

弱い一様な乱れの理論 II

大 路 通 雄*

(昭和45年10月30日受理)

1. は し が き

前報¹⁾(以下 I と略記する)において, 著者は非圧縮流体の一様な乱れに対し, $(N+1)$ 点同時相関方程式およびこれと同等なスペクトル方程式の一般形をみちびき, さらに乱れが弱いとしてこれらの方程式系を乱れの Reynolds 数 R_0 の級数に展開するときの摂動の構造を明らかにした. その後, Hopf の汎関数形式²⁾を用いた同様な試みが Монин³⁾によって行なわれ, また Kawahara⁴⁾はこれらと独立に, いわゆる Burgers モデルについて減衰初期の解を R_0 の 4 次の項まで具体的に求めている.

このように, 弱い一様な乱れの理論は, 少なくとも原理的にはすでに確立されたもので, たとえば, ある時刻での乱れの統計的性質 (変動の分布汎関数, あるいはその逐次モーメントなど) を与えて以後の変化を知ること (初期値問題) は, 手数の問題にすぎないとも考えられる. しかし, 実際の手続きは近似を進めるにつれて加速度的に複雑となるから, その実行はかならずしも容易でなく, 従って解の性質や収束の程度, 理論の適用限界などもまだ十分には知られていない.

本来, I でも述べたように, 弱い乱れの問題は非線形現象としての乱れの本質に直接結びつくものとはいえないが, Reynolds 数による展開の可能性以外には特別な仮定なしに厳密な議論ができるという意味で, それ自身理論的な興味が期待されよう**. そこで I に引き続き摂動計算の具体例を系統的に示すために, さしあたり Burgers 乱れの初期値問題をいくつかの場合について全く解析的に取扱った. これらの実例はかなり限られた範囲のものであるけれども, R_0 の 2 次または 4 次の項まで "正確な" 結果を与えることによって展開級数の基本的な性格や問題点がある程度明らかとなったように思われる.

以下, 第 2 節で基本的な摂動級数の構成を I に準じて定式化し, 第 3 節で解析的な計算に便利な初期条件の関数形を示す. ついでこれらに対する級数解の詳細とその吟味を行なうが, 都合により本報では 2 次近似を中心に扱った. 他の部分とまとめは次報に述べる予定である.

2. 弱い Burgers 乱れの Reynolds 数展開

よく知られているように, Burgers モデルは定係数 ν をもつ非線形方程式

* 機械工学教室, 教授

** この事情は, 層流に対する Stokes 近似や Oseen 近似の場合といくらか似ている.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad u \equiv u(x, t) \quad (2.1)$$

で与えられる⁵⁾. これは Navier-Stokes 方程式を簡略にした“仮定の”数学的モデルであるが, 実在流体の場合にならって, x を位置, t を時間, u を速度, ν を(動)粘性係数と呼び, かつそれらはすべて実数とする*. 従って $u^2/2$ (単にエネルギーという)は常に正である.

このモデルは形が簡単なばかりでなく, NS 方程式とちがって厳密解^{6),7)}を許すことが大きな特色で, 最近の乱れの理論では特に注目されて多くの興味ある結果が得られている^{4),8)~14)}. いうまでもなく, 3次元乱れの力学には, たとえば圧力の作用のように方程式(2.1)に全く含まれていない要素もあるから, 内容の解釈には十分慎重でなければならぬが, 定性的にはある程度まで実在の乱れと似た傾向を示し, その限りで乱れの研究における Burgers モデルの効用は疑う余地がないであろう.

さて, (2.1)の両辺に ν^{-1} を乗じたのち, あらためて $\nu t \rightarrow \nu$, $\nu^{-1}x \rightarrow R$ とおき**,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

と書くと, R を Reynolds 数とみなした無次元表示に相当するので, この形から出発する. 乱れの一様性を仮定すれば, I; 6節と同様に, $(N+1)$ 点 $(N+1)$ 次同時キムラント

$$\langle u(x, t)u(x+r_1, t)\cdots u(x+r_N, t) \rangle^* \equiv q_N^*(r_1, \dots, r_N; t) \quad (2.3)$$

に対応するスペクトルは, その N 次元 Fourier 変換

$$\phi_N(k_1, \dots, k_N; t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} q_N^*(r_1, \dots, r_N; t) \exp(-i \sum_{S=1}^N k_S r_S) \prod_{S=1}^N dr_S \quad (2.4)$$

によって与えられ, また $(N+1)$ 点 $(N+2)$ 次縮退キムラントの場合には, これと別に“既約キムラント”

$$\langle u^2(x, t)u(x+r_1, t)\cdots u(x+r_N, t) \rangle^{**} \equiv q_N^{**}(r_1, \dots, r_N; t) \quad (2.5)$$

のスペクトルとして

$$\phi_N(k_1, \dots, k_N; t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} q_N^{**}(r_1, \dots, r_N; t) \exp(-i \sum_{S=1}^N k_S r_S) \prod_{S=1}^N dr_S \quad (2.6)$$

も定義できる. 肩符*, **の意味や引数の置換則については I; 3, 4節同付録参照. これら2通りのスペクトル ϕ と ϕ の関係は, 一般に I; (6.7)と同様

$$\phi_N(k_1, \dots, k_N; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{N+1}(k_1, \dots, k_N, k_{N+1}; t) dk_{N+1} + \gamma_N''(k_1, \dots, k_N; t) \quad (2.7)$$

* 複素 Burgers モデルについては, ここではふれない.

** 簡単のため, 以下 R_0 の代りに R と書く.

であって、ここに γ_N'' は 2 次から N 次までの ϕ スペクトルのあらゆる組合せ (それらの次数の和は $N+2$ にひとしい) に対する積和を表わす (I; 3, 4, 6 節).

特に, $N=1$ の場合

$$\phi_1(k_1; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(r_1; t) \exp(-ik_1 r_1) dr_1 \quad (2.8)$$

はエネルギー・スペクトル (正しくはその 2 倍) で,

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k_1; t) dk_1 \quad (2.9)$$

を与える. ところで, 乱れの一様性から速度 2 次相関 $q_1(r_1; t)$ について

$$q_1(r_1; t) = \langle u(x; t)u(x+r_1; t) \rangle = \langle u(x-r_1; t)u(x; t) \rangle = q_1(-r_1; t)$$

が成り立ち, これが実数であるためには

$$\phi_1(k_1; t) = \phi_1(-k_1; t) = \tilde{\phi}_1(k_1; t) \quad (2.10)$$

でなければならない (\sim は共役複素). すなわち, $\phi_1(k_1; t)$ は k_1 の実偶関数である. さらに, 当面の計算に必要な範囲の関係式として, (2.7) から逐次に

$$N=1: \phi_1(k_1; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k_1, k_2; t) dk_2, \quad (2.11)$$

$$N=2: \phi_2(k_1, k_2; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_3(k_1, k_2, k_3; t) dk_3 + 2\underbrace{\phi_1(k_1; t)\phi_1(k_2; t)}_{\gamma_2''(k_1, k_2; t)}, \quad (2.12)$$

$$N=3: \phi_3(k_1, k_2, k_3; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_4(k_1, k_2, k_3, k_4; t) dk_4 \\ + 2\underbrace{[\phi_1(k_1; t)\phi_2(k_2, k_3; t) + \phi_1(k_2; t)\phi_2(k_3, k_1; t) + \phi_1(k_3; t)\phi_2(k_1, k_2; t)]}_{\gamma_3''(k_1, k_2, k_3; t)}, \quad (2.13)$$

を得る. 簡単のため, $u(x, t) \rightarrow 0, u(x+r_s, t) \rightarrow S=1, 2, \dots$ のように各点の速度を対応する数字で代表させれば, $\phi_2(k_1, k_2; t), \phi_3(k_1, k_2, k_3; t), \phi_4(k_1, k_2, k_3, k_4; t)$ は, それぞれ

$$q_2(r_1, r_2; t) = \langle 012 \rangle = q_2^*(r_1, r_2; t), \quad (2.14)$$

$$q_3^*(r_1, r_2, r_3; t) = \langle 0123 \rangle - \langle 01 \rangle \langle 23 \rangle \\ - \langle 02 \rangle \langle 13 \rangle - \langle 03 \rangle \langle 12 \rangle, \quad (2.15)$$

$$q_4^*(r_1, r_2, r_3, r_4; t) = \langle 01234 \rangle - \langle 01 \rangle \langle 234 \rangle \\ - \langle 02 \rangle \langle 134 \rangle - \langle 03 \rangle \langle 124 \rangle - \langle 04 \rangle \langle 123 \rangle \\ - \langle 12 \rangle \langle 034 \rangle - \langle 13 \rangle \langle 024 \rangle - \langle 14 \rangle \langle 023 \rangle \\ - \langle 23 \rangle \langle 014 \rangle - \langle 24 \rangle \langle 013 \rangle - \langle 34 \rangle \langle 012 \rangle \quad (2.16)$$

の Fourier 変換にほかならない。

これらの準備のもとに、I; 5, 6 節と同じ手続きで一様な Burgers 乱れのスペクトル階級方程式をみちびくことができる。結果は (証明略)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2d_N\right)\phi_N(k_1, \dots, k_N; t) &= R\lambda_N(k_1, \dots, k_N; t); \\ \lambda_N(k_1, \dots, k_N; t) &= -\frac{\epsilon}{2} \sum_{\mathbf{C}}^{(N+1)} \sigma_N \phi_N(k_1, \dots, k_N; t), \end{aligned} \right\} N=1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

ただし,

$$\sigma_N = -(k_1 + \dots + k_N), \quad 2d_N = k_1^2 + \dots + k_N^2 + \sigma_N^2 \quad (2.18)$$

であり, $\sum_{\mathbf{C}}^{(N+1)}$ は記号下で $(N+1)$ 個の引数 $\{k_1, \dots, k_N, \sigma_N\}$ を次々に円置換して得られる $(N+1)$ 項について加え合わすことを意味する。この方程式は、3次元乱れに対する I; (6.16) または I; (7.7) 式に比べられるものである*。勿論、汎関数方程式から出発しても結果は変わらない(4次近似の場合について次報で例証する)。

いま、乱れが弱く R は小さいとして、 ϕ_N , λ_N , ϕ_N を R で展開したべき級数

$$\phi_N(k_1, \dots, k_N; t) = \sum_{S=0}^{\infty} R^S \phi_{N,S}(k_1, \dots, k_N; t) \text{ 等} \quad (2.19)$$

の形に仮定すれば、 R の各べきについて (2.7), (2.16) より

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2d_N\right)\phi_{N,0}(k_1, \dots, k_N; t) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2d_N\right)\phi_{N,S}(k_1, \dots, k_N; t) &= \lambda_{N,S-1}(k_1, \dots, k_N; t) \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \sum_{\mathbf{C}}^{(N+1)} \sigma_N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{N+1,S-1}(k_1, \dots, k_N, k_{N+1}; t) dk_{N+1} \right. \\ &\quad \left. + \gamma''_{N,S-1}(k_1, \dots, k_N; t) \right\}, \end{aligned} \right\} (S=1, 2, \dots) \quad (2.20)$$

を得る。原理的には、I; 7 節で述べた通り、初期条件として $t=0$ での逐次スペクトル

$$\phi_1(k_1; 0), \phi_2(k_1, k_2; 0), \dots, \phi_{N+S}(k_1, \dots, k_{N+S}; 0)$$

を与えると、方程式 (2.20) から $t > 0$ に対し $\phi_N(k_1, \dots, k_N; t)$ が R^S の項まで求められ、特にエネルギー・スペクトル $\phi_1(k_1; t)$ を S 次項まで定める (単に S 次近似と呼ぼう) に

* I; (7.7) の第 2 式で右辺にマイナス符号がおちている。すなわち、 $-\epsilon \sum_{\mathbf{C}}^{(N+1)} \dots$ が正しい。
(2.17) 第 2 式の係数 $1/2$ は、(2.2) の右辺が $\frac{1}{2} \partial u^2 / \partial x$ と書けることによる。

は、 $(S+2)$ 次までの初期スペクトルを指定すればよい (実際には、式の構造上 N または S の大きい所まで到底計算できないにしても). なお、一般に ϕ_N の式 (2.7) で右辺第 1 項を 0 とすれば $(N+2)$ 次準正規分布仮説を与え、Deissler の方程式系¹⁵⁾ は形の上で第 2 項を 0 とした場合に相当する. 後者が適当でないことはさきに指摘したが、^{1), 16)} その後の Deissler の見解¹⁷⁾ もそのままでは受け入れ難いようである. 上の方式はこの点を考慮したのになっているけれども、実は R の級数に展開すること自体、現実の意味をもつかどうかも自明ではない. そのような問題を含め実例によって吟味するために、4 次近似までを具体的に取扱うが、以後は記法の繁雑をさけて、

$$\left. \begin{aligned} & k_1 \rightarrow k, k_2 \rightarrow l, k_3 \rightarrow m, \dots, \\ & \sigma_1 \rightarrow -k, \sigma_2 \rightarrow -(k+l), \sigma_3 \rightarrow -(k+l+m), \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

と書き、また初期分布については

$$\phi_1(k_1; 0) \rightarrow \phi_1(k), \phi_2(k_1, k_2; 0) \rightarrow \phi_2(k, l), \dots \quad (2.22)$$

のように略記する.

3. 初期エネルギー分布

方程式系 (2.20) を解くには、初期条件として

$$\left. \begin{aligned} & \phi_{1,0}(k; 0) = \phi_1(k), \quad \phi_{1,S}(k; 0) = 0; \\ & \phi_{2,0}(k, l; 0) = \phi_2(k, l), \quad \phi_{2,S}(k, l; 0) = 0; \\ & \dots \quad ; (S = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ととればよい (I; 7 節). ここに逐次の初期スペクトル関数 $\phi_1(k)$, $\phi_2(k, l)$, \dots は、それぞれが物理的に要請される条件* をみたし、かつ可能な確率分布を構成するものである限り、原理上 “独立に” えらぶことができる.

それらの中で最も簡単な場合は、 $t = 0$ において分布汎関数が完全に正規的であるとする仮定であろう. そのときは、よく知られている通り、 $\phi_1(k)$ だけが 0 でなく、 $\phi_2(k, l)$ 以下はすべて 0 である (初期正規分布仮定). これは Kraichnan¹⁸⁾ が “最大不規則条件 (maximal randomness condition)” と呼んだものと実質的に同等であって、乱れの初期値問題ではしばしば用いられるが^{4), 10), 12)}, 事実解析を簡単にするばかりでなく、非線形性による正規分布からの外れをみる上にも都合がよいので、ここでも主として同じ仮定に従うこととしたい. 低次の近似について実際に確かめられる通り、初期正規分布の仮定のもとでは、偶数次 (N は奇数) のスペクトルは R の偶級数、奇数次 (N は偶数) のスペクトルは R の奇級数となる. いいかえると、 $\phi_{N,S}(k, l, \dots; t)$ で N と S が共に偶数または奇数のものは恒等的に 0 にひとしい**.

本報では解を初等関数の範囲で得るために、 $\phi_1(k)$ の具体的な形として、つぎのような

* たとえば、 $\phi_1(k)$ は Fourier 変換の可能な非負実偶関数でなければならない、などの条件をさす.
** Deissler¹⁵⁾によれば、初期正規分布を仮定するとすべての $N \geq 2$, $S \geq 0$ に対して $\phi_{N,S}(k, l, \dots; t) \equiv 0$, すなわち $R \neq 0$ でも常に正規分布が保たれることになるが、これは事実と反する (I; 脚註 12) 参照).

一般式で表わされるものを採用する：

$$\phi_1(k) = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \left(\frac{n^{2n+1}}{\pi} \right)^{1/2} k^{2n} \exp(-nk^2), \quad n=1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

ただし, $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1$. この関数列は, n にかかわらず, $k=1$ に極大をもち, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k) dk = 1$ に規格化されている. 対応する速度 2 次相関は, その Fourier 余弦変換をとって¹⁹⁾

$$q_1(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k) \cos kr dk = \frac{H_{2n}(r/\sqrt{2n})}{(-1)^n (2n-1)!!} \exp(-r^2/4n) \quad (3.3)$$

ここに

$$H_{2n}(w) = (-1)^n \exp(w^2/2) \frac{d^{2n}}{dw^{2n}} [\exp(-w^2/2)] \quad (3.4)$$

は $2n$ 次の Hermite 多項式である²⁰⁾.

式(3.2), (3.3)で順次に $n=1, 2, 3, 4$ とおくと

A, $n=1$:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} k^2 \exp(-k^2); \\ q_1(r) &= \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \exp(-r^2/4) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

B, $n=2$:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \frac{16}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^4 \exp(-2k^2); \\ q_1(r) &= \left(1 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{48}\right) \exp(-r^2/8). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

C, $n=3$:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \frac{72}{5} \sqrt{\frac{3}{\pi}} k^6 \exp(-3k^2); \\ q_1(r) &= \left(1 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{36} - \frac{r^6}{3240}\right) \exp(-r^2/12). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

D, $n=4$:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \frac{8192}{105} \sqrt{\frac{1}{\pi}} k^8 \exp(-4k^2); \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$q_1(r) = \left(1 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{32} - \frac{r^6}{1920} + \frac{r^8}{430080} \right) \exp(-r^2/16).$$

となり、これらを図 1, 2 に示す*. 3次元等方性乱れの場合と比べ、 $\phi_1(k)$ の形はある程度似ているが、 $q_1(r)$ は振動的な性質が著しいことに注意したい。

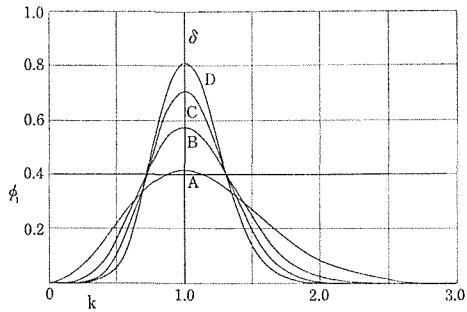


図1. 初期エネルギー・スペクトル

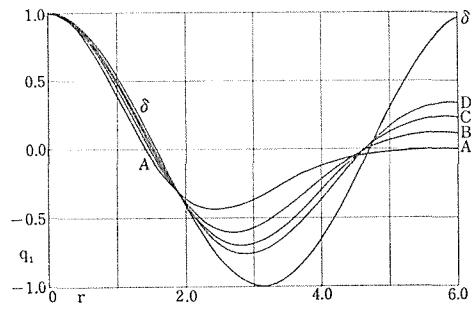


図2. 初期相関々数

図 1 に明らかなように、 $\phi_1(k)$ は n が増すと共に $|k|=1$ の附近に集中し、 $n \rightarrow \infty$ の極限では $k = \pm 1$ における線スペクトルに漸近する。式で書けば、

$\delta, n \rightarrow \infty :$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \delta(k^2 - 1) = \frac{1}{2} [\delta(k+1) + \delta(k-1)] \\ q_1(r) &= \cos r \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

が極限の形である。

実際の計算は、初期正規分布の場合、連続分布 A (3.5) と B (3.6) に対して 2 次近似、集中分布 δ (3.9) に対して 4 次近似までを実行した。それ以外の計算も勿論不可能ではないが、いたずらに複雑で特別の興味に乏しいと思われる。

初期正規分布を仮定しない場合には、 $\phi_1(k)$ の他に高次スペクトルについても初期分布を与えなければならない。その結果、各次のスペクトルに対する解は一般に R のすべてのべきを含むことになるが、簡単な一例として、 $\phi_2(k, l)$ の形を仮定した 1 次近似の計算を次報に予定している。

4. 0 次および 2 次近似 (初期正規分布)

この節では、初期正規分布仮定のもとで 0 次および 2 次近似を例 A, B, δ について求め、また 1 次近似は 0 次近似に一致することを示す。

(i) 0 次近似

* 誤差曲線形の初期スペクトル^{(9), (10), (12)} $\phi_1(k) \propto \exp(-k^2)$ では、解を初等関数で表わすことができない。

よく知られているように、最低次の近似は全く非線形性を含まない“減衰末期”の解で、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2\right)\phi_{1,0}(k;t) = 0; \quad \phi_{1,0}(k;0) = \phi_1(k) \quad (4.1)$$

から直ちに、

$$\phi_{1,0}(k;t) = \phi_1(k)\exp(-2k^2t) \quad (4.2)$$

を得る。全エネルギー $E(t)$ の 0 次近似を $E^{(0)}(t)$ とすると、

$$\frac{E^{(0)}(t)}{E(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k)\exp(-2k^2t)dk \quad (= J_0(t) \text{ と書く}) \quad (4.3)$$

がエネルギー減衰則である。

(ii) 1 次近似

つぎの近似は、(2.11), (2.20), (2.21) から

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2\right)\phi_{1,1}(k;t) &= \iota k\phi_{1,0}(k;t) (= \lambda_{1,0}(k;t)); \\ \phi_{1,0}(k;t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{2,0}(k,l;t)dl, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)^*$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2)\right]\phi_{2,0}(k,l;t) = 0 \quad (4.5)$$

で与えられるが、初期条件、

$$\phi_2(k,l) = 0 \text{ (初期正規分布)}, \quad \phi_{1,1}(k;0) = 0 \text{ ((3.1) 参照)} \quad (4.6)$$

によって恒等的に

$$\phi_{2,0}(k,l;t) = \phi_{1,1}(k;t) \equiv 0. \quad (4.7)$$

すなわち、初期正規分布の場合、1 次近似は 0 次近似と全く一致する。

(iii) 2 次近似

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2\right)\phi_{1,2}(k;t) &= \iota k\phi_{1,1}(k;t) (= \lambda_{1,1}(k;t)); \\ \phi_{1,1}(k;t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{2,1}(k,l;t)dl. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

* 最も一般には、 $\lambda_1(k;t) = -\iota[k\phi_1(-k;t) + k\phi_1(k;t)]/2$ であるが、“速度” u が x 軸の反転に対して符号をかえるとすれば、 $\phi_2(k,l;t) = -\phi_2(-k,-l;t)$ が成立ち、これから $k\phi_1(k;t) = -k\phi_1(-k;t)$ 、従って (4.4) の第 1 式を得る。この性質は乱れのモデルとして妥当なものと思われるので、以下すべてこれに従うこととする。

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2) \right] \phi_{2,1}(k, l; t) \\ & = \frac{1}{2} \left[(k+l)\phi_{2,0}(k, l; t) - k\phi_{2,0}(l, -k-l; t) \right. \\ & \quad \left. - l\phi_{2,0}(-k-l, k; t) \right] (= \lambda_{2,0}(k, l; t)); \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\phi_{2,0}(k, l; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{3,0}(k, l, m; t) dm + 2\phi_{1,0}(k; t)\phi_{1,0}(l; t),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2) \right] \phi_{3,0}(k, l, m; t) = 0 \quad (4.10)$$

が一般の 2 次近似方程式である ((2.11), (2.12), (2.20), (2.21) 参照). ここで, $\phi_{1,0}$ の項に 0 次近似解 (4.2) を代入し, かつ特に初期分布の場合には, 方程式 (4.10) は,

$$\phi_{3,0}(k, l, m) = 0 \quad \text{により} \quad \phi_{3,0}(k, l, m; t) \equiv 0 \quad (4.11)$$

を与えることから, 結局 (4.8) と (4.9) を初期条件

$$\phi_{1,2}(k; 0) = \phi_{2,1}(k, l; 0) = 0 \quad (4.12)$$

のもとに解けばよいことが分る. 解 (4.11) は 4 次キュムラント q_3^* (2.15) が $O(R^2)$ の程度まで 0 に保たれることを意味し, 従って以前指摘したように^{1), 16)}, 2 次近似の構成は, (初期正規分布を仮定する限り) いわゆる準正規分布理論^{14), 21)} と同等である.

これを解く手続きは付録にゆずり, おもな結果を書くと, エネルギー・スペクトルの 2 次の項に対し,

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(k; t) &= k \exp(-2k^2t) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} [k\phi_1(l)\phi_1(k+l)e^{-2l(k+l)t''} \\ & \quad - 2(k+l)\phi_1(k)\phi_1(l)e^{2kl t''}] e^{-2l(k+l)t' t''} dl, \end{aligned} \quad (4.13)$$

あるいは, t'' , t' に関する積分を先に行ない, $\phi_1(k)$ が k の偶関数であることを用いれば, (4.13) はまた

$$\phi_{1,2}(k; t) = \frac{1}{2} \exp(-2k^2t) [\phi_1(k)g_2(k; t) + h_2(k; t)], \quad (4.14)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} g_2(k; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{l^2} (1 - \cosh 2klt) \exp(-2l^2t) \right] \phi_1(l) dl, \\ h_2(k; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{k^2}{4l^2(k+l)^2} [1 - e^{-2l(k+l)t}]^2 \right] \phi_1(l) \phi_1(k+l) dl, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

のようにも表わされる (被積分関数は, 明らかにすべての l で有限). 2 次のエネルギー伝

達関数 $\lambda_{1,1}(k;t)$ は (4.8) の第2式からも得られるが、むしろ (4.14) を直接第1式に代入する方が簡単で、

$$\lambda_{1,1}(k;t) = \frac{1}{2} \exp(-2k^2t) \left[\phi_1(k) \frac{\partial}{\partial t} g_2(k;t) + \frac{\partial}{\partial t} h_2(k;t) \right] \quad (4.16)$$

を得る。さらに、この近似でのエネルギー減衰則は、

$$\frac{E^{(2)}(t)}{E(0)} = J_0(t) + R^2 J_2(t); \quad J_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,2}(k;t) dk \quad (4.17)$$

であり、 $\lambda_{1,1}(k;t)$ が $J_2(t)$ に寄与しないことは付録に示した。

(iv) 具体例

つぎにあげる3つの例は、いずれも省略または数値解法を全く含まない解析的に厳密な結果である。

例A :

$$\phi_1(k) = \frac{2k^2}{\sqrt{\pi}} \exp(-k^2). \quad (4.18)$$

(解)

$$\phi_{1,0}(k;t) = \frac{2k^2}{\sqrt{\pi}} \exp(-k^2(2t+1)). \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(k;t) = & \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \exp\left(-k^2\left(2t + \frac{1}{2}\right)\right) - (2t+2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{k^2}{2}(3t+1)\right) \right. \\ & + (2t+1)^{-1/2} \left\{ 2 \exp(-k^2(2t+1)) - 2 \exp\left(-k^2 \frac{3t^2+4t+1}{2t+1}\right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} \exp\left(-\frac{k^2}{2}(2t+1)\right) \right\} \right]. \quad (4.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}(k;t) = & \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \left[A_1(k;t) \exp(-k^2(2t+1)) + A_2(k;t) \exp\left(-\frac{k^2}{2}(3t+1)\right) \right. \\ & \left. + A_3(k;t) \exp\left(-k^2 \frac{3t^2+4t+1}{2t+1}\right) + A_4(k;t) \exp\left(-\frac{k^2}{2}(2t+1)\right) \right], \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A_1(k;t) &= -2(2t+1)^{-3/2}, \\ A_2(k;t) &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (t+1)^{-3/2} \{k^2(t+1)-1\}, \\ A_3(k;t) &= -2(2t+1)^{-3/2} \left\{ 2k^2 \frac{t(t+1)}{2t+1} - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$A_4(k; t) = \frac{\sqrt{2}}{4} (2t + 1)^{-3/2} \{k^2(2t + 1) - 1\}.$$

$$J_0(t) = (2t + 1)^{-3/2}. \tag{4.22}$$

$$J_1(t) = \frac{1}{2} (4t + 1)^{-3/2} + \frac{3}{2} (2t + 1)^{-2} - (3t + 2)(3t^2 + 4t + 1)^{-3/2}. \tag{4.23}$$

図3は $\lambda_{1,1}(k; t)$, 図4は $\phi_{1,2}(k; t)$, 図5, 6, 7は

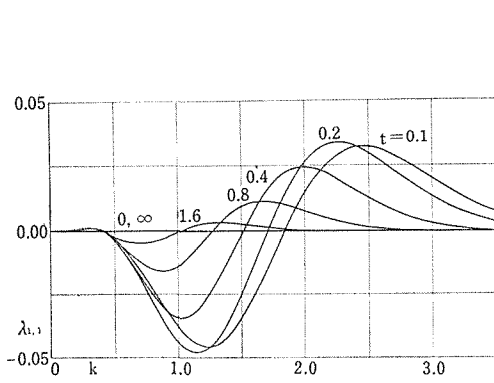


図3. 2次伝達関数 $\lambda_{1,1}(k; t)$ (例A)

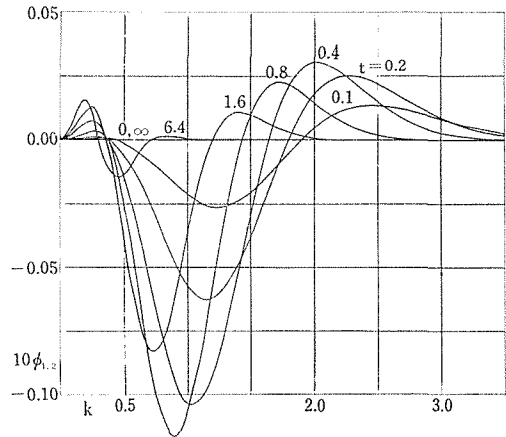


図4. $\phi_{1,2}(k; t)$ (例A)

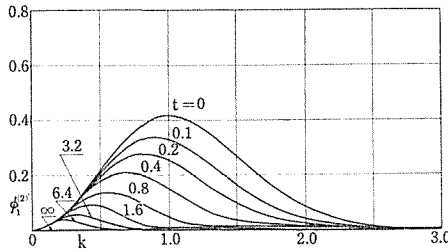


図5. エネルギー・スペクトル, $R=0$ (例A)

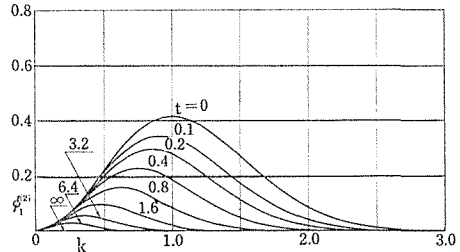


図6. エネルギー・スペクトル, $R=2$ (例A)

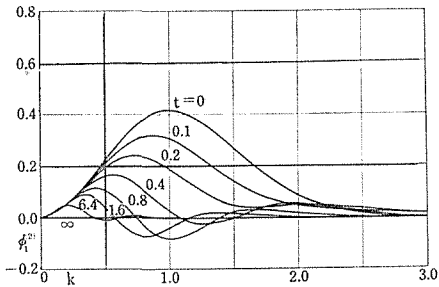


図7. エネルギー・スペクトル, $R=4$ (例A)

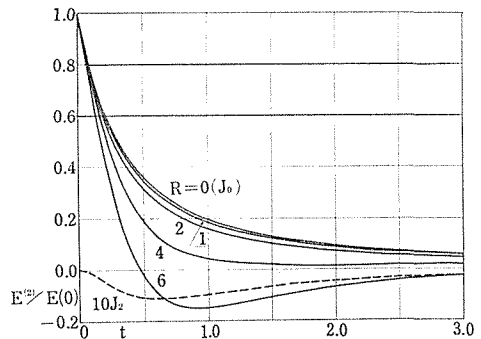


図8. 減衰曲線 (例A)

$$\phi_1^{(2)}(k; t) = \phi_{1,0}(k; t) + R^2\phi_{1,2}(k; t) \quad (4.24)$$

でそれぞれ $R=0$ (0次近似), 2, 4 とおいた結果を, また図 8 は $J_0(t)$, $J_2(t)$ および R をパラメータとする減衰曲線の 2次近似 (4.17) 式を示す. それらの詳細な吟味は次節でまとめて行なうこととしたい.

例 B :

$$\phi_1(k) = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}k^4\exp(-2k^2). \quad (4.25)$$

(解)

$$\phi_{1,0}(k; t) = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}k^4\exp(-2k^2(t+1)). \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(k; t) = & \frac{8k^2}{9\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{4} + \frac{3}{16}\right)\exp(-k^2(2t+1))\right. \\ & - (2t+4)^{-1/2}\left\{k^4 - \frac{2k^2}{t+2} + \frac{3}{(t+2)^2}\right\}\exp\left(-\frac{k^2}{2}(3t+2)\right) \\ & + (t+1)^{-1/2}\left\{\frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{4(t+1)} + \frac{3}{16(t+1)^2}\right\}\exp(-k^2(t+1)) \\ & + 4\sqrt{2}k^2(t+1)^{-3/2}\left\{\exp(-2k^2(t+1))\right. \\ & \left. - \left(k^2\frac{t^2}{t+1} + 1\right)\exp\left(-k^2\frac{3t^2+8t+4}{2t+2}\right)\right\}\left. \right]. \quad (4.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}(k; t) = & \frac{8k^2}{9\sqrt{\pi}}\left[B_1(k; t)\exp(-2k^2(t+1)) \right. \\ & + B_2(k; t)\exp\left(-k^2\frac{3t^2+8t+4}{2t+2}\right) + B_3(k; t)\exp\left(-\frac{k^2}{2}(3t+2)\right) \\ & \left. + B_4(k; t)\exp(-k^2(t+1)) \right], \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} B_1(k; t) &= -6(t+1)^{-5/2}, \\ B_2(k; t) &= -2[(t+1)^{-9/2}k^2t(t+2)(k^2t^2+t+1) \\ & \quad - (t+1)^{-7/2}\{k^2t^2 - (4k^2-3)t + 3\}], \\ B_3(k; t) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{k^6(t+2)^{-1/2} - 3k^4(t+2)^{-3/2}\right. \\ & \quad \left. + 9k^2(t+2)^{-5/2} - 15(t+2)^{-7/2}\right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$B_4(k; t) = \frac{1}{4} \left\{ k^6 (t+1)^{-1/2} - \frac{3}{2} k^4 (t+1)^{-3/2} + \frac{9}{4} k^2 (t+1)^{-5/2} - \frac{15}{8} (t+1)^{-7/2} \right\}.$$

$$J_0(t) = (t+1)^{-5/2}. \tag{4.29}$$

$$J_1(t) = \frac{1}{3} (t^2 + 1)(2t + 1)^{-7/2} + (t+1)^{-4} - \frac{64}{3} (9t^3 + 20t^2 + 18t + 8)(3t^2 + 8t + 4)^{-7/2}. \tag{4.30}$$

図9～14は、例Aに対する図3～8に相当する結果である。

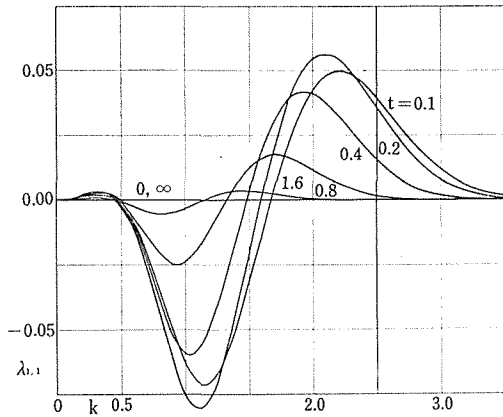


図9. 2次伝達関数 $\lambda_{1,1}(k; t)$ (例B)

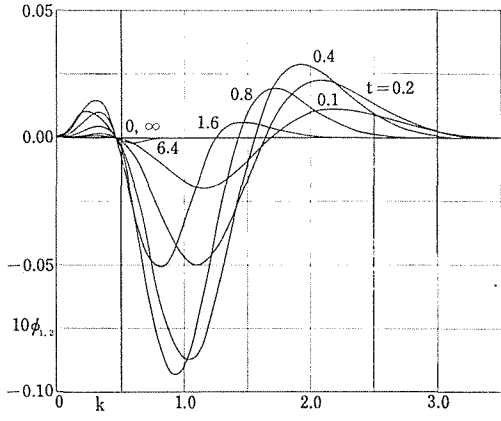


図10. $\phi_{1,2}(k; t)$ (例B).

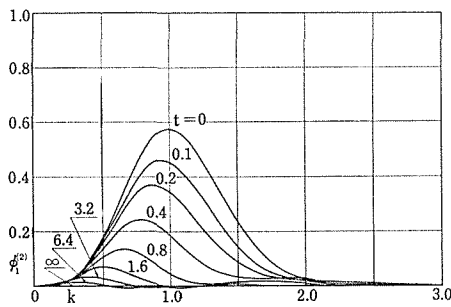


図11. エネルギー・スペクトル, $R=0$ (例B)

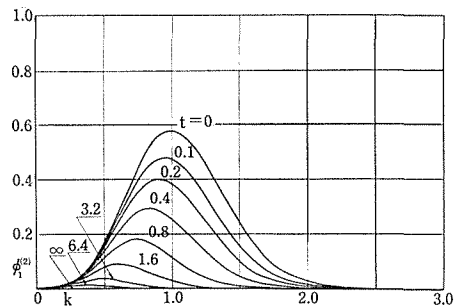


図12. エネルギー・スペクトル, $R=2$ (例B)

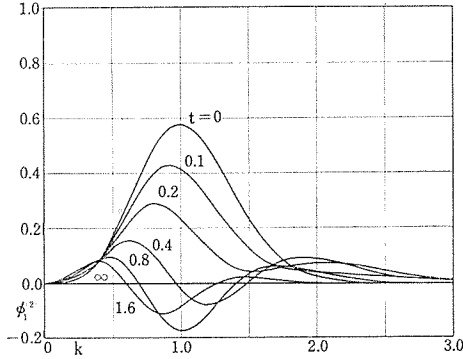


図13. エネルギー・スペクトル,
\$R=4\$ (例B)

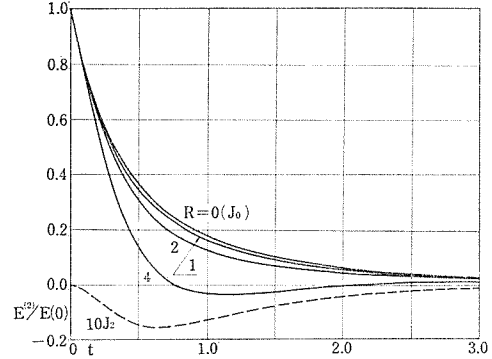


図14. 減衰曲線 (例B)

例 δ :

$$\phi_1(k) = \frac{1}{2} [\delta(k+1) + \delta(k-1)]. \quad (4.31)$$

(解)

$$\phi_{1,0}(k;t) = \frac{1}{2} [\delta(k+1) + \delta(k-1)] \exp(-2k^2t). \quad (4.32)$$

$$\phi_{1,2}(k;t) = [\delta(k+2)\alpha^-(k;t) + \delta(k+1)\beta^-(k;t) + \delta(k)\{\alpha^-(k;t) + \alpha^+(k;t)\} + \delta(k-1)\beta^+(k;t) + \delta(k-2)\alpha^+(k;t)] \exp(-2k^2t),$$

ただし,

$$\alpha^-(k;t) = \frac{k^2}{32(k+1)^2} [1 - \exp(-2(k+1)t)]^2 = \alpha^+(-k;t), \quad (4.33)$$

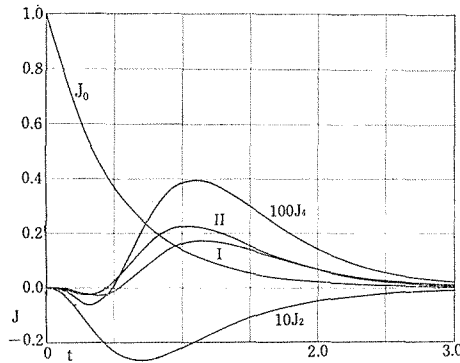
$$\beta^-(k;t) = -\frac{1}{2} \sinh^2(kt) \exp(-2t) = \beta^+(k;t).$$

$$J_0(t) = \exp(-2t). \quad (4.34)$$

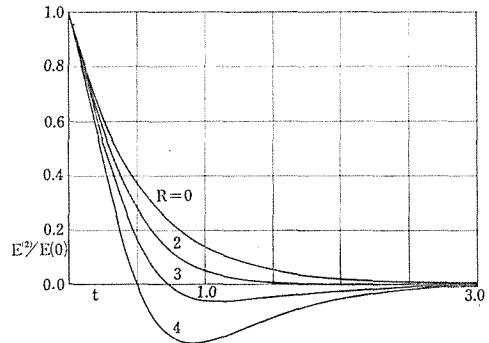
$$J_2(t) = -\frac{1}{4} [1 - \exp(-2t)]^2 \exp(-2t). \quad (4.35)$$

($\lambda_{1,1}(k;t)$ の式は省略), 0 次近似で $k = \pm 1$ に位置した 2 本の線スペクトルが, 2 次の相互作用のために $k = \pm 1, \pm 2$ の 4 本に分れる*. これは, 3 次元乱れの準正規分布理論において, 初期に等方的線スペクトルを仮定した場合^{21), 22)}と比較されるものであるが, ここでは 3 次元空間の全方向に分布した単色平面波間の相互作用によって連続スペクトルの部分が発生したのに対し, Burgers 乱れでは 1 次元的に正負 2 つの向きしかあり得ないので, そのような効果はみられない. すなわち, 常に線スペクトル以外の成分はなく, エ

* $\delta(k)$ の項には k^2 がかかっているので, 実際には 0 スペクトルである.

図15. 減衰関数 (例 δ)

J_1, I, II は 4 次近似の結果

図16. 減衰曲線 (例 δ 2 次近似)

エネルギー減衰も例 A, B とはちがって指数形である. 実際には $\phi_{1,0}(k;t)$ 等の δ 関数型分布を描くことはできないから, $J_0(t), J_2(t)$ を図15に, エネルギー減衰曲線 $E^{(2)}(t)/E(0)$ を図16に示した*.

5. 2 次近似解の考察

前節の計算の特色は, 2 次近似解の具体例を k と t のすべての範囲にわたって正確に求めた点にある. 従って, その結果には近似の本質的な性格が忠実に反映していると考えられ, この節でそれらについて多少の考察を加えることとしたい.

(1) 2 次の伝達関数 $\lambda_{1,1}(k;t)$ はまず初期エネルギー分布の極大 ($k=1$) 付近で負, 両ずその部分で正となり, 初期分布の不均一を平等化する方向に作用するが, R が十分小さくなければ, この効果は行きすぎてエネルギーが負の領域を生じる. これは, 以前準正規分布理論で見出された負スペクトルの発生^{23), 24)}にほかならない.

実例についていえば, 例 A では $R=4$ の場合 (図 7) がこれに当る. 対応する減衰曲線 (図 8) は終始正であるけれども, 本来単調減少である筈の $E^{(2)}(t)$ が $t=2$ の付近で極小をもつという矛盾を示し, さらに $R=6$ では (エネルギー・スペクトルは図示されていないが), $E^{(2)}(t)$ 自身が負の値をとる. この傾向は例 B ではより著しく, $R=4$ ですでに $E^{(2)}(t)$ は負になる (図14). これらの例で負スペクトルの極値も $k=1$ の近くにあることは上述の 2 次エネルギー伝達機構による解の振動的性質のあらわれであろう. 例 δ の場合には, $R=2$ がちょうど正減衰曲線の限界で同時に単調減衰の上限でもあり (図16), $R=4$ に対する $E^{(2)}(t)$ の負の程度は明らかに例 B よりも大きい.

以上の結果を通じ, 負スペクトルまたは非単調減衰曲線の発生は初期スペクトルが集中している程 R の低い値ではじまることをみた. その一般的な証明は困難であるが, 計算例以外の初期分布に対しても定性的には同様と思われる. (4.14), (4.15) によると, $\phi_{1,2}(k;t)$ を定める因子のうち $h_2(k;t)$ は必ず正であるから, このような 2 次の項の負の寄与は $g_2(k;t)$ に起因するものである.

(2) 方程式 (4.8) を k について積分すれば, 伝達関数の項は消えて,

* 図15には 4 次近似の結果も記入されている.

$$\frac{dJ_2}{dt} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \phi_{1,2}(k; t) dk \quad (5.1)$$

を得るが、実例ではすべて $J_2 < 0$ 、 dJ_2/dt は負から正に転じている (図 8, 14, 15)*. 従って、非線形効果を表わす R の値が増すと共に減衰の速さもはじめ大きく ((4.17) 参照)、結局この近似においては粘性が小さい程減衰が促進されることになる。これは一見矛盾にみえるが、内容的には、散逸の大きい高波数帯へのエネルギー伝達が却って粘性減衰を増加させる機構を意味する。3 次元乱れに対する準正規分布理論の結果²¹⁾でも同じ傾向がみられることとあわせて注目すべき点であろう。

(3) 伝達関数は $k = 2$ の附近に正の極値があり、これに対応してエネルギー・スペクトルにも第 2 の弱い極大が出現する。この結果は明らかに 2 次近似に固有の特徴で、(4.15) において $\phi_1(l)$ と $\phi_1(k+l)$ の積を含む積分 $h_2(k; t)$ に起因していることはいうまでもない。さらに近似を進めると順次初期スペクトルの高次の積が関係してくるので、 $k = 3, 4, \dots$ の附近にも類似の効果が期待されるが、同時に波数間相互作用の構成も複雑となるため、これらの高次の極大は平均化される傾向をもつと思われる。

(4) 計算されたエネルギー・スペクトルの時間的変化に着目すると、 t が増すと共に高波数部分で漸近的に $\phi_{1,2}(k; t)$ が $\phi_{1,0}(k; t)$ よりも卓越している。また、減衰法則の 2 次近似は $t \rightarrow \infty$ でも R に依存し、0 次近似 (いわゆる減衰末期解) に移行しない。これらは、上記負スペクトルの発生とは別に、解析解を求めたことによってはじめて見出された新しい問題点であるが、事柄は Reynolds 数級数一般の収束性・有意性の限界と本質的に関連する重要な結果と考えられるので、次報であらためて取り上げたい。

付 録

2 次近似方程式系において、(4.9) の形式解は、

$$\phi_{2,1}(k, l; t) = \int_0^t \lambda_{2,0}(k, l; t') \exp(2(k^2 + kl + l^2)(t' - t)) dt', \quad (1)$$

これを (4.8) に用いて

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(k; t) &= ck \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{2,0}(k, l; t'') \\ &\quad \times \exp(2(k^2 + kl + l^2)t'' - 2l(k+l)t' - 2k^2t) dl \end{aligned} \quad (2)$$

を得る。

簡単のため

$$-(k+l) = \sigma \quad (3)$$

とおくと、定義から

* 常に $J_0 > 0$ 、 $dJ_0/dt < 0$ であることは自明である。

$$\begin{aligned}
2\lambda_{2,0}(k, l; t'') &= -\epsilon \sum_C^{(3)} \sigma \phi_{2,0}(k, l; t'') \\
&= -\epsilon [\sigma \phi_{2,0}(k, l; t'') + k \phi_{2,0}(l, \sigma; t'') + l \phi_{2,0}(\sigma, k; t'')] \quad (4)
\end{aligned}$$

と書けるが、循環関係

$$k^2 + kl + l^2 = l^2 + l\sigma + \sigma^2 = \sigma^2 + \sigma k + k^2 \quad (5)$$

に注意すれば、(4)の第3項による $\phi_{1,2}(k; t)$ への寄与は、積分変数を l から σ に変換して

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} l \phi_{2,0}(\sigma, k; t'') \exp(2(k^2 + kl + l^2)t'' - 2l(k+l)t') dl \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma + k) \phi_{2,0}(\sigma, k; t'') \exp(2(\sigma^2 + \sigma k + k^2)t'' - 2(\sigma + k)\sigma t') d\sigma \quad (6)
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで再び σ を l と書くと、

$$\phi_{2,0}(k, l; t) = \phi_{2,0}(l, k; t) \quad (7)$$

が成立つ限り、(6)は(4)の第1項からの寄与にひとしい。いまの場合、(4.2)と(4.11)からたしかに

$$\phi_{2,0}(k, l; t) = \phi_1(k)\phi_1(l)\exp(-2(k^2 + l^2)t) = \phi_{2,0}(l, k; t) \quad (8)$$

であり、(4.13)はこの結果を考慮して(2)を書き直したものに他ならない。

また、(4)と(8)により(1)を直接計算すると、

$$\begin{aligned}
\phi_{2,1}(k, l; t) &= \frac{\epsilon}{2} \sum_C^{(3)} \frac{\sigma}{kl} F(k, l; t) \phi_1(k)\phi_1(l) \\
&= \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{\sigma}{kl} F(k, l; t) \phi_1(k)\phi_1(l) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{l\sigma} F(l, \sigma; t) \phi_1(l)\phi_1(\sigma) + \frac{l}{\sigma k} F(\sigma, k; t) \phi_1(\sigma)\phi_1(k) \right], \quad (9)
\end{aligned}$$

ただし、

$$F(k, l; t) = \exp(-2(k^2 + l^2)t) \{ \exp(-2klt) - 1 \}$$

が得られる。従って、明らかに

$$\phi_{2,1}(k, l; t) = \phi_{2,1}(-k, -l; t) = \phi_{2,1}(l, k; t) \quad (10)$$

である。

方程式(4.8)を k について積分するとき、右辺

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{1,1}(k; t) dk = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k \phi_{2,1}(k, l; t) dl dk \quad (11)$$

において、 $\phi_{2,1}(k, l; t)$ は(10)が示すように $k-l$ 平面の原点および直線 $k=l$ に関して対称

であるから、これに k を乗じて全平面で積分すれば 0 となり、(11) はエネルギーの減衰に寄与しない。

文 献

- 1) 大路通雄：弱い一様な乱れの理論 I. 九大応力研所報第21号(1963)57.
- 2) E. Hopf : Statistical hydrodynamics and functional calculus. *J. Rat. Mech. Ann.*, 1 (1952) 87.
- 3) A.C. Монин : О решении проблемы турбулентности методом теории возмущений. Прикл. матем. мех. 28 (1964)319.
- 4) T. Kawahara : A successive approximation for turbulence in the Burgers model fluid. *J. Phys. Soc. Japan* 25 (1968) 892.
- 5) J.M. Burgers : A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Appl. Mech.*, vol. I (1948) 171.
- 6) E. Hopf : The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3 (1950) 201.
- 7) J.D. Cole : On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.* 9 (1951) 225.
- 8) D.T. Jeng et. al. : Statistical initial-value problem for Burgers' model equation of turbulence. *Phys. Fluids* 9 (1966) 2114.
- 9) T. Tatsumi : Nonlinear wave expansion for turbulence in the Burgers' model of a fluid. *Phys. Fluids* 12 Suppl. II (1969) 258.
- 10) W.C. Meecham & A. Siegel : Wiener-Hermite expansion in model turbulence at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids* 7 (1964) 1178.
- 11) R.H. Kraichnan : Lagrangian-history statistical theory of Burgers' equation. *Phys. Fluids* 11 (1968) 265.
- 12) I. Hosokawa & K. Yamamoto : Numerical research for the Burgers' model turbulence based on the characteristic functional formalism. *Rep. Goddard Space Flight Center X-641-69-392* (1969).
- 13) 桑原真二：直交函数系展開による Hopf 方程式の解法。乱流の分布汎函数方程式研究会報告集，数理学講究録47，京大数理解析研 (1968) 30.
- 14) W.H. Reid : On the transfer of energy in Burgers' model of turbulence. *Appl. Sci. Res.* A 6 (1956) 85.
- 15) R.G. Deissler : A theory of decaying homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* 3 (1960) 176.
- 16) M. Ohji : Some considerations on the four-point dynamical equations of homogeneous turbulence. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.* 10 (1962) 33.
- 17) R.G. Deissler : Some remarks on the approximations for moderately weak turbulence. *Phys. Fluids* 8 (1965) 2106.
- 18) R.H. Kraichnan : The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 497.
- 19) 森口繁一他：数学公式 I. 岩波書店 (1956).
- 20) A. Erdelyi et. al. : *Tables of integral transforms I*, McGraw-Hill, New York (1954).

- 21) 巽友正 : 乱流, 槇書店 (1962).
- 22) T. Tatsumi : The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* 239 (1957) 16.
- 23) Y. Ogura : A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* 16 (1963) 33.
- 24) E. E. O'Brien & C. C. Francis : A consequence of the zero fourth cumulant approximation. *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 497.

Summary

Theory of Weak Homogeneous Turbulence II

Michio OHJI

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

The expansion in powers of Reynolds number R for weak homogeneous turbulence is applied to one-dimensional Burgers' model fluid. In this part of paper, the second approximation for the case of initially normal fluctuations is of particular interest. The relevant equations are formally identical with those in the approximation of the fourth-cumulant discard. Here, however, the vanishing fourth-cumulant is not an "assumption" but an "outcome" of the theory.

As illustrating examples, three kinds of initial energy spectrum are introduced: two continuous ones and Dirac's δ -spectrum. In each case, the solution is obtained in an analytical form for all values of the wave-number k and the time t . The second approximation is found to be ineffective when R exceeds about 2 owing to the appearance of negative energy spectrum, and such a marginal value of R seems to diminish as the initial spectrum profile becomes sharper and sharper. Another interesting result is that contrary to expectation the second-order nonlinear transfer of energy acts so as to accelerate the decay of total energy. Lastly, a serious doubt is suggested about the convergence of the series in the range of high wave-numbers, but further discussion together with the fourth approximation and other related problems are reserved for the succeeding part.