

圧縮性を考慮したアクチュエータ系の振動について

浜 邦彦*・石垣 可連**

(昭和46. 3. 19受理)

1. ま え が き

制御分野のうちで油圧部門において良く使われる Fig. 1 に示されるようなアクチュエータ Actuator (または油圧モータ Hydraulic Motor) は一般には油のもっている流体エネルギーを機械的エネルギーに変換する要素である. このアクチュエータ系の特性について圧力およびピストン変位の振動を重点的にとらえ, 流体 (本研究においては油) の圧縮性を考慮して理論解析¹⁾を行ない一応の結果を得ることができ, アクチュエータ系の特性を明確にすることができたのでその結果についてここに報告する次第である.

本報文においては油圧系 (ここではアクチュエータ系) の振動を流体の圧縮性をも考えに入れることにより, アクチュエータ内のピストンに作用する圧力の圧力変動に着目し, そのインディシャル応答を理論解析することによって流体の圧縮性を考慮した場合におけるアクチュエータ系の振動を解明することができる. このときアクチュエータ系の過渡応答 (インディシャル応答) を二次系と仮定して解析し, アクチュエータ系の振動に関する

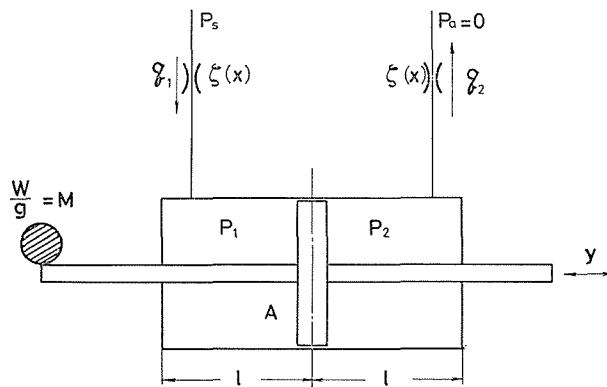


Fig. 1. アクチュエータ系原理図

* 機械工学教室 助手

** 機械工学教室 教授

方程式としてアクチュエータ内の圧力およびピストン変位（ピストン速度・ピストン加速度）に関しての非線形連立微分方程式をたて、これらを解くことによりアクチュエータ系の振動を系の減衰係数（Damping coefficient）および系の固有振動数（Undamped Natural Frequeuy）に着目して明らかにし、アクチュエータ系の特性を明確にすることを目的としたものである。

2. 使用記号および単位

本報文においてはつぎに示す記号および単位を使用する。

P_s : 供給油圧源の圧力 (kg/cm²・g.)

P_1 : アクチュエータ左空間内圧力 (kg/cm²・g.)

P_2 : アクチュエータ右空間内圧力 (kg/cm²・g.)

P_a : 大気圧 (kg/cm²・g.)

P : P^1, P^2 (kg/cm²・g.)

x : 絞り弁開度 (cm)

$\xi(x)$: 絞り抵抗 (s²/cm⁵)

γ_1 : 圧力 P_1 における油の比重量 (kg/cm³)

γ_2 : 圧力 P_2 における油の比重量 (kg/cm³)

γ_a : 大気圧 P_a における油の比重量 (kg/cm³)

β : 油の圧縮率 (油のみかけの圧縮率) (cm²/kg)

g : 重力加速度 (cm/s²)

W : 重量負荷 (kg)

M : 負荷質量 = $\frac{W}{g}$ (kg・s²/cm)

A : ピストン有効断面積 (cm²)

l : アクチュエータの半分の長さ (cm)

y : ピストン変位 (cm)

t : 時間 (S, sec)

$\frac{dy}{dt}$: ピストン速度 (cm/s)

$\frac{d^2y}{dt^2}$: ピストン加速度 (cm/s²)

q_1 : 供給油圧源側絞りを流れる流量 (cm³/s)

q_2 : 大気開放側絞りを流れる流量 (cm³/s)

ω_n : 系の固有振動数 (rad/s)

ζ : 系の減衰係数

s : 複素数演算子

τ : 振動の周期 (s)

θ, φ, ϕ : 位相角 (rad)

m : 整数

n : 正の実数

i : 虚数単位

3. 前 提

本報文においてはつぎに掲げる6項目の前提を設ける.

(1) 絞りによる絞り両端の圧力差は絞りを流れる流量の2乗および油の比重量に比例する. このときの比例定数を絞り抵抗 $\xi(x)$ とする.

(2) 作動流体には油を使用する.

(3) 流体の粘性による管路抵抗はすべて絞りに集中したと考え, したがって管路の影響については特に考えない.

(4) 重力の影響はないものとする.

(5) 系の初期条件として $t = 0$ において $P_1 = P_2 = \frac{P_s + P_a}{2}$, $y = \frac{dy}{dt} = 0$, $\xi(x) = \infty$ とし, かつピストンはシリンダの中央にあるとする.

(6) $P_s > P_1$, P_2 とし, また βP_1 , $\beta P_2 < 1$ の範囲のみについて取扱うものとする.

4. 圧力およびピストン変位に関する振動方程式

Fig. 1 において前提(1)を考慮すると絞り両端の圧力差は絞りを流れる流量の2乗および油の比重量に比例するから, 油の供給側絞りについて

$$P_s - P_1 = \xi(x) \cdot \gamma_1 \cdot q_1^2 (\xi(x) : \text{絞り抵抗}) \quad (1)$$

一方油の吐出側絞りについては

$$P_2 - P_a = \xi(x) \cdot \gamma_2 \cdot q_2^2 \quad (2)$$

つぎに油の圧縮性を考慮したアクチュエータ内の圧力に関する状態方程式は圧縮率の定義より

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{1}{\beta l A} \left(A \frac{dy}{dt} - q_1 \right) \quad (3)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{1}{\beta l A} \left(q_2 - A \frac{dy}{dt} \right) \quad (4)$$

上式(3)および(4)はつぎのように説明することができる.

式(3)はアクチュエータの左空間内について圧力に関する状態方程式であり, 式(4)はアクチュエータの右空間内についての圧力に関する状態方程式である両式において $A \cdot \frac{dy}{dt}$ は単位時間当りのアクチュエータ空間内の容積の変化を表わし q_1 は単位時間当りにアクチュエータ内に流入した油の流量である. また q_2 は単位時間当りにアクチュエータ内より大気中に流出した油の流量である. したがって $\left(A \frac{dy}{dt} - q_1 \right)$ および $\left(q_2 - A \frac{dy}{dt} \right)$ は単位時間当りのアクチュエータ内の2つの空間における空洞容積の増加または減少となる. この場合流体の連続性を考えれば空洞容積の増減がすなわち流体(油)の比重量あるいは密度の大小となる. また式中の lA なる値はアクチュエータ空間内の最初の容積である一般に油の圧縮率(油のみかけの圧縮率) β はつぎのように表わされる.

$$\beta = - \frac{dV}{V} / \frac{dP}{dP} \quad (5)$$

式(5)を時間 dt 間について考えると式(5)は変形されて

$$\beta = - \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} / \frac{dP}{dt} \quad (6)$$

ここで $\frac{dV}{dt}$ の値はアクチュエータの左空間内については $\frac{dV}{dt} = A \frac{dy}{dt} - q_1$, 右空間内においては $\frac{dV}{dt} = q_2 - A \frac{dy}{dt}$ である. また $V = lA$ であるから

$$\begin{aligned} \beta &= - \frac{1}{lA} \cdot \left(A \frac{dy}{dt} - q_1 \right) / \frac{dP_1}{dt} \\ &= - \frac{1}{lA} \cdot \left(q_2 - A \frac{dy}{dt} \right) / \frac{dP_2}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)よりアクチュエータ内の圧力に関する状態方程式として式(3) および(4) を得ることができる.

つぎにピストンの運動に関してつぎの関係式が成立する.

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) A &= \frac{W}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned} \quad (8)$$

さらに油の圧力とそのときの油の比重量との間には圧縮率の定義より

$$\beta = - \frac{\gamma_a - \gamma_1}{\gamma_1 P_1} \quad (9)$$

および

$$\beta = - \frac{\gamma_a - \gamma_2}{\gamma_2 P_2} \quad (10)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma_a}{1 - \beta P_1} \\ \gamma_2 &= \frac{\gamma_a}{1 - \beta P_2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上述の式(1), (3)および(11)より q_1, γ_1 の2つの量を消去すると

$$\sqrt{\frac{(P_s - P_1)(1 - \beta P_1)}{\xi(x) \cdot \gamma_a}} - \beta l A \cdot \frac{dP_1}{dt} = A \frac{dy}{dt} \quad (12)$$

同様に式(2), (4)および(11)より q_2, γ_2 を消去すると

$$\sqrt{\frac{(P_2 - P_a)(1 - \beta P_2)}{\xi(x) \cdot \gamma_a}} + \beta l A \cdot \frac{dP_2}{dt} = A \frac{dy}{dt} \quad (13)$$

一方前述した式(8)のピストンの運動方程式を再記すると

$$(P_1 - P_2) A = M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (8)$$

式(12), (13)および式(8)がアクチュエータ系のアクチュエータ内の圧力とピストン変位に関する連立非線形微分方程式である。

これらの諸式に前提(5)の系の初期条件すなわち “ $t = 0$ において $P_1 = P_2 = \frac{P_s + P_a}{2}$, $y = \frac{dy}{dt} = 0$, $\xi(x) = \infty$ かつピストンはシリングの中央にあるものとする” を与え電子計算機により近似計算をすることによって、アクチュエータ系の特性を得ることができる。この場合にこれらの連立非線形微分方程式をアクチュエータ内空間の圧力 P_1, P_2 の圧力変動について解くわけであるが、圧力 P_1 と P_2 とは 180° の位相ずれをもっていることは明らかであり、その圧力の大きさの変動分に関しては2つの圧力の変動分の絶対値は等しいので今後圧力 P_1 にも着目して解析する。

5. インディシャル応答線図より系の固有振動数と減衰係数を求める方法について

まずこのアクチュエータ系の振動は二次系であると仮定すると一般に二次系の特性方程式はつぎのように表わすことができる。

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (14)$$

式(14)の根を s_1, s_2 とすれば

$$s_1, s_2 = -(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad (15)$$

ここで減衰係数 ζ によってつぎの2つの場合に分けて考える。

(i) $\zeta^2 - 1 \geq 0$ すなわち $\zeta \geq 1$ のとき

根 s_1, s_2 は実根となり系の特性は指数関数的に減衰してしまい振動は起り得ない。

(ii) $\zeta^2 - 1 < 0$ すなわち $\zeta < 1$ のとき

根 s_1, s_2 は複素根となり系の特性は振動を起しながら指数関数的に減衰する。

ところで本報文においては振動に着目しているから系を二次と仮定して振動性をもっている(ii)の場合について考えれば十分である。

そこで特性方程式が二次である場合の圧力に関する微分方程式を考えるとつぎのように書くことができる。

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dP}{dt} + \omega_n^2 P = 0 \quad (16)$$

式(15)より特性根 s_1 および s_2 は $\zeta < 1$ のときつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \\ s_2 &= -(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)より式(16)の微分方程式の一般解は

$$P = P_{c1}e^{s_1t} + P_{c2}e^{s_2t} \quad (18)$$

(ただし P_{c1} , P_{c2} は定数)

式(18)を時間 t で微分すれば

$$\frac{dP}{dt} = P_{c1}s_1e^{s_1t} + P_{c2}s_2e^{s_2t} \quad (19)$$

ここで式(18), (19)より定数 P_{c1} および P_{c2} を決定するために初期条件をつぎのように定める。

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ において } P &= P_0 \\ \frac{dP}{dt} &= P_0' \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

これより P_{c1} と P_{c2} を求めると

$$\left. \begin{aligned} P_{c1} &= \frac{P_0' - P_0s_2}{s_1 - s_2} \\ P_{c2} &= \frac{P_0s_1 - P_0'}{s_1 - s_2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(18), (21)より微分方程式の一般解 P はつぎのように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ (P_0' - P_0s_2)e^{s_1t} + (P_0s_1 - P_0')e^{s_2t} \right\} \\ &= \frac{1}{2j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \cdot \left[\{P_0' + P_0(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n\}e^{s_1t} \right. \\ &\quad \left. + \{(P_0 - \zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n - P_0'\}e^{s_2t} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

上式(22)を整理すると

$$P = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ P_0 \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta P_0 \omega_n + P_0'}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right\} \quad (23)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} P &= C e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \theta \right] \\ C &= \sqrt{\frac{P_0^2 \omega_n^2 + 2\zeta P_0 P_0' \omega_n + P_0'^2}{(1-\zeta^2) \omega_n^2}} \\ \tan \theta &= \frac{P_0 \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta P_0 \omega_n + P_0'} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= C \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \theta + \varphi \right] \\ \tan \varphi &= -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

圧力 P が極大値または極小値をとるときの時間 t_m は $\left[\frac{dP}{dt} \right]_{t=t_m} = 0$ を満足する。すなわち式(25)より

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t_m + \theta + \varphi = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (26)$$

$$\therefore t_m = \frac{m\pi - \theta - \varphi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \quad (26')$$

したがって時間 t_m なるときの圧力 P の極大値(または極小値)を P_m 、時間 t_{m+1} となるときの圧力 P の極小値(または極大値)を P_{m+1} とすれば、式(24)より P_m 、 P_{m+1} はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} P_m &= C e^{-\zeta\omega_n t_m} \cdot \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t_m + \theta \right] \\ &= C e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (m\pi - \theta - \varphi)} \cdot \sin \left[m\pi\varphi \right] \end{aligned} \quad (27)$$

同様にして

$$P_{m+1} = C e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \{(m+1)\pi - \theta - \varphi\}} \cdot \sin \left[(m+1)\pi - \varphi \right] \quad (28)$$

したがって系の振動特性の隣り合った極値の比を求めると式(27)および(28)より

$$\frac{P_{m+1}}{P_m} = -e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \quad (29)$$

したがって

$$\zeta = -\frac{l_n\left(-\frac{P_{m+1}}{P_m}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left\{l_n\left(-\frac{P_{m+1}}{P_m}\right)\right\}^2}} \quad (29')$$

一方振動の周期を τ とすれば式(24)より

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (30)$$

すなわち

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (30')$$

したがってインディシャル応答線図より任意の隣り合った圧力の極値 P_m および P_{m+1} を読み取ることができるから式(29')より減衰係数 ζ を求めることができる。

また同線図より振動の周期 τ も読み取ることができることより式(30')を使って固有振動数 ω_n も求めることができる。

この場合上で求められた減衰係数 ζ および固有振動数 ω_n はアクチュエータ内の圧力に関する圧力振動についての減衰係数であり固有振動数である。したがってアクチュエータ系全体の減衰係数および固有振動数を求めなければならないが、後述される付録 [1] により明確にされるようにこの減衰係数 ζ および固有振動数 ω_n はアクチュエータ系の減衰係数と固有振動におき換えることができる。

以下インディシャル応答について示す。

6. 理論演算によるインディシャル応答

連立非線形微分方程式(12), (13)および(8)をつぎの値を用いて圧力 P_1 に関して理論解析した結果を以下に示す。

ピストン有効断面積 $A=10(\text{cm}^2)$

アクチュエータの半分の長さ $l=10(\text{cm}^2)$

供給油圧源の圧力 $P_s=100, 200, 400(\text{kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{g.})$

負荷質量 $M=0.001, 0.01, 0.1(\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm})$

絞り抵抗 $\xi(x)=125, 250, 500(\text{s}^2/\text{cm}^5)$

油のみかけの圧縮率 $\beta=1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}(\text{cm}^2/\text{kg})$

大気圧 $P_a=0(\text{kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{g.})$

大気圧における油の比重 $\gamma_a=0.882 \times 10^{-3}(\text{kg}/\text{cm}^3)$

Fig. 2 は $P_s=200\text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}$, $\xi(x)=500\text{s}^2/\text{cm}^5$, $M=0.01\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合におけるアクチュエータ内圧力の過渡応答について示したものである。インディシャル応答を油の圧縮率 β が 1.0×10^{-5} , 1.0×10^{-4} , $1.0 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{kg}$ の三種類の場合についてそれぞれ求めたものである。図の縦軸にはアクチュエータの2つの空間内の圧力 P_1 および P_2 を $\text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}$ の単位で示し、横軸にはステップ入力時を $t=0$ としたときの時間を s . (sec) の単位で表わしている。図中における実線と破線はそれぞれアクチュエータの左空間内の圧力 P_1 と右空間内の圧力 P_2 とを示しているが、圧力 P_1 と P_2 とを比較してみると、圧力変動分の大きさは等しく位相が 180° づれていることが良くわかる。したがって以下に述べる理論演算結果はアクチュエータの左空間内の圧力 P_1 にも注目して圧力 P_2 は省略する。

Fig. 3 は $P_s=100\text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}$, $\xi(x)=500\text{s}^2/\text{cm}^5$, $M=0.001\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合のインディシャル応答である。油の圧縮率 β は 1.0×10^{-5} , 1.0×10^{-4} , $1.0 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{kg}$ の三種類であり、Fig. 4 は $P_s=100\text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}$, $\xi(x)=500\text{s}^2/\text{cm}^5$, $M=0.01\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合についてのインディシャル応答であって油の圧縮率は前の2つの図 Fig. 2, Fig. 3 と同様に 1.0×10^{-5} , 1.0×10^{-4} , $1.0 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{kg}$ の三種類の場合について行なったものである。Fig. 3 と Fig. 4 の間の違いは質量負荷 M の値だけであり、Fig. 4 における M の値は Fig. 3 における M の値の10倍の大きさにとっている。2つの図より定性的な傾向として油の圧縮率 β が小さいほど系の固有振動数 ω_n および減衰係数 ζ はともに大きく、逆に β が大きくなるにしたがって固有振動数・減衰係数はともに小さくなってゆく。

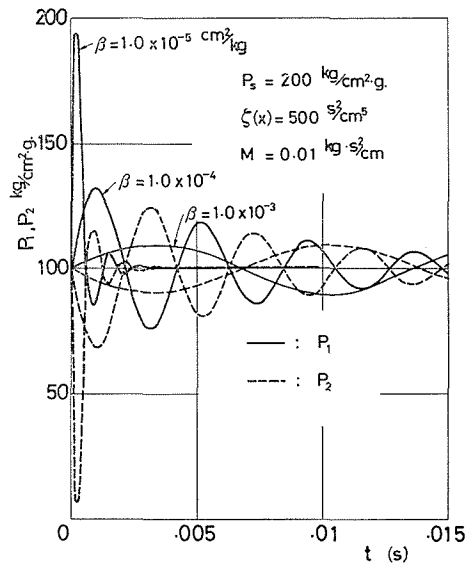


Fig. 2. アクチュエータの過渡応答

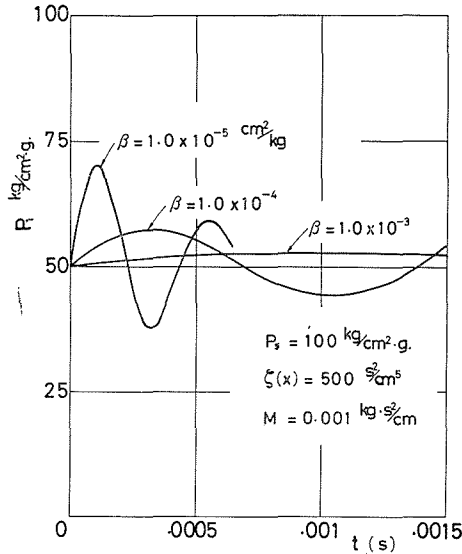


Fig. 3. アクチュエータ系のインディシャル応答

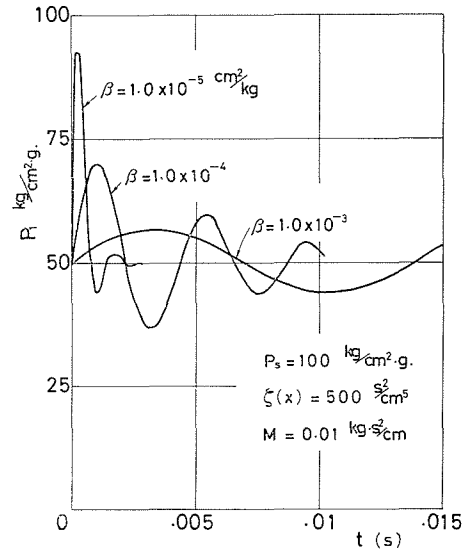


Fig. 4. アクチュエータ系の振動

上記の傾向を定量的に示したものが Fig.5 である。図には減衰係数—油の圧縮率—負荷質量特性 ($\zeta-\beta-M$ 特性) 曲線および固有振動数—油の圧縮率—負荷質量特性 ($\omega_n-\beta-M$ 特性) 曲線が示してある。この図は Fig.3 および Fig.4 のインディシャル 応答線図を基礎にして式(29')および式(30') を使って減衰係数と固有振動数を求め、これらの値をも

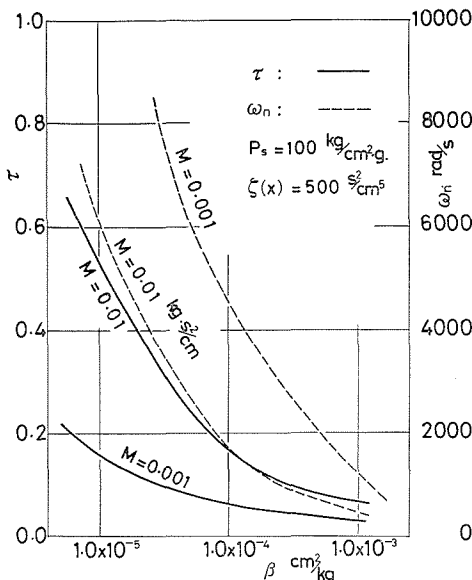


Fig. 5. $\zeta-\beta-M$ $\omega_n-\beta-M$ 特性

とにグラフ化したものである。Fig. 5 において縦軸には減衰係数 ζ と固有振動数 ω_n rad/s をとり、横軸には油の圧縮率 β cm²/kg を示している。また P_s および $\xi(x)$ はそれぞれ 100kg/cm², 500s²/cm⁵ であって Fig. 3 と Fig. 4 の場合と同じ値である。図は質量負荷 M をパラメータにとり M の値が 0.001 および 0.01kg · s²/cm の2つの場合について示してあるが、図中の実線は減衰係数 ζ と油の圧縮率 β および負荷質量 M との関係を示し破線は固有振動数 ω_n と β と M との関係を表わしている。

この図より上述の定性的な傾向が明らかに示されている。また減衰係数 ζ に関してはつぎのような関係が認められている。たとえば $M=0.01$ の曲線上の $\beta=1.0 \times 10^{-3}$

の減衰係数 ζ の値はおおよそ $\zeta=0.07$ 程度で、この値は $M=0.001$ の曲線上では $\beta=1.0 \times 10^{-4}$ における ζ の値に等しい。また $M=0.01, \beta=1.0 \times 10^{-4}$ のときの ζ の値は $M=0.001, \beta=1.0 \times 10^{-5}$ 上の ζ の値と一致する。すなわちこのことを一般的に言い表わすと減衰係数 ζ を $\beta, M, \xi(x)$ の関数であるとすれば

$$\zeta = f(\beta, M, \xi(x)) \quad (31)$$

となり、 n を正の実数とした場合上の関係はつぎのような関係式におくことができる。

$$\begin{aligned} \zeta &= f(\beta, M, \xi(x)) \\ &= f\left(\frac{\beta}{n}, \frac{M}{n}, \xi(x)\right) \end{aligned} \quad (32)$$

つぎに固有振動数 ω_n に関してはつぎのような関係が確認される。たとえば $M=0.01$ の曲線上で $\beta=1.0 \times 10^{-3}$ のときの ω_n の値は、 $M=0.001$ の曲線上で $\beta=1.0 \times 10^{-4}$ のときの ω_n の値の1/10に等しい。すなわち ω_n も $\beta, M, \xi(x)$ の関数となりこれを次式(33)のように表わせば

$$\omega_n = g(\beta, M, \xi(x)) \quad (33)$$

上述の関係は n が正の実数の場合つぎのような関係式として表わすことができ、インディシャル応答特性を明確にすることができる。

$$\begin{aligned} \omega_n &= g(\beta, M, \xi(x)) \\ &= n \cdot g\left(\frac{\beta}{n}, \frac{M}{n}, \xi(x)\right) \end{aligned} \quad (34)$$

以上の関数関係式(32)および式(34)を言葉を変えると、 $\beta, M, \xi(x)$ のある定まった値に対して ζ および ω_n に関する特性曲線が画がかれておれば、その曲線を左右にあるいは上下に平行移動することにより任意の $\beta, M, \xi(x)$ の値に対する ζ, ω_n に関する特性曲線を求めることが可能となる。

つぎにもう一つの例として $P_s = 200\text{kg/cm}^2 \cdot \text{g.}, \xi(x) = 250\text{s}^2/\text{cm}^5$ の場合について $M=0.001\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ と $0.01\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ に対するインディシャル応答をFig. 6, Fig. 7に示し、Fig. 8に系の減衰係数および固有振動数に関する特性曲線を示してある。

Fig. 6およびFig. 7は前述のFig. 3, Fig. 4の場合と傾向は定性的に非常に良く似ている。油の圧縮性は $\beta=1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{kg}$ の三種類について示してあるが、Fig. 3とFig. 6を比較してみるとFig. 6の場合にはFig. 3の場合に対して P_s は2倍になり $\xi(x)$ は0.5倍になっている。また負荷・質量 M は全く同じである。このような場合Fig. 6の縮軸目盛をFig. 3の縮軸目盛の2倍にとっておけば2つの図は完全に一致することがわかる。この現象はFig. 4とFig. 7に示される $M=0.01\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合にも現われる。

このことを明確にするためにつぎのような簡単な関数を考える。すなわちアクチュエー

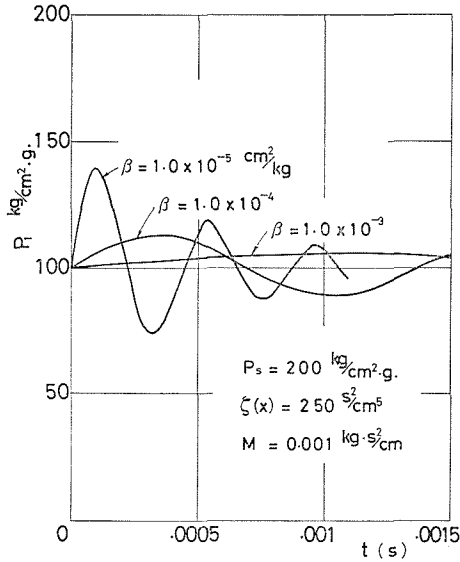


Fig. 6. アクチュエータ系のインディシャル応答

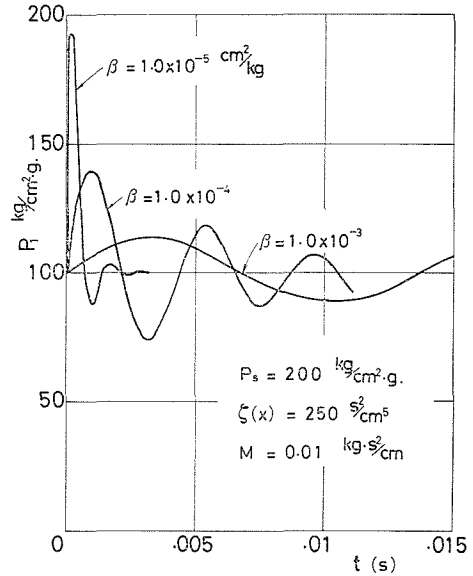


Fig. 7. アクチュエータ系のインディシャル応答

タ空間内の圧力は P_1 は P_s , β , $\xi(x)$ および M の関数として表わすことができるから次式のようにおくことができる。

$$P_1 = P_1(P_s, \beta, \xi(x), M) \quad (35)$$

この式に上に述べた現象を考えにいれてやると

$$P_1 = 2 \cdot P_1\left(2P_s, \beta, \frac{\xi(x)}{2}, M\right) \quad (36)$$

なる関係式を得ることができる。このことを一般的に拡大して表現すると、 n を正の実数としてアクチュエータ空間内の圧力 P_1 を最終的につぎのような関数形におくことができる。

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1(P_s, \beta, \xi(x), M) \\ &= n \cdot P_1\left(n \cdot P_s, \beta, \frac{\xi(x)}{n}, M\right) \end{aligned} \quad (37)$$

つぎに Fig. 8 において実線は減衰係数 $\zeta-\beta-M$ 特性を示し、破線は固有振動数 $\omega_n-\beta-M$ 特性を示しているが、この場合にも前の例で考察した式 (32) および式 (34) の事柄が成立する。

Fig. 9 は $P_s = 200 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{g}$, $\xi(x) = 500 \text{ s}^2/\text{cm}^5$ の場合についての $\zeta-\beta-M$ 特性および $\omega_n-\beta-M$ 特性である。この図においても前述の Fig. 5, Fig. 8 と同様に特性曲線

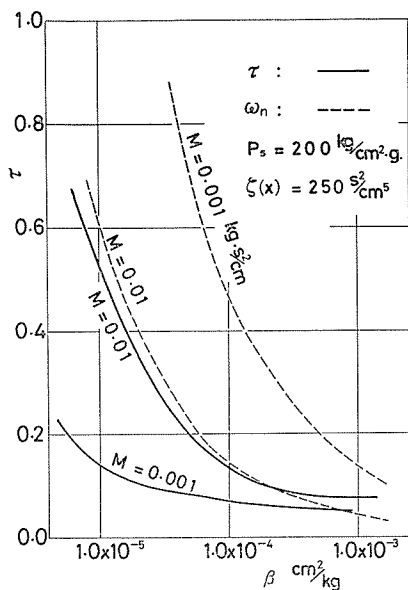


Fig. 8. ζ - β - M , ω_n - β - M 特性

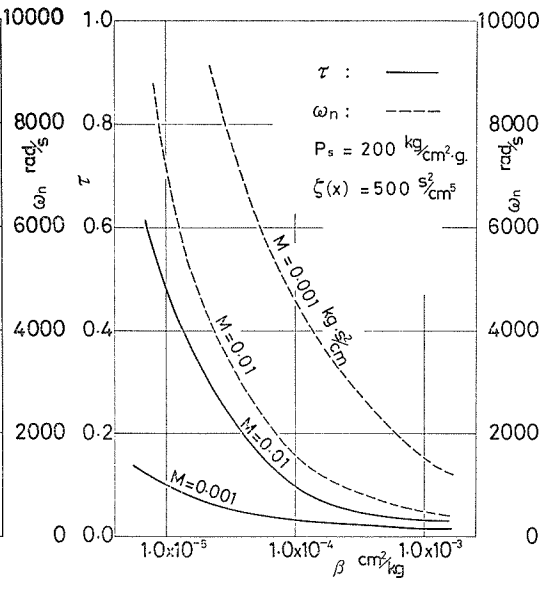


Fig. 9. ζ - β - M , ω_n - β - M 特性

に共通点があり式(32)および式(34)もそのまま成り立つ。

Fig. 10 に示されるアクチュエータ系の過渡応答は油の圧縮性 β をパラメータにとり、負荷質量 M を $M=0.001, 0.01 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の二種類に変えた場合についてのものである。 $P_s=400 \text{ kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{g}$ 、 $\xi(x)=12.5 \text{ s}^2/\text{cm}^5$ にとり β は $1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}$ および 1.0×10^{-3} の3つの場合について負荷質量 M によってインディシャル応答が如何に変化するかを示した。 図の縦軸にはアクチュエータ空間内の圧力 $P_1 \text{ kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{g}$ をとり横軸には時間 t を s (sec) の単位で示した。 図中の太線は $M=0.001 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合について、また細線は $M=0.01 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の場合についての特性である。 この場合 $M=0.01, \beta=1.0 \times 10^{-5}$ の場合には瞬間的に P_1 の値が P_s の値よりも大きくなり前提(6)と裏腹になるが、負荷質量 M による慣性力のために一瞬ではあるがこのような現象が現われたものと考えられる。 また $M=0.001, \beta=1.0 \times 10^{-4}$ の特性曲線と $M=0.01, \beta=1.0 \times 10^{-3}$ の特性曲線とが完全に一致しているが、これは前に述べた現象の一つである。

Fig. 11 には絞り抵抗 $\xi(x)$ を変えた場合の過渡応答 (この場合にはインディシャル応答) について示した。 $P_s=200 \text{ kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{g}$ 、 $\beta=1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kg}$ 、 $M=0.01 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の各値について絞り抵抗 $\xi(x)$ をパラメータにとり、この $\xi(x)$ を $125, 250, 500 \text{ s}^2/\text{cm}^5$ の三種類の値に対して特性曲線を明示した。 $\xi(x)$ が小さい程 P_1 の値は高くなり $\xi(x)$ が大きくなると P_1 の値はだんだんと低くなってゆく。 この図において絞り抵抗 $\xi(x)$ が変化しても、アクチュエータ内の圧力 P_1 が初期圧力になる時点の時間はほとんど同じであるという現象は注目してよいであろう。

つぎに Fig. 12 には負荷質量 M を変えた場合の過渡応答を示した。 この図は $P_s=100$

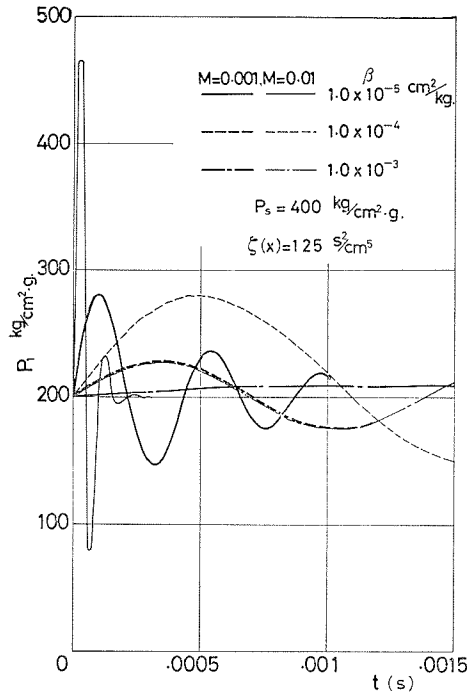


Fig. 10. アクチュエータ系の過渡応答

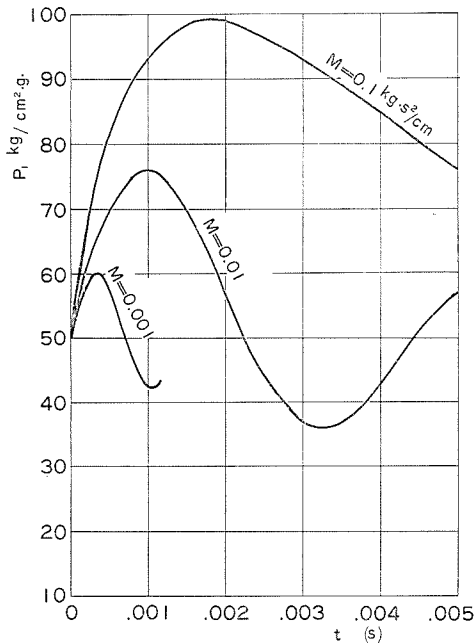


Fig. 12. 質量負荷 M を変えた場合の過渡応答
 $(\beta = 1.0 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{kg}, P_s = 100 \text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}, \zeta(x) = 250 \text{s}^2/\text{cm}^5)$

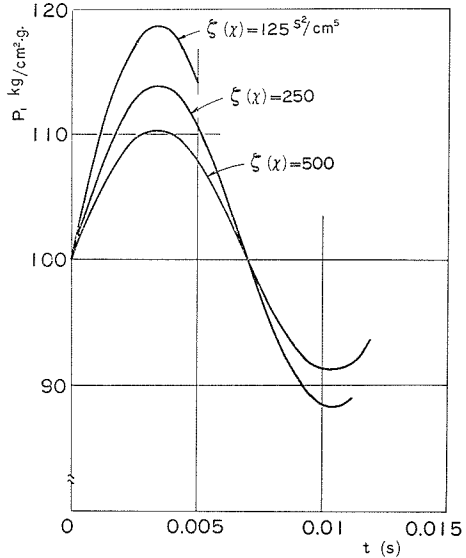


Fig. 11 絞り抵抗 $\zeta(x)$ を変えた場合の過渡応答
 $(\beta = 1.0 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{kg}, P_s = 200 \text{kg/cm}^2 \cdot \text{g}, M = 0.01 \text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm})$

kg/cm²・g., $\beta = 1.0 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{kg}$, $\zeta(x) = 250 \text{s}^2/\text{cm}^5$ の値をもつ場合であるが, M をパラメータにとり $M = 0.001, 0.01, 0.1 \text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ の三種類について特性を示したものである. M が小さい程アクチュエータ内の圧力 P_1 は小さく, M が大きくなるにしたがって P_1 の値が大きくなってゆく現象を読み取ることができる. この現象は当然のことであって負荷質量が大きい程作動し難いことを示している.

また M の値が小さい程固有振動数が小さくなっている様子もこの図より読みとることができる.

7. 結 論

以上のことをまとめるとつぎに示される5点の結論を得ることができる.

(1) アクチュエータ内の圧力 P_1, P_2 に関する減衰係数 ζ および固有振動数 ω_n は,

アクチュエータ系のピストン変位 y に対する減衰係数・固有振動数と同一であり、 P_1, P_2 についての ζ と ω_n を知ることでアクチュエータ・サーボ系の減衰係数 ζ と固有振動数 ω_n を求めることができる。

(2) 系の減衰係数 ζ は質量負荷 M と油の圧縮率の逆数 $1/\beta$ にほぼ比例し、また絞り抵抗 $\xi(x)$ にも若干関係する。

(3) 系の固有振動数 ω_n は質量負荷の逆数 $1/M$ と圧縮率の逆数 $1/\beta$ にほぼ比例し、この ω_n も絞り抵抗 $\xi(x)$ に若干関係する。

(4) 系の減衰係数 ζ および固有振動数 ω_n は $\beta, M, \xi(x)$ の関数として表わすことができ、 n を正の実数とすればつぎの関係が成立する。

$$\zeta = f(\beta, M, \xi(x)) = f\left(\frac{\beta}{n}, \frac{M}{n}, \xi(x)\right)$$

$$\omega_n = g(\beta, M, \xi(x)) = n \cdot g\left(\frac{\beta}{n}, \frac{M}{n}, \xi(x)\right)$$

(5) アクチュエータ内の圧力 P_1, P_2 (一般的は P とする) は $P_s, \beta, \xi(x)$ および M の関数となりつぎのような関係式が成立する。

$$P = P(P_s, \beta, \xi(x), M) = n \cdot P\left(nP_s, \beta, \frac{\xi(x)}{n}, M\right)$$

8. 付 録

〔1〕 アクチュエータ内の圧力振動に関する減衰係数および固有振動数とアクチュエータ系の減衰係数・固有振動数の関係について

本文中式(24)を再記する。

$$\left. \begin{aligned} P &= Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta] \\ C &= \sqrt{\frac{P_0^2\omega_n^2 + 2\zeta P_0 P_0' \omega_n + P_0'^2}{(1-\zeta^2)\omega_n^2}} \\ \tan \theta &= \frac{P_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta P_0\omega_n + P_0'} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式(24)をアクチュエータの左空間内の圧力に適用すると $P=P_1$ であるから

$$P_1 = Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta] \quad (38)$$

一方アクチュエータの右空間内の圧力 P_2 については P_1 とその変動分に関して大きさは等しく位相のみが 180° づれているから

$$P_2 = -Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta] \quad (39)$$

式(38)および式(39)より

$$P_1 - P_2 = 2Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta] \quad (40)$$

一方前述の式(8)より

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{A}{M} (P_1 - P_2) \quad (41)$$

したがってピストン変位 y は式(41)を時間 t に関して2重積分すればよいから

$$y = \frac{A}{M} \iint (P_1 - P_2) dt \cdot dt \quad (42)$$

式(40)を式(42)に代入して積分を行なえば

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2A}{M\omega_n^2} \cdot Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left\{ (2\zeta^2 - 1) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \right. \\ &\quad \left. + 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \right\} \\ &= \frac{2A}{M\omega_n^2} \cdot Ce^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin[\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta + \phi] \\ \tan \phi &= \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

式(24)と式(43)を比較すると減衰特性を示す要素 $e^{-\zeta\omega_n t}$ は両式において全く同一なる関係にあり、また振動の周期を示す要素 $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t$ も全く同じである。

すなわちアクチュエータ内の圧力 P_1 に対する方程式より求められた減衰係数 ζ と固有振動数 ω_n は、ピストン運動についての減衰係数および固有振動数と完全に一致する。

9. 参 考 資 料

- 1) 第13回自動制御連合講演会(昭45-10)講演論文集 p.223~224 石垣・浜・小林 “圧縮性を考慮したアクチュエータ系の振動について”

Summary

Vibration of a Hydraulic Actuator System

Kunihiko HAMA and Yoshitsura ISHIGAKI

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

We have investigated the vibration of a hydraulic actuator system which is often used in the hydraulic control field as method of analyzing an indicial response of the system, considering pressure changes in the actuator owing to the compressibility of the fluid. For analyzing the system we supposed that a transient response of the system should be a second order system to set up simultaneous non-linear differential equations of the pressure in the actuator and the displacement of the piston, and by solving them, obtained the factors of the vibration system — damping ratio and undamped natural frequency.