最大乱子の寿命時間と通過時間

余　越　正一郎*

(昭和46年5月31日受理)

1　まえがき

乱流拡散は本質的に Lagrange 流の概念である．しかし，Lagrange 流の乱れの統計的特性の研究は Euler 流のそれにくらべて理論的にも実験的にも著しく困難である．理論的にいえば，それは高度に非線型な Lagrange の運動方程式を取扱うことになり，実験的には時々刻々の流体粒子の位置を追跡することである．したがって，Lagrange 流の乱れの統計的特性を Euler 流のそれによって記述することができれば非常に便利である．この問題は Euler-Lagrange 問題といわれ，乱流統計理論の最も根本的な問題の1つであるが，一般的な問題としてはいまだ解決されていない[1]．

Taylor[2] が一様乱流場における流体粒子の変位の2乗平均を表わすさいに Lagrange 相関なる概念を導入して以来，特に連続固定源型の拡散においては Lagrange 流の乱子速度とか乱子の寿命時間などが決定的な要素であることが明らかになった．定常一様乱流においては，乱子速度は Euler 流にみても Lagrange 流にみても等しいので[1]，Lagrange 流にみた乱れの時間スケールである寿命時間と Euler 流にみた乱れの時間スケールである通過時間との関係さえわかっておれば，Euler 流の測定から拡散場の特性を理解することができる．

本文は大型実験用開水路の自由水面近傍における Euler および Lagrange 流の乱流特性の同時測定から，最大乱子の寿命時間と通過時間との関係を明らかにしたものである．さらに，この結果を用いて中間乱子領域における Lagrange 相関係数の普遍定数の推定も行った．

2　開水路乱れにおける中間乱子領域

一般に河川の鉛直乱流場のレイノルズ数は 10^6 以上にも達するという現実[3]，乱れのスペクトルの幅が Euler 流にみればレイノルズ数の3/4乗にほぼ等しく，Lagrange 流にみればレイノルズ数のほぼ1/2乗に等しいという Landau と Lifshitz の結果[4]，および，Kolmogorov のスペクトルの $-5/3$ 乗則が予想外に広い波数範囲にまで成立するという多くの観測結果[5]などを考えあわせて，レイノルズ数の大きな河川乱流場の Euler 相関係数 $R_E(t)$ および Lagrange 相関係数 $R_L(\tau)$ を Kolmogorov の局所等方性乱流理論[4]の拡張解釈から次のように仮定することにする．

$$2\,\overline{u_E'^2}(1-R_E(t)) = \begin{cases} C_E(\bar{\varepsilon}\bar{u}t)^{2/3} : t \leq t_0 \\ 0 \qquad\qquad : t > t_0, \end{cases} \tag{1}$$

*　土木工学教室　助教授

$$2\,\overline{u_L'^2}(1-R_L(\tau))=\begin{cases}C_L\,\bar{\varepsilon}\,\tau & :\tau\leq\tau_0\\ 0 & :\tau>\tau_0\end{cases} \tag{2}$$

添字E，Lはそれぞれ Euler 流および Lagrange 流の量であることを示すものとして，$\overline{u'^2}$ は乱れの速度で最大乱子の乱子速度に相当し，Cは普遍定数，$\bar{\varepsilon}$は乱流エネルギー逸散密度の平均で，

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\,\nu\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2}, \tag{3}$$

である．νは動粘性係数．また，$\bar{u}$は平均流速，tとτは乱子の通過時間と寿命時間，t_0とτ_0は最大乱子の通過時間と寿命時間である．

(1)，(2)式についてさらに述べれば，せん断乱流場において，スケールの大きな乱子は平均流速より遅く流下しているわけであるが[6]，(1)式では Taylor の凍結乱流の仮定を用いている．また，最大乱子の寸法をL，最小乱子の寸法をηとすれば，河川においては水深をHとして，$L\approx 10H$，$\eta=(\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}\approx 10^{-2}$cm であり[3]，一般に $L>>>\eta$ であるから，最大乱子の通過時間 $t_0=L/\bar{u}$ にくらべて最小乱子の通過時間 $\eta/\bar{u}$ は無視してある．同様に(2)式において最小乱子の寿命時間 $\tau_\eta=(\nu/\bar{\varepsilon})^{1/2}\approx 10^{-1}$sec も最大乱子の寿命時間 $\tau_0=L/\sqrt{\overline{u_L'^2}}$ にくらべて無視してある．

さて，Euler 流および Lagrange 流の積分時間スケール (integral time scale) を，

$$T_E=\int_0^\infty R_E(t)\,dt, \tag{4}$$

$$T_L=\int_0^\infty R_L(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

で定義すると，(1)，(2)式を用いて，

$$T_E=t_0\left[1-\frac{3C_E}{10}\frac{(\bar{\varepsilon}\bar{u}\,t_0)^{2/3}}{\overline{u_E'^2}}\right], \tag{6}$$

$$T_L=\tau_0\left[1-\frac{C_L}{4}\frac{\bar{\varepsilon}\tau_0}{\overline{u_L'^2}}\right], \tag{7}$$

となる．また，最大乱子の通過時間と寿命時間は，(1)，(2)式から，

$$t_0=\left(\frac{2}{C_E}\right)^{3/2}\frac{(\overline{u_E'^2})^{3/2}}{\bar{\varepsilon}\bar{u}}, \tag{8}$$

$$\tau_0=\frac{2}{C_L}\frac{\overline{u_L'^2}}{\bar{\varepsilon}}, \tag{9}$$

したがって，$T_E=(2/5)t_0$，$T_L=(1/2)\tau_0$ となり，

$$T_L/T_E=(5/4)(\tau_0/t_0), \tag{10}$$

がえられる.

定常一様乱流では Euler 流の乱子速度と Lagrange 流の乱子速度とが等しいので[1], $\overline{u'^2}=\overline{u_L'^2}=\overline{u_E'^2}$ として, (8), (9), (10) より

$$\frac{T_L}{T_E}=\frac{\alpha}{i}, \tag{11}$$

ここに i は乱れの強さで　$i=(\overline{u'^2})^{1/2}/\bar{u}$, また

$$\alpha=\frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{C_E{}^{3/2}}{C_L}, \tag{12}$$

で, α は普遍定数である.

(11) 式の関係は Kofoed-Hansen and Wandel[7] が与えた表示と一致する. また, Philip[8] は $T_L/T_E\approx\sqrt{1+i^2}/i$ なる関係を導びいているが, 現実の i の範囲では (11) 式とほとんどかわりない.

(12) の α の値が求まれば, 通過時間と寿命時間の関係が明らかになる.

3　実験による α の決定

流れの場が一様であるとすれば, 1つの流体粒子がある点を出発して t 時間後に到達する距離 $X(t)$ は[9],

$$\overline{|X(t)-\overline{X}|^2}=2\,\overline{u_L'^2}\int_0^t(t-\tau)\,R_L(\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

であり, 特に　$t\gg T_L$ の場合には,

$$\overline{|X(t)-\overline{X}|^2}=2\,\overline{u_L'^2}\,T_L t, \tag{14}$$

となる. $\overline{X}=\bar{u}t$ である. したがって, 多数の流体粒子の追跡から拡散係数 $\overline{u_L'^2}T_L$ の決定が可能となるので, Euler 流の測定から求めた乱れの速度 $\overline{u_E'^2}$ を $\overline{u_L'^2}$ に等しいとおくことで T_L が決定できる. (13) を (14) で表らわすことの精度は (2) を (14) に代入することにより求められる. すなわち,

$$\overline{|X(t)-\overline{X}|^2}/2\,\overline{u_L'^2}\,T_L t=1-\frac{1}{3}\frac{\tau_0}{t}, \tag{15}$$

となる.

ここでは, 測定の便宜上, 特定の時間 t に流体粒子が流下する距離を測定する代りに, 特定の距離 X_0 を流下するに要する時間 t の測定をすることにする. すなわち, (14) の代りに

$$\overline{|X-\overline{X}|^2}\approx\overline{|(X_0/t)\,\bar{t}-(X_0/t)\,\bar{t}|^2}, \tag{16}$$

とおけるものと考え，多くの測定を繰返すことによって，

$$\overline{u_L'^2}T_L=(X_0^2/2\bar{t})\,\overline{|(\bar{t}/t)-1|^2}, \tag{17}$$

なる量を求めることができる．$\bar{t}$ は t の平均である．

一方，Euler 流の測定について考えると，観測時間 T_* の測定から求めた乱れ速度を $(\overline{u_E'^2})_{T_*}$，積分時間スケールを $(T_E)_{T_*}$ とすれば，小倉によると[10]，

$$(\overline{u_E'^2})_{T_*}/\overline{u_E'^2}=1-\frac{2}{T_*^2}\int_0^{T_*}(T_*-t)\,R_E(t)\,dt, \tag{18}$$

また，$t \ll T_*$ のときは，

$$\begin{aligned}\overline{(R_E(t))_{T_*}}&=\frac{R_E(t)-A(T_*)}{1-A(T_*)},\\ A(T_*)&=\frac{2}{T_*^2}\int_0^{T_*}(T_*-t)\,R_E(t)\,dt,\end{aligned} \tag{19}$$

であるから，(1)を用いて，

$$(\overline{u_E'^2})_{T_*}/\overline{u_E'^2}=1-\frac{4}{5}\frac{T_0}{T_*}, \tag{20}$$

$T_* \gg T_0$ では，

$$(T_E)_{T_*}/T_E=\left(1-\frac{4}{5}\frac{T_0}{T_*}\right)^{3/2} \tag{21}$$

となる．

河川における観測結果によれば[3]，

$$T_E \approx (3/2)\,H/\bar{u}, \tag{22}$$

また Hay and Pasquill[11] によれば $T_L \approx 4T_E$ であるから，今回実施する実験を考えて水深 $H=30$ cm，平均流速 $\bar{u}=20$ cm/sec とすると，(17)から浮子の流下距離を40m，(21)から流速計による観測時間を3分間とすれば4％程度の誤差で実験が行なえることがわかる．

4 実験の装置および方法

実験に用いた水路は京都大学防災研究所の河川災害総合基礎実験施設[12]の河道部で，深さ1.5m，幅7.5m，有効長243mの長方形断面コンクリート製水路である．流量はあらかじめ設定したプログラムに従って 0～750 l/sec の範囲に調節できる．

Euler 流の乱れ速度の測定には時間差方式の超音波流速計[13]を用いた．受感部の寸法は

大体流れ方向に 2.8 cm，横方向に 2.1cm である．流速の測定範囲は 0 ～±150 cm/sec で，そのときの電圧出力は 0 ～±3V である．

Lagrange 流の測定には直径 1.6cm のプラスチック製の球形浮子を用いた。浮子全体が丁度水中につかり，しかも水面にほぼ接して浮くように重さを調節したものである．

実験は水路上流端から 50m および 90m の 2 ケ所に測線を設け，この間の $X_0=40$m の区間における浮子の流下時間を測定した．浮子は上流側測線の上流 5 m の水路中央に投入し，2 つの測線を通過する時をペンレコーダー上にパルスとして記録し，その間隔から流下時間を求めた．平均操作を行なうための浮子の流下回数は 100 回とした．

一方，Euler 流の測定は測線間の中央の水路中央で，水路上を走行する測定台車から超音波流速計によって行った．観測時間は 3 分間とし，記録は遮断周波数 10Hz のローパスフィルターを通した後 FM データーレコーダに集録した．これを 1/6 秒間隔で AD 変換して電子計算機で統計処理した．流速計の受感部の設置深度は浮子の重心が通過する位置に一致させるべきであるが，そのように浅いと表面波の影響が入ってきて好ましくない．このときの流速変動のスペクトルをみると，表面波の周波数に相当する約 (3/2) Hz のところに大きなエネルギー集中がみられた．したがって，受感部は波の影響がほとんどなくなる水面下 2 cm に設定した．このとき，流速変動のスペクトルには −5/3 乗則の成立がみられ，それは河川の水面近傍における測定の場合と同様であった[3]．

なお，浮子の寸法および流速計の寸法が測定結果に与える影響を調らべてみると次のようである．浮子による平均化の時間スケールを s とすれば，この浮子によってえられる乱れ速度 $(\overline{u_L'^2})_s$ は，

$$(\overline{u_L'^2})_s = \frac{2\overline{u_L'^2}}{s^2}\int_0^s (s-\tau)\,R_L(\tau)\,d\tau \tag{23}$$

また Lagrange 相関係数 $(R_L(\tau))_s$ は，

$$(R_L(\tau_s)) = \frac{\overline{u_L'^2}}{(\overline{u_L'^2})_s\cdot s^2}\int_0^s (s-\xi)\left[R_L(\tau-\xi)+R_L(\tau+\xi)\right]d\xi, \tag{24}$$

であるから[10]，これらに (2) を代入して計算すれば，

$$(\overline{u_L'^2})_s\,(T_L)_s = \overline{u_L'^2}\,T_L, \tag{25}$$

となり，拡散係数には浮子の寸法は影響しないことがわかる．また，Euler 流の乱れ特性にたいする流速計受感部の影響は，(23)，(24) 式の Lagrange 流の量にかえて (1) 式を用いて計算すると，

$$(\overline{u_E'^2})_s/\overline{u_E'^2} = 1-\frac{9}{20}\left(\frac{s}{t_0}\right)^{2/3}, \tag{26}$$

$$(T_E)_s/T_E = \left[1-\frac{9}{20}\left(\frac{s}{t_0}\right)^{2/3}\right]^{-1}, \tag{27}$$

となる．ここに受感部の寸法を d とすれば $s=d/\bar{u}$ である．まえと同じように $H=30$ cm,

$\bar{u}$=20 cm/sec とし，$d=3$ cm とすれば，流速計の寸法が Euler 流の乱れ特性に及ぼす影響は4％以内となり，前に示した観測時間の影響とよく調和していることがわかる．

5 実験結果および考察

実験は2種類の流量で行った．流量 556 l/sec の場合を実験A，流量 278 l/sec の場合を実験Bとよぶことにする．実験時の水理学的条件を表1に示す．

Table 1. Hydraulic data for experiments.

Test series	Depth of water H(cm)	Mean velocity $\bar{u}$(cm/sec)	Reynolds number	Froude number
A	36.1	25.8	9.3×10^4	0.14
B	30.1	16.9	5.1×10^4	0.098

次に Lagrange 流の浮子の流下実験の結果を表2に示す．表中 $\bar{t}$ は浮子が X_0=40m を流下するに要する時間の100回の平均値，$\overline{t'^2}$ はその分散値である．

Table 2. Lagrangian characteristics by longitudinal diffusion.

	$\bar{t}$ (sec)	$\overline{t'^2}$ (sec^2)	Skewness	Kurtosis	$\overline{\|(\bar{t}/t)-1\|^2}$	$\overline{u_L'^2}\,T_L$ (cm^2/sec)
A	155	17.3	0.43	3.3	7.06×10^{-4}	36.9
B	236	32.8	0.27	3.1	5.83×10^{-4}	19.7

表中の歪度および尖度は正規分布の0および3に近いことがわかる．また，この実験で下流測線に浮子が到達したときの横方向の浮子の分布を示したのが表3である．Yは幅750 cmの水路側壁から測った下流測線における浮子の横断方向の位置で，$\bar{Y}$はその平均，$\overline{Y'^2}$ は分散である．流れが完全に一様ならば $\bar{Y}$=750/2 cm である．

Table 3. Lagrangian characteristics by lateral diffusion

	$\bar{Y}$ (cm)	$\overline{Y'^2}$ (cm^2)	Skewness	Kurtosis
A	381	6263	−0.14	3.3
B	362	8942	−1.6	6.8

なお，浮子が X_0 を流下するに要する時間 t と，下流測線上における横断方向の変位 Y との間の相関係数を計算してみると，実験Aでは0.21，実験Bでは −0.066であった．これからみて，浮子の流下は非常にランダムに行なわれていることがわかる．

次に超音波流速計による Euler 流の測定結果および，これと Lagrange 流の測定結果とから計算した α の値を表4に示す．

Table 4.　Eulerian characteristics and Eulerian-Lagrangian relation.

	$\bar{u}$ (cm/sec)	$\sqrt{\overline{u'^2}}$ (cm/sec)	T_E (sec)	i	α
A	25.8	1.57	2.32	0.0609	0.393
B	16.9	0.907	3.00	0.0537	0.428

Euler 流の特性はA，Bともに観測時間 $T_*=3$ min の測定を3回行った平均である．

表4より α の平均を求めると 0.41 なる値がえられる．この値は Wandel and Kofoed-Hansen の理論値[7] $\sqrt{\pi}/4=0.44$ や Philip の理論値[8] ともよく一致している．また大気乱流における各種の観測結果[14]ともそんなに違わない．本研究と比較しうるものとしては，幅 2.2m の開水路でレイノルズ数 2×10^4 の流れにおいて直径 9 mmの浮子を流下させた Engelund[15]の実験がある．それによると $\alpha=0.4$ である．

これらの結果を考えあわせてみると，$\alpha\approx0.4$ なる値は一般の3次元的な乱流場においても，水面のような2次元的な乱流場においても同じように成立するということがわかり，非常に興味深い．

最後に，ここでえられた $\alpha=0.41$ なる値と，(12)式の関係とから Lagrange 相関係数の普遍定数 C_L の値を推定してみる．Euler 相関係数の普遍定数 C_E の値は大気や海洋における多くの測定結果や河川における測定結果[5]から $C_E\approx1.9$ なる値がえられているので，(12)式を用いると $C_L\approx5.5$ という値がえられる．この $C_L\approx5.5$ なる値は中間乱子領域のスケールの大きなところで Lagrange 特性と Euler 特性のマッチングを行ってえられたものであるが，Corrsin[16]は最小乱子のスケールにおける Euler 特性と Lagrange 特性のマッチングから $C_L\approx1$ をえている．この定数の正確な値は Lagrange 流の乱流特性の正確な測定をまたねば決まらないであろう．開水路の水面で浮子を追跡して Lagrange 相関を求めたものとしては岩佐，今本[17]の研究があり，それによると (2) 式に相当する Lagrange スペクトルの－2乗則の成立がみられる．しかし，研究の目的が違うのでその結果から C_L の決定を行なうことはできない．

6 む　す　び

レイノルズ数が非常に大きな流れにおいては，乱れのスペクトルは中間乱子領域の両端でするどく切断されたものを考えてもよいであろう．そうして，中間乱子領域では Kolmogorov の局所等方性乱流理論が十分成立するであろう．このような考えのもとに，Lagrange 流の積分時間スケールと Euler 流の積分時間スケールの比 T_L/T_E を求めると，T_L/T_E は乱れの強さに反比例し，その比例定数は Lagrange 流および Euler 流の構造函数の普遍定数によって決まることがわかった．

そこで，大型実験用開水路における Lagrange および Euler 流の乱流特性の同時測定から比例定数を求めると0.41なる値がえられた．この値は大気乱流における測定結果などともよく一致している．したがって，この値を用いることによってLagrange流の乱流拡散特性を Euler 流の乱流特性から導びくことが可能となった．しかし，さらに精度のよ

い値をえるためには，やはり浮子の時々刻々の運動を追跡して Lagrange 相関を実測することが必要であろう．

本文の一部分は昭和43年度土木学会年次学術講演会で発表したものである。

参考文献

1) Lumley, J. L., An approach to the Eulerian-Lagrangian problem, J. Math. Phys., 3(2), 309, (1962).

2) Taylor, G. I., Diffusion by continuous movements, Proc. London Math. Soc., A, 20, 196, (1921).

3) Yokosi, S., The structure of river turbulence, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., 17(2), 1, (1967).

4) Монин, А. С. и Яглом, А. М., Статистическая Гидромеханика, часть2, (Москва), (1967).

5) 余越正一郎，河川における乱流エネルギー逸散率について，京大防災研年報，11 **B**，191，(1968).

6) 石原安雄，余越正一郎，河川の乱流構造に関する一考察，京大防災研年報，13 **B**，323, (1970).

7) Wandel, C. F. and Kofoed-Hansen, O., On the Eulerian-Lagrangian transform in the statistical theory of turbulence, J. Geophys. Res., 67(8), 3089, (1962).

8) Philip, J. R., Relation between Eulerian and Lagrangian statistics, Phys. Fluids, 10, S69, (1967).

9) Kampé de Fériet, J. M., Les fonctions aléatoires stationaries et la théorie statistique de la turbulence homogène. Ann. Soc. Sci. (Bruxelles), 59, 145, (1939).

10) Ogura, Y., Relations between the length of time under analysis and the statistical quantities, J. Met. Soc. Japan., 30(3), (1952).

11) Hay, J. S. and Pasquill, F., Diffusion from a continuous sources in relation to the spectrum and scale of turbulence, Advances in Geophysics (Academic Press), Vol. 6, 345, (1959).

12) 矢野勝正，石原安雄，河川災害総合基礎実験施設について，京大防災研年報，12 **B**，237 (1969).

13) Ishihara, Y. and Yokosi, S., Ultrasonic flowmeters for measuring river turbulence, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., 18(3), 49, (1969).

14) Thomas, D. M. C., Lagrangian and Eulerian properties of turbulence, Quart. J. Roy. Met. Soc., 342, (1964)

15) Engelund, F., Dispersion of floating particles in uniform channel flow, J. Hydr. Div., ASCE, 95(4), 1149, (1969).

16) Corrsin. S., *Theories of turbulent dispersion, Mécanique de la Turbulence* (CNRS, Paris), 27, (1962).

17) Iwasa, Y. and Imamoto, H., Estimation of dispersion coefficients on free surface by means of particle simulation method, Mem. Faculty of Eng., Kyoto Univ., 30, 15, (1968).

Summary

Relations between Lagrangian and Eulerian Scales of Turbulence

Shōitirō YOKOSI
(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

Estimations of the relations between the Eulerian and Lagrangian scales were made in the large Reynolds number turbulence. With the Eulerian and Lagrangian structural functions approximated by their inertial subrange forms between the appropriate passage-time and life-time limits, it was found that

$$T_L/T_E=\alpha/i, \qquad \alpha=\frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{C_E{}^{3/2}}{C_L}$$

where

T_L is the Lagrangian integral time scale, equal to $\int_0^\infty R_L(\tau)\,d\tau$ where $R_L(\tau)$ is the Lagrangian correlation coefficient of particle velocity for time lag τ.

T_E is the Eulerian integral time scale defined similarly to T_L but in terms of the correlation coefficient $R_E(t)$ of eddy velocity at a fixed point.

i is the intensity of turbulence.

C_E is the universal constant of the Eulerian structural function, nearly equal to 1.9.

C_L is the universal constant of the Lagrangian structural function.

Simultaneous measurements of the Eulerian and Lagrangian properties of turbulence by an ultrasonic flowmeter and small particles floating on the surface of an open channel with uniform flow made it possible to estimate the value of α. The result was $\alpha\approx0.41$.