

# 水晶振動子の周波数温度特性の切り出し角依存について

中沢 光男\*・松坂 弘\*\*

(昭和45年12月17日受理)

## 1. ま え が き

1880年 Curie 兄弟<sup>1)</sup>によって水晶における圧電気現象が発見されて以来、結晶学的に眺めた水晶の対称性や、その内部構造に関する研究が飛躍的に進歩した。また圧電気効果を巧みに応用した圧弾性振動子の研究も盛んになり、中でも1918年仏の Langevin は水晶を用いて水中への超音波放射の研究をしていた。その頃 Langevin 方式の開発に関する研究をしていた米国の Cady<sup>2)</sup> は、1922年「The Piezoelectric Resonator」と題する論文を発表し、水晶体の固有振動と圧電気現象を結びつけて高安定な高周波源の実現への端緒を切り開いた。翌1923年 Pierce<sup>3)</sup> は、Cady の研究をさらに発展させて水晶を用いたいわゆる Pierce 発振回路を完成させた。周知のように Pierce 回路は、その高安定発振源としてエレクトロニクスの分野で不朽の発明の一つと数えられている。しかし当時使われていた水晶振動子は、電気軸に垂直に切り出された X-板や、機械軸に垂直に切り出された Y-板であったため、周波数温度特性の面では必ずしも充分満足すべきものではなかった。1932年 Koga とその門弟の Syoyama および Takagi 等<sup>4)</sup>の研究によって、零周波数温度係数をもつ R<sub>1</sub>-板ならびに R<sub>2</sub>-板水晶振動子が発見され、同時に Koga<sup>5)</sup>は平面弾性波による厚み振動理論を完成させた。ややおくれて独の Bechmann<sup>6),7)</sup>も、R<sub>1</sub>-板、R<sub>2</sub>-板に相当する切り出し角を独立に発見した。

特に R<sub>1</sub>-板振動子は、その純粋な厚みすべりモードに起因する幾多の利点を備え、現在最も優秀な短波帯の振動子の一つである。しかしながらそれは巾広い温度領域にわたって零周波数温度係数とならないし、また内在する副振動の発生もあり、より安定な発振源への期待に大きな障害となっている。

本研究は、巾広い温度領域で周波数温度係数が零となるような切り出し角を見つけることを最終的目標としており、その方法論について報告し、特に経験的に発見されている R<sub>1</sub>-板と R<sub>2</sub>-板の切り出し角がその方法によって求められることを示す。そしてこれら二つの板の周波数温度特性が理論的に算出できることを示し、その結果を報告する。

## 2. 圧弾性体内を伝播する平面波

圧電的性質をもつ弾性体結晶の弾性振動に対する運動方程式は、次の如く表わされる。

\* 電気工学教室 助教授

\*\* 大学院修士課程

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} + T_{ij}^P), \quad (i=1, 2, 3). \quad (2-1)$$

ただし

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &: \text{直角座標}, & u_1, u_2, u_3 &: \text{変位ベクトル成分}, \\ \rho &: \text{結晶密度}, & t &: \text{時間}, \\ T_{ij} &: \text{弾性応力テンソル成分} \quad (T_{ij}=T_{ji}), \\ T_{ij}^P &: \text{圧電的応力テンソル成分} \quad (T_{ij}^P=T_{ji}^P). \end{aligned}$$

Hooke の法則から、弾性応力テンソル成分  $T_{ij}$  はひずみテンソル成分  $e_{kl}$  によって次の如く結びつけられる。

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} e_{kl}, \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (2-2)$$

ここで  $c_{ijkl}$  は弾性定数テンソルの成分である。またひずみテンソル成分  $e_{kl}$  は変位と次の式によって定義される。

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right), \quad (k, l, =1, 2, 3). \quad (2-3)$$

したがって弾性応力テンソル成分  $T_{ij}$  は

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} c_{ijkl} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (2-4)$$

となる。一方圧電的応力テンソル成分  $T_{ij}^P$  は、圧電的内部電界ベクトルを  $(E_1, E_2, E_3)$  とすれば

$$T_{ij}^P = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mij} E_m, \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2-5)$$

で表わされ、ここで  $\varepsilon_{mij}$  は圧電定数テンソルの成分である。内部電界は分極によって生じ、分極はひずみによって圧電的に発生していることを考えれば

$$E_m = 4\pi \sum_{n=1}^3 \gamma_{mn} P_n \quad (2-6)$$

$$P_n = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{nkl} e_{kl} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} \varepsilon_{nkl} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (2-7)$$

と書くことができる。ここで  $P_n$  は分極ベクトル成分、 $\gamma_{mn}$  は逆感受率テンソル成分である。したがって圧電的応力テンソル成分は変位によって表わすことができ、

$$T_{ij}^P = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 2\pi \varepsilon_{mij} \gamma_{mn} \varepsilon_{nkl} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (2-8)$$

となる。(2-4), (2-8)の各式を(2-1)式に代入することによって, 運動方程式は変位について次のように求まる.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left( \frac{1}{2} c_{ijkl} + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 2\pi \varepsilon_{mij} \gamma_{mn} \varepsilon_{nkl} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right\},$$

$$(i=1, 2, 3). \quad (2-9)$$

いま(2-9)の方程式の解として次のような平面波を仮定する.

$$u_i = u_i^0 \cdot \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (s - vt) \right], \quad (i=1, 2, 3). \quad (2-10)$$

ただし

$u_i^0$ : 振巾,  $\lambda$ : 波長,  $v$ : 波の伝播速度,  $s = \sum_{a=1}^3 l_a x_a$  は平面,  $(l_1, l_2, l_3)$  は波の伝播ベクトルの方向余弦,  $j \equiv \sqrt{-1}$ .

(2-10)式を(2-9)式に代入して,  $u_1^0, u_2^0, u_3^0$ の各振巾が同時に零とならない要請から, 固有値  $c$  について次の永年方程式が得られる.

$$\begin{vmatrix} A-c & F & E \\ F & B-c & D \\ E & D & C-c \end{vmatrix} = 0. \quad (2-11)$$

ただし  $c = \rho v^2$  で, また  $A \sim F$  は,  $c_{ijkl}, \varepsilon_{mij}, \gamma_{mn}$  および  $(l_1, l_2, l_3)$  によって決定される定数である.(2-11)式を解くことにより, 一般の圧弾性結晶内を任意の  $(l_1, l_2, l_3)$  方向に伝播する平面波の速度が得られる. また(2-11)の永年方程式の対称性により, 速度は三種類実在し, 一つが縦波の, 他の二つが横波の速度で, さらにそれらの速度に対する変位は互いに直交することが証明されている.

### 3. 固有周波数とその温度特性

圧弾性結晶から平板を切り出し, その厚さ  $d$  の方向余弦を  $(l_1, l_2, l_3)$  とする. ただし厚さは, 平板の輪かく寸法に比べて充分薄いものとする. 切り出したこの平板の厚さ方向に平面波が伝播する時, その速度は(2-11)式の解で与えられ, 定在波が生じる. このとき平板は, 三つの速度のそれぞれに対し, 次のような固有周波数

$$f_i = \frac{q}{2d} v_i \quad (i=1, 2, 3; \quad q \text{ は整数}) \quad (3-1)$$

をもつ. この三つの周波数は, 一つが厚み縦振動周波数であり, 他の二つは厚みすべり振動周波数である.

さて(3-1)式中の厚さ  $d$  は, 温度及び厚さの方向によって変化する. また速度  $v_i$  は(2-11)式の解であるが,  $A \sim F$  が, 厚さの方向余弦  $(l_1, l_2, l_3)$  及び温度  $T$  の関数である  $c_{ijkl}$ ,

$\epsilon_{mij}$ ,  $\gamma_{mn}$  によって決定されるので, この速度  $v_i$  も  $T$ ,  $(l_1, l_2, l_3)$  によって変化する. つまり平面板の固有周波数は, 温度と切り出し方位とに依存するのである. 方向余弦は直交座標系において, 二つの方位角  $(\varphi, \theta)$  によって決定できる. したがって固有周波数は  $T, \varphi, \theta$  の関数となる. いま周波数を温度  $T=T_0$  の近傍で Taylor 展開し, 高次の係数は次数が充分小さいので無視して三次近似で表わすと

$$f(\varphi, \theta, T) \doteq f(\varphi, \theta, T_0) \left\{ 1 + \alpha(T - T_0) + \beta \frac{(T - T_0)^2}{2} + \gamma \frac{(T - T_0)^3}{6} \right\} \quad (3-2)$$

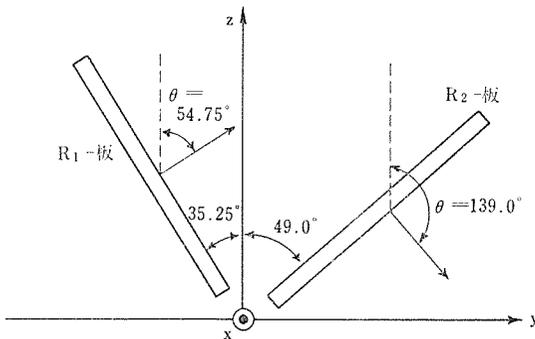
となる. ただし各次の係数は次の式で表わされる.

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[ \frac{\partial f}{\partial T} / f \right]_{\varphi, \theta, T_0}, \\ \beta &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} / f \right]_{\varphi, \theta, T_0}, \\ \gamma &= \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial T^3} / f \right]_{\varphi, \theta, T_0}. \end{aligned} \quad (3-3)$$

我々は, 弾性定数, 圧電定数, 逆感受率の温度による変化を定量化することにより, (3-3) 式の各係数  $\alpha, \beta, \gamma$  をある方位角  $(\varphi, \theta)$  に対して決定することができる. 良好な周波数温度特性を有する平面板振動子は, これらの係数  $\alpha, \beta, \gamma$  が零か零に近い値をもつであろうと予想できる.

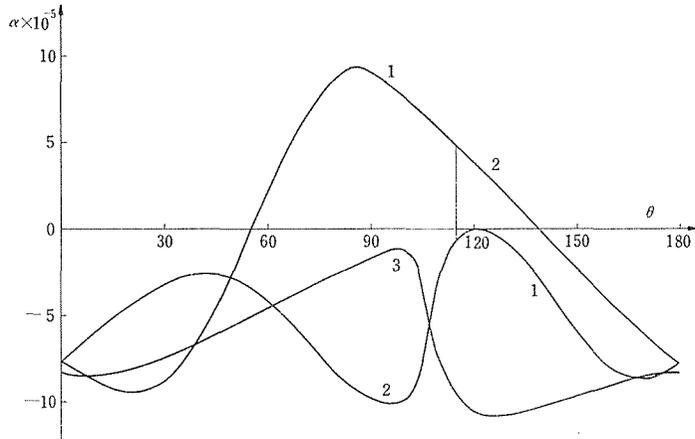
#### 4. $R_1$ -板, $R_2$ -板の周波数温度特性

$R_1$ -板,  $R_2$ -板は, それぞれ厚みすべり振動を利用した良好な周波数温度特性を有する振動子としてすでに実用化されている. 筆者らは, Koga ならびに Aruga 等<sup>8), 9), 10)</sup> の測定した弾性定数, 圧電定数, 逆感受率の温度特性を数量化し, 2 節, 3 節で述べた理論によって, 特に  $R_1$ -板,  $R_2$ -板の周波数温度特性について, 理論的に解析してみたのでその結果を報告する.



第1図  $R_1$ -板,  $R_2$ -板振動子の切り出し角

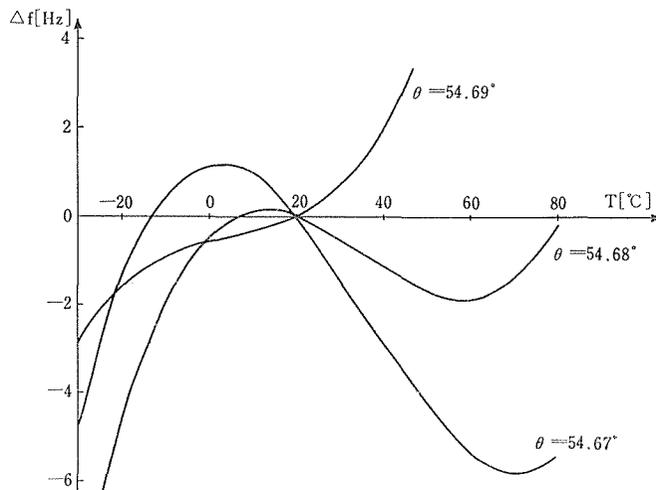
$R_1$ -板,  $R_2$ -板は, 第1図に示した角度によって水晶から切り出された平面板である. したがって板の法線方向余弦を与える方位角は一般に,  $R_1$ -板は  $\varphi=90^\circ$ ,  $\theta=54.75^\circ$ ,  $R_2$ -板は  $\varphi=90^\circ$ ,  $\theta=139.0^\circ$  である. (3-3) 式の各係数は,  $T_0$  を定めれば  $\varphi$  と



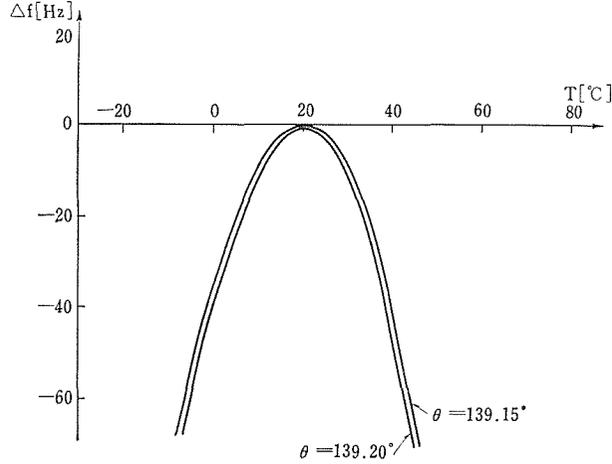
第2図  $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=90^\circ$  の時の  $\alpha-\theta$  曲線

第1表  $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=90^\circ$  のときの  $\theta$  に対する周波数と係数の計算値

	$\theta$	frequency at $20^\circ\text{C}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
	$[\circ]$	$[\text{Hz}]$	$[\circ\text{C}]^{-1}$	$[\circ\text{C}]^{-2}$	$[\circ\text{C}]^{-3}$
$R_1$ 板	54.67	$1.66053 \times 10^6$	$-7.0579 \times 10^{-8}$	$-2.5610 \times 10^{-9}$	$+1.5606 \times 10^{-10}$
	54.68	$1.66051 \times 10^6$	$-2.0704 \times 10^{-8}$	$-2.4666 \times 10^{-9}$	$+1.5637 \times 10^{-10}$
	54.69	$1.66049 \times 10^6$	$+2.9172 \times 10^{-8}$	$-2.3722 \times 10^{-9}$	$+1.5668 \times 10^{-10}$
$R_2$ 板	139.15	$2.54260 \times 10^6$	$+6.6450 \times 10^{-8}$	$-7.9579 \times 10^{-8}$	$-9.7518 \times 10^{-10}$
	139.18	$2.54273 \times 10^6$	$+4.7490 \times 10^{-9}$	$-7.9697 \times 10^{-8}$	$-9.7561 \times 10^{-10}$
	139.20	$2.54280 \times 10^6$	$-3.6383 \times 10^{-8}$	$-7.9776 \times 10^{-8}$	$-9.7589 \times 10^{-10}$
	113.611	$2.31410 \times 10^6$	$+5.3043 \times 10^{-5}$	$-2.4893 \times 10^{-7}$	$-6.3218 \times 10^{-6}$
	113.612	$2.31410 \times 10^6$	$-8.6187 \times 10^{-6}$	$-1.2784 \times 10^{-6}$	$+3.1821 \times 10^{-5}$



第3図(a)  $R_1$ -板振動子の周波数温度特性



第3図(b)  $R_2$ -板振動子の周波数温度特性

$\theta$  の関数である。  $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=90^\circ$  とし,  $\theta$  を  $0^\circ\sim 180^\circ$  まで変えた時の一次係数  $\alpha$  の値を計算した結果, 第2図の如きグラフが得られた。3本の曲線は, (3-1)式のそれぞれの周波数に対する  $\alpha$  の変化を示している。図中の  $\theta=115^\circ$  付近の縦線は,  $\alpha$  の値がこの線に沿って変化していることを示している。グラフから  $\theta=55^\circ, 139^\circ, 115^\circ$  の近傍で,  $\alpha$  が零に近い値をもつことがわかる。 $\theta=55^\circ$  は  $R_1$ -板,  $\theta=139^\circ$  は  $R_2$ -板の切り出し角とほとんど一致している。 $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=90^\circ$  としたとき,  $\alpha \neq 0$  となる  $\theta$  のわずかな変化に対する  $\alpha, \beta, \gamma$  の計算値を第1表に示す。これらの値を(3-2)式に適用し, 温度  $T$  に対する周波数  $f$  の変化をグラフに示すと第3図の如くなる。縦軸は  $T=20^\circ\text{C}$  の周波数との差, すなわち  $\Delta f = f(T) - f(20)$  をとっている。これらが, 周波数温度特性を理論的に求めたものである。

## 5. む す び

以上, 圧弾性振動子の周波数温度係数  $\alpha, \beta, \gamma$  を数値解析によって求める一般的な方法論を展開した。特に厚みすべりモードの水晶振動子のうち,  $R_1$ -板,  $R_2$ -板の精確な切り出し設計角を理論的に算出した。

なお, この解析方法を用いて, 従来にない零周波数温度係数をもつ振動子板を見つけることができることがわかった。

終りに, 本研究遂行のため御指導戴いた東京工業大学の福与人八先生に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) J. et P. Curie : Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées, Comptes Rendus, 91, pp.294-295, 1880.
- 2) Cady, W.G. : The Piezoelectric Resonator, Proc. IRE, 10, pp.83-114, 1922.

- 3) Pierce, G. W. : Piezoelectric Crystal Resonators and Crystal Oscillators Applied to the Precision Calibration of Wavemeters, Proc. AAAS, 59, pp.81-106, 1923.
- 4) 古賀, 高木 : 水晶の弾性定数の温度係数, 電学誌, 53, p.1141, 1933.
- 5) I.Koga : Thickness Vibration of Piezoelectric Oscillating Crystals, Physics, 3, pp.70-80, 1932.
- 6) Bechmann, R. : Piezoelectrische Quarzoszillatoren mit beliegem Temperaturkoeffizienten, insbesondere dem Wert Null, Die Naturwissenschaften p,752, 1933.
- 7) Bechmann, R. : Investigation on the Elastic Vibrations of Piezoelectrically Excited Quartz Plates, Z.S. tech. Ph. 16, pp.525-528, 1935.
- 8) 古賀, 有賀 : 水晶の断熱弾性定数の決定, 信学誌, 36, No.4, p.13, 1953.
- 9) 有賀 : 水晶の断熱弾性定数とその温度特性について, 東京工大学報, No.2, 1956.
- 10) I.Koga, M.Aruga : Theory of Plane Elastic Waves in a Piezoelectric Crystalline Medium and Determination of Elastic and Piezoelectric Constants of Quartz, Phys. Rev., 109, pp.1467-1473, 1958.

### Summary

#### Dependence of Frequency-Temperature Characteristics upon Cutting Angles of Quartz Crystal Oscillators

Mitsuo NAKAZAWA and Hiroshi MATSUZAKA

(Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering)

The purpose of this work is to find the cutting angle of a quartz crystal oscillator that has zero-frequency-temperature-coefficient over a wide range of temperature.

This paper describes the theoretical method to seek for such a cutting angle from a general single crystal. And this paper shows that by means of this method we can find both the angles of  $R_1$ -plate and  $R_2$ -plate which have already been practical, and that we can guess the frequency-temperature characteristics of those crystal oscillators.