関函数を導びいたが，さらに $\omega\ll\omega_0$ で $E_{11}(\omega)=\text{const.}$ と(1)式を連結する内挿式から $\tau>\tau_\infty$ での相関函数として $B_{11}(\tau)=\langle v_1^2\rangle\exp(-\tau/\tau_0)$ を提案し，この方が寿命時間が大きい場合の拡散現象をより適確に表現すると言っている．このことは Hansen (1971) による開水路自由水面での浮子の追跡実験からえられた Lagrange スペクトルの結果からも支持される．また，Obukhov (1959) は流体粒子の運動をマルコフ過程と考えて，Fokker-Planck の方程式を用いて

Kolmogorov の理論と矛盾しない結果をえている．さらに，Lin (1960), Novikov (1963), Krasnoff and Peskin (1970) などは，流体粒子の運動を Langevin の確率微分方程式で記述できるとして良好な結果をえている．

2) Lagrange スペクトル函数は急減少函数である．

最小乱子領域では乱子速度の大きさは粘性のために急速に小さくなるので，$\omega\to\infty$ でスペクトルは急速に 0 に接近するであろうが，スペクトルの減小が $\omega$ のベキ函数であることは疑わしい．

Lagrange 速度は時間に関して無限回微分可能で，かつ Taylor 展開できると仮定すると，相関テンソルについても Taylor 展開可能である．そのためには，(5), (6) より，

$$\left[\frac{\partial^{2n} B_{11}(\tau)}{\partial\tau^{2n}}\right]_{\tau=0} = (-1)^n\int_0^\infty \omega^{2n} E_{11}(\omega)\,d\omega, \tag{10}$$

であるから，$E_{11}(\omega)$ のすべての積分モーメントが収束しなければならない．このことは $E_{11}(\omega)$ の $\omega\to\infty$ における漸近形が，たとえば (2) で示したような $\omega$ のベキ函数ではなく，$E_{11}(\omega)$ がいわゆる急減少 (rapidly decreasing) 函数でなければならないことを示している．たとえば，$\exp(-\omega^2)$ のような $\omega$ の負の指数函数とか，$P(\omega)$ を任意の多項式としたときの $P(\omega)\exp(-\omega^2)$ の形の函数である．

以上の考察から，Lagrange スペクトル $E_{11}(\omega)$ の簡単な漸近形として次を考えてみる．

$$E_{11}(\omega) = \frac{A_L\langle\varepsilon\rangle}{\omega_0{}^2}\frac{\exp[-c^2(\omega/\omega_\infty)^2]}{1+(\omega/\omega_0)^2}, \tag{11}$$

ここで $c$ は定数である．(11) 式でこのような負の指数函数をえらんだのは，Euler スペクトルに関する Novikov (1962) の理論を参考にしたものである．

(11) 式が $\omega\ll\omega_\infty$ でマルコフ過程をあらわし，特に中間乱子領域 $\omega_0\ll\omega\ll\omega_\infty$ では (9) 式と一致することは明白である．

さて，ここで (11) のスペクトルを用いて (6) 式から構造函数を計算してみると，

$$D_{11}(\tau) = \frac{A_L\pi\langle\varepsilon\rangle}{\omega_0}\exp\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}\right)^2\left[1-\frac{1}{2}\exp(-\omega_0\tau)\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}-\frac{\omega_\infty}{2c}\tau\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\exp(\omega_0\tau)\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}+\frac{\omega_\infty}{2c}\tau\right)\right], \tag{12}$$

ここで，

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt.$$

これから最小乱子領域における構造函数を求めてみる．$\omega_\infty/\omega_0\approx R^{1/2}$ であるから，レイノルズ数の非常に大きな乱流場では $\omega_0\ll\omega_\infty$ としてよく，また (12) において寿命時間 $\tau$ が充分小さい場合を考えると，

$$D_{11}(\tau)=\frac{A_L\sqrt{\pi}}{c}\langle\varepsilon\rangle\omega_\infty\tau^2+O(\tau^4), \tag{13}$$

となり，$\omega_\infty=2\pi/\tau_\infty=2\pi\sqrt{\langle\varepsilon\rangle/\nu}$ であるから (13) は (8) 式と一致する．

以上から，(11)式で与えたスペクトル函数はすべての寿命振動数をカバーする Lagrange スペクトルの漸近形としての条件をそなえていることがわかる．

次に (11) 式のユニバーサルな定数 $A_L$ と $c$ との関係をしらべる．(10) 式より

$$-\left[\frac{\partial^2 B_{11}(\tau)}{\partial\tau^2}\right]_{\tau=0}=\int_0^\infty\omega^2E_{11}(\omega)\,d\omega, \tag{14}$$

であるが，$B_{11}(\tau)$ を展開すると，

$$B_{11}(\tau)=\langle v_1{}^2\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\right\rangle\tau^2+\cdots\cdots, \tag{15}$$

であるから次がえられる．

$$\left\langle\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\right\rangle=\int_0^\infty\omega^2E_{11}(\omega)d\omega, \tag{16}$$

左辺の加速度変動の値は Obukhov and Yaglom (1951) の理論を用いて次となる．

$$\left\langle\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left\langle\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{3}\left(\frac{1.12}{|S|}+0.30\,|S|\right)\sqrt{\frac{\langle\varepsilon\rangle^3}{\nu}}. \tag{17}$$

ここに，$S$ は速度差の分布のひずみ度である．一方，

$$\int_0^\infty\omega^2E_{11}(\omega)d\omega=\frac{A_L\sqrt{\pi}\langle\varepsilon\rangle\omega_\infty}{2c}\left[1-\frac{\sqrt{\pi}\,c\omega_0}{\omega_\infty}\exp\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}\right)^2\mathrm{Erfc}\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}\right)\right], \tag{18}$$

であるから，$\omega_0\ll\omega_\infty$ なる条件を用いると，

$$\frac{A_L}{c}=\frac{1}{3\pi^{3/2}}\left(\frac{1.12}{|S|}+0.30\,|S|\right), \tag{19}$$

となる．ここで多くの実測例を参考にして，$|S|\approx0.3$ を採用すれば（たとえば，余越，1968; Paquin and Pond, 1971），

$$c\approx4.4\,A_L, \tag{20}$$

がえられる．

最後にユニバーサルな定数 $A_L$ の値について考察する．Corrsin (1962) は (9) の $A_L$ を推定するにあたり，Taylor 流の最小渦の Euler 的な長さと Lagrange 的な時間スケールの関係に関する実験結果から，$A_L\approx1$ であると言っている．Novikov (1963) は乱れの Lagrange 的な記述に Langevin の方程式を用いて Lagrange 構造函数と Euler 構造

函数を導いているが，これと Kolmogorov の相似理論から導びかれたものを比較すると，Lagrange 構造定数 $C_L$ は Euler 構造定数 $C_E$ を用いて $C_L = C_E{}^{3/2}/2\sqrt{3}$ と表わされることがわかる．$C_E$ の値に関してはいろいろな測定結果があるが，大体 $C_E \approx 2$ としてよいであろう(たとえば，余越，1968; Paquin and Pond, 1971)．そうすると，$A_L = C_L/\pi \approx 0.3$ がえられる．しかし，著者(1971)が開水路で Lagrange 流および Euler 流の積分スケールを実測した結果から推定したものは $C_L \approx 5.5$ で，$A_L \approx 1.8$ となる．以上の例からもわかるように，Lagrange スペクトル定数 $A_L$ の値を決定するにはまだ多くの実測が必要である．

## 4. 考　察

式(11)で与えた漸近形は，形式的にはすでに示したように Lagrange スペクトルとしての条件をみたしている．しかし，ultraviolet catastrophe の解決にもなった急減少函数としての函数形はここで用いられたもの以外にもいくらでも考えられるであろう．すなわち，$\exp(-\omega^2)$ の形はそのうちの簡単なものにすぎない．この形をどうするかについては物理的な考察や実測からの検討が必要である．しかし，最小乱子領域の Lagrange スペクトルの函数形を正確に直接測定することは不可能に近い．Kolmogorov の最小乱子の $1/10$ 程度の大きさの粒子の運動を光学的に精密測定した最近の実験(Snyder and Lumley, 1971) においても積分スケールを求めることができたぐらいで，相関函数の函数形などを調べることはできなかった．残る方法としては数値実験ぐらいが考えられる (たとえば，Patterson and Corrsin, 1966; Deardorff and Peskin, 1970)．

同様なことは Lagrange 流の測定にくらべればはるかに測定のしやすい Euler スペクトルにおいても問題として残っている．Euler スペクトルに関しては，Kolmogorov の $-5/3$ 乗則に負の指数函数をつけたものが考えられているが，指数部の形は Novikov に代表される $-2$ 乗と Pao に代表される $-4/3$ 乗の形があり(Tennekes, 1968)，さらに最近では別のものも提案されている現状である (Parker, 1969; Edwards, 1971 など)．

Lagrange スペクトルの表現に Euler 的な量であるエネルギー逸散密度 $\langle\varepsilon\rangle$ を用いることには問題が残っている．Obukhov (1959) は相対拡散における確率密度が Fokker-Planck の方程式で表わされるとして，その定数係数 $B_0$ をもって $\langle\varepsilon\rangle$ にあてた．$B_0$ の次元は $\langle\varepsilon\rangle$ と同じで，$B_0/\langle\varepsilon\rangle \approx O(1)$ であるとしている．Lin (1960) は流体粒子の相対加速度の相関の継続時間に比例するパラメタ $B_L$ を用いており，$B_L/\langle\varepsilon\rangle = f(R^{1/2})$ であろうと考えている．また，Novikov (1963) は Langevin の方程式における random force の仕事によるエネルギーフラックスとしての $\varepsilon_*$ を用いている．Novikov の理論から計算してみると，$\varepsilon_*/\langle\varepsilon\rangle = C_L/2$ となる．

これらのものはいずれも $\langle\varepsilon\rangle$ と同じ次元を持っているが，それぞれの持っている物理的な意味が違っている．しかし，それらと $\langle\varepsilon\rangle$ の関係についてはまだ不明である．

## 5. 適　用　例

河川のようなレイノルズ数の大きな乱流中に，wash load のような Stokes の抵抗則に

従う微細な土粒子が浮遊している場合の流体のエネルギー逸散率の増加を，ここで提案した Lagrange スペクトルを用いて評価してみる．

半径 $a$，密度 $\rho_s$ の土粒子が，密度 $\rho$，動粘性係数 $\nu$ の流体中を相対速度 $w$ で運動している場合を考える．粒子1個について単位時間当りのエネルギー逸散は Stokes の法則より $6\pi\rho\nu a w^2$ であるから単位体積中の土粒子の数を $N$ とすれば単位体積，単位時間当りのエネルギー逸散率は $6\pi N\rho\nu a w^2$ となる．したがって，体積濃度 $\theta=(4/3)\pi a^3 N$ を用いて単位時間，単位質量当りのエネルギー逸散率を表わせば

$$\varepsilon_w=\frac{9}{2}\frac{\theta\rho\nu}{a^2}w^2, \tag{21}$$

がえられる．ここでは $\theta\ll 1$ の場合を考えている．

次に，流体中の粒子の運動は Basset-Boussinesq-Oseen の積分微分方程式で記述できるものと考える (Corrsin and Lumley, 1956)．流れのレイノルズ数が非常に大きく，しかも粒径が充分小さい場合を考えると，Basset-Boussinesq-Oseen の方程式は線型になる．したがって重力の影響は別に考えるとして，この方程式を周波数領域で示すと次となる．

$$\left[\alpha+\sqrt{\frac{3\alpha\omega}{2}}+i\left(\frac{\omega}{\beta}+\sqrt{\frac{3\alpha\omega}{2}}\right)\right]dZ_w(\omega)-i\gamma\omega\,dZ_v(\omega)=0, \tag{22}$$

$$\alpha=\frac{3\nu}{a^2},\quad \beta=\frac{3\rho}{2\rho_s+\rho},\quad \gamma=\frac{2}{3}\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right).$$

ここに，$dZ_v(\omega)$，$dZ_w(\omega)$ はそれぞれ流体速度，および流体と粒子の相対速度のスペクトルである．特に粒子の径が最小乱子の寸法 $\eta$ より小さい $(a<\eta)$ として Basset 項を省略すると，相対速度のエネルギースペクトルは，

$$E_w(\omega)=\beta^2\gamma^2\frac{\omega^2}{\alpha^2\beta^2+\omega^2}E_v(\omega), \tag{23}$$

となる．$E_v(\omega)$ は流体速度の Lagrange スペクトルである．

ここで，(11)式の Lagrange スペクトルを(23)式に適用して相対速度のスペクトル $E_w(\omega)$ を求め，

$$\langle w^2\rangle=\int_0^\infty E_w(\omega)\,d\omega, \tag{24}$$

を計算すると次がえられる．

$$\langle w^2\rangle=A_L\sqrt{\pi}\langle\varepsilon\rangle\beta^2\gamma^2\left[\frac{\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2-\omega_0^2}\exp\left(\frac{c\alpha\beta}{\omega_\infty}\right)^2\mathrm{Erfc}\left(\frac{c\alpha\beta}{\omega_\infty}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_0}{\alpha^2\beta^2-\omega_0^2}\exp\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}\right)^2\mathrm{Erfc}\left(\frac{c\omega_0}{\omega_\infty}\right)\right], \tag{25}$$

水中における土粒子 ($\rho_s \approx 2.65$) という条件から, $\omega_\infty/\alpha\beta \sim (a/\eta)^2 R_\infty \ll 1$, ($R_\infty$ は最小乱子の乱子レイノルズ数) であるから, これと $\omega_0 \ll \omega_\infty$ なる条件から(25)は次になる.

$$\langle w^2 \rangle = \frac{A_L\sqrt{\pi}}{2c}\langle \varepsilon \rangle \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \omega_\infty. \tag{26}$$

これを(21)式に代入すると, 結局

$$\frac{\varepsilon_w}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{A_L \pi^{3/2}}{2c}\theta\gamma^2\left(\frac{a}{\eta}\right)^2 \sim \theta\left(\frac{a}{\eta}\right)^2, \tag{27}$$

がえられる. 仮定において $\theta \ll 1$, $a < \eta$ としているので, 重力による沈降の影響を考えないとすると, 微細粒子の混入によるエネルギー逸散の増加は著しく小さいことがわかる.

最後に, ここで求めた $\varepsilon_w$ と, 重力のみによって沈降しているときに生じるエネルギー逸散の増加 $\varepsilon_g$ の比較をしてみる. 沈降速度は $w_g = (\gamma/\alpha)g$ と表わされるから,

$$\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_g} = \frac{\langle w^2 \rangle}{w_g} = \frac{A_L \pi^{3/2}}{c}\left(\frac{\alpha_\infty}{g}\right)^2 \sim \left(\frac{\alpha_\infty}{g}\right)^2, \tag{28}$$

となる. ここに $\alpha_\infty = (\langle \varepsilon \rangle^3/\nu)^{1/4}$ は最小乱子の加速度である. 河川の鉛直乱流場においては, 河床近くを除くと $\langle \varepsilon \rangle \sim 10^{-1}$ 程度であるから (余越, 1968), 明らかに $\alpha_\infty \ll g$ である. したがって浮遊土砂によるエネルギー逸散率の増加は, 粒子の自由沈降の影響のみ考えればよいことがわかる.

なお. ここでは $\theta \ll 1$, $a \ll \eta$, すなわち最小乱子より小さい粒子が低濃度で存在しているという仮定をして, 粒子の存在によって流れの場が影響を受けない (passive, non-dynamical) としているが, 実際には高周波側でスペクトルの減衰が生じるはずである (Baw and Peskin, 1971).

## 6. あとがき

流体粒子の運動はマルコフ過程であり, Lagrange スペクトル函数は急減少函数であるという仮定を用いて, あらゆる乱子領域をカバーする Lagrange スペクトル函数の漸近形を提案した. また, そこにでてくるユニバーサルな定数についても検討した. 現象のスケールが最小乱子より小さいような Lagrange 的現象を取扱うさいに, ここに提案した函数形が実用になることを期待したい. そのためには, さらに函数形の検討やユニバーサルな定数の値の決定に努力が必要であろう.

えられたスペクトル表示を用いて, 乱流中に浮遊する微細粒子によるエネルギー逸散の評価を行ってみた.

## 参考文献

Baw, P.S.H. and Peskin, R.L. (1971), Some aspects of gas-solid suspension turbulence, J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D, 93, 631.

Corrsin, S. and Lumley, J. L. (1956), On the equation of motion for a particle in turbulent fluid, Appl. Sci. Res., Sec. A, 6, 114.

Corrsin, S. (1962), Theories of turbulent dispersion, Mécanique de la turbulence (Colloq. Intern. du CNRS à Marseille), Ed. CNRS, 27.

Deardorff, J. W. and Peskin, R. L. (1970), Lagrangian statistics from numerically integrated turbulent shear flow, Phys. Fluids, 13 (3), 584.

Edwards, S. F (1971), A local energy transfer equation for isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 325, 313.

Hansen, E. (1971), Measurements of Lagrangian characteristics for surface turbulence, Basic Res. Progr. Rep. 24, Hydraulic Laboratory, Tech. Univ. Denmark, 21.

井上栄一 (1952)，地表風の構造，農業技術研究所報告 A2.

Krasnoff, E. and Peskin, R. L. (1970), Correlation of diffusion data in grid turbulence, Phys. Fluids, 13 (11), 2871.

Lin, C. C. (1960), On a theory of turbulent dispersion by continuous movements, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 46 (4), 566.

Монин, А. С. и Яглом, А. М. (1967), Статистическая гидромеханика, ч. II, Наука.

Novikov, E. A. (1962), Energy spectrum of an incompressible fluid in turbulent flow, Soviet Phys. Doklady, 6 (7), 571.

Novikov, E. A. (1963), Random force method in turbulence theory, Soviet Phys. JETP, 17 (6), 1449.

Obukhov, A. M. (1959), Description of turbulence in terms of Lagrangian variables, Adv. Geophys., 6, 113.

Obukhov, A. M. and Yaglom, A. M. (1951), Microstructure of turbulent flow, P. M. M., 15 (1), 3.

Paquin, J. E. and Pond, S. (1971), The determination of the Kolmogoroff constants for velocity, temperature and humidity fluctuations from second- and third-order structure functions, J. Fluids Mech., 50 (2), 257.

Parker, E. N. (1969), Physical model of hydrodynamic turbulence, Phys. Fluids, 12 (8), 1592.

Patterson, G. S. and Corrsin, S. (1966), Computer experiments on random walks with both Eulerian and Lagrangian statistics, Dynamics of Fluids and Plasmas, ed, S. I. Pai et al., Acad. Press, 275.

Snyder, W. H. and Lumley, J. L. (1971), Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow, J. Fluid Mech., 48 (1), 41.

Tennekes, H. (1968), Simple approximation to turbulent energy transfer in the universal equilibrium range, Phys. Fluids, 11 (1), 246.

Weizsäcker, C. F. v. (1948), Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen, Zeits. Physik, 124, 614.

余越正一郎 (1968)，河川における乱流エネルギー逸散率について，京大防災研年報，11 **B**，191，

余越正一郎 (1969)，河川における土砂の浮遊限界について，昭44土木学会関西支部講演概要，II-17.

余越正一郎 (1971)，最大乱子の寿命時間の通過時間，信州大工紀要 30，119.

## Summary

## Asymptotic Form of Lagrangian Spectrum Function of Turbulence



Shōitirō YOKOSI

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)



Working equation for the Lagrangian spectrum function over the entire range of Lagrangian turbulon frequencies is proposed. The principal assumptions are that the evolution of the state of a selected particle in time forms a Markov process and that the spectrum function is a rapidly decreasing function. The asymptotic form of the spectrum is expressed in the form,

$$E_{11}(\omega) = \frac{A_L\langle\varepsilon\rangle}{\omega_0{}^2} \frac{\exp[-c^2(\omega/\omega_\infty)^2]}{1+(\omega/\omega_0)^2},$$

where

$A_L$ is the universal constant. $A_L \approx c/4.4$.

$\langle\varepsilon\rangle$ is the kinetic energy dissipation rate.

$\omega$ is the Lagrangian turbulon frequency. The subscripts, 0 and $\infty$, mean the largest and the smallest turbulon respectively.

This form behaves like $\omega^{-2}$ in the inertial range and as an exponential decay in the viscous range.

The result is applied to the estimation of the energy dissipation by solid particles suspended in a turbulent fluid.