

# 一様な磁場を伴う回転系中の電磁乱流

大 路 通 雄\*・土 屋 良 明\*\*

(昭和45年3月20日受理)

## 1. は し が き

この論文では、強い一様な磁場を伴う回転系における導電性流体の乱れについて、速度攪乱と磁場攪乱の間の線形相互作用を電磁流体力学 (MFD) の立場から取扱う。このような問題は、それ自身の理論的興味他に、例えば天体物理学への応用などの面からも重要で、Lehnert<sup>1)</sup> によってはじめて論じられたが、乱れのエネルギー分配に関する具体的な知識は、筆者らの知る限り、未だ得られていない。さきに筆者の一人は、文献2) (以下Ⅰと略) において回転がない場合に対する同様な問題の解析を試み、文献3) (以下Ⅱと略) においては Hall 効果の影響を考慮した計算を行なって、回転系の場合にも類似の方法が適用できることを示唆した。

一方、他の一人<sup>4)</sup> は、回転系における通常 (非電磁的) 乱流の線形減衰過程を取扱い、Coriolis 力にもとづく各方向成分間の運動エネルギー伝達を考察している。ここでは、これらの一連の研究と同じ方針で、電磁乱流に及ぼす Coriolis 力の効果をⅡに準じて吟味することが当面の目的である。従って、従来通り流体の圧縮性を無視し、物性値はすべて一定、乱れは空間的に一様で、しかも非線形作用は全く考えないものとする。

第2, 3節で所要の方程式をみちびき、縮約されたエネルギー・スペクトル関数に対する一般解を第4節に示す。第5節では、時刻  $t = 0$  で統計的に一様な速度の不規則攪乱が突然に与えられたとして、以後の変化を二, 三の特別な場合について波数空間で調べ、第6節で初期攪乱に等方的分布の簡単なモデルを仮定するとき、 $t \rightarrow \infty$  におけるスペクトルおよびエネルギー分配比の漸近値を求める。おわりに、Hall 効果の影響と他のものを第7節で論ずる。なお、原則として、特に断らない限りⅠおよびⅡと同じ記号を用いた。

## 2. 基礎方程式

### (1) 回転系における MFD 方程式

定角速度  $\Omega$  で回転する系における等質な非圧縮導電性流体 (密度  $\rho$ , 動粘性率  $\nu$ , 磁気粘性率  $\lambda$ ) の MFD 方程式は、MKS 単位系で、

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} - (\hat{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{H}}$$

\* 機械工学教室 教授

\*\* 機械工学教室 助手

$$= -\frac{1}{\rho} \nabla(\widehat{P} + \frac{\rho}{2} \widehat{H}^2 + \rho Q_c) + \nu \nabla^2 \widehat{\mathbf{U}} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \widehat{\mathbf{U}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}}{\partial t} + (\widehat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{H}} - (\widehat{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{U}} = \lambda \nabla^2 \widehat{\mathbf{H}}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{U}} = \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0, \quad (2.3)$$

と書かれる．ここに  $\widehat{\mathbf{H}}$  は速度の次元で表わした磁場  $\mathbf{I}$ ; (4) 式，右辺第 1 項において

$$Q_c = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \quad (2.4)$$

は遠心力ポテンシャル，また同第 3 項は Coriolis 力である．明らかに，誘導方程式 (2.2) は回転の影響を陽に含まない．

(2) 平均値方程式

未知量  $\widehat{\mathbf{U}}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}$ ,  $\widehat{P}$  をそれぞれ平均値 (大文字) と変動分 (小文字) に分け，

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{h}, \quad \widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \mathbf{h}, \quad \widehat{P} = P + p \quad (2.5)$$

とにおいて，(2.1) ~ (2.3) からみちびかれる平均値方程式を慣用の添字記法で書くと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i U_k - H_i H_k + \overline{u_i u_k} - \overline{h_i h_k}) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ P + \frac{\rho}{2} (H^2 + \overline{h^2}) + \rho Q_c \right] + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} - 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k U_l, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (H_i U_k - U_i H_k + \overline{h_i u_k} - \overline{u_i h_k}) = \lambda \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8)$$

となる． $Q_c$  は  $\mathbf{x}$  の成分について 2 次の量であるから，(2.6) 式の右辺は必然的に  $\mathbf{x}$  に関係し，従って平均値は一般には空間的に一様ではあり得ない．しかし，ここでは簡単のため文献 1, 4 にならってこの項を捨て，遠心力にもとづく場の非一様性は無視できると仮定する．さらに，いわゆる地衡風近似

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = -2\varepsilon_{ikl} \Omega_k U_l \quad (2.9)$$

が成り立つとすれば，乱れの統計的性質が一様で，かつ  $\mathbf{U}$  と  $\mathbf{H}$  は乱れの存在にかかわらず一様定常であるような解が可能である．以下，境界面から十分に遠い流体を考え，そこではこれらの条件が満たされているものとしよう．その点  $\mathbf{I}$  の場合に比べ理論の制約が強いことに注意を要する．

(3) 乱れの線形化方程式

一般に方程式 (2.1) ~ (2.3) と (2.6) ~ (2.8) の差をとって乱れの方程式が得られるが\*, 特に I および II で述べたと同じ意味で乱れの成分に関する 2 次の項を省略すると, 上記一様性の仮定のもとに,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - H_k \frac{\partial h_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho H_k h_k) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} - H_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.12)$$

に達する. これが当面の基本的な方程式であって, この場合  $H_i$  は勿論与えられた定数とみてよい.

#### (4) スペクトル方程式

方程式 (2.10) (2.11) から出発して 2 点  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$  に関する相関方程式を作り, 一様な乱れとして  $\mathbf{r}$  の空間から波数  $\boldsymbol{\kappa}$  の空間へ移る 3 次元 Fourier 変換を行えばスペクトル方程式が得られる<sup>5)</sup>. I; (17) のように, エネルギー・テンソル  $\overline{u_i u_j'}$ ,  $\overline{h_i h_j'}$  の変換を  $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ ,  $\Psi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ , 相互作用テンソル  $\overline{u_i h_j'}$ ,  $\overline{h_i u_j'}$  のそれを  $\Gamma_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t)$  とおくと, 結果は,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2 \right) \Phi_{ij} - i\kappa\mu H (\Gamma_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ij}) \\ = -2\varepsilon_{mkl} \Omega_k (\Delta_{im} \Phi_{lj} + \Delta_{jm} \Phi_{il}), \end{aligned} \quad (2.13)**$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\kappa^2 \right) \Psi_{ij} + i\kappa\mu H (\Gamma_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ij}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2 \right] \Gamma_{ij} - i\kappa\mu H (\Phi_{ij} - \Psi_{ij}) = -2\varepsilon_{mkl} \Omega_k \Delta_{im} \Gamma_{lj}, \quad (2.15)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2 \right] \tilde{\Gamma}_{ij} + i\kappa\mu H (\Phi_{ij} - \Psi_{ij}) = -2\varepsilon_{mkl} \Omega_k \Delta_{jm} \tilde{\Gamma}_{il}, \quad (2.16)$$

ただし,

$$\kappa\mu H = \kappa_k H_k; \quad \Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} \quad (2.17)$$

である. 圧力  $p$  および磁気圧  $\rho H_k h_k$  に関する項は, 連続の条件 (2.12) を用いて消去されているが, 回転のない場合, その寄与が線形近似では自動的に 0 であったのに対し, (I; § 3, II; (4) 式参照), 同じ近似でも Coriolis 力が存在すると, スペクトルに原点での方向特異性を与える  $\Delta_{ij}$  型因子が入った形であられる点に注意したい\*\*\*. 同様なこと

\* 遠心力項は変動量でないから, 乱れの方程式では, 常に自動的に消える.

\*\* 以後  $\boldsymbol{\kappa}, t$  などの引数の表示は適宜省略する.

\*\*\* Lehnert<sup>1)</sup> は渦度  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$  と電流  $\boldsymbol{j} = (\rho/\mu)^{1/2} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}$  について議論しているのだから, そこではこの因子は問題にならなかった.

は通常乱流についてもいえる事柄で<sup>4)</sup>、回転系の場合の基本的な特徴の一つと考えられる。

### 3. 縮 約 方 程 式

スペクトル方程式 (2.13) ~ (2.16) は 36 個の連立で、8 つのソレノイド条件 I; (19) を考慮しても、なお独立な数は 24 個に及ぶが、線形系であるからそれを解くことは手数の問題にすぎない。しかし、簡単のため、個々の成分を直接対象とする代りに、Hall 効果の場合にならって、縮約によりみちびかれる少数個のスカラーおよびベクトル方程式だけを考えよう。具体的には II; § 3 と全く同様に取扱えるが、ここではその手続きをもう少し詳しく述べる。

まず、4 つのスカラー関数を

$$\Phi = \Phi_{ii}, \quad \Psi = \Psi_{ii}, \quad \Gamma = \Gamma_{ii}, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_{ii} \quad (3.1)$$

で、同じくベクトル関数を

$$\phi_i = \epsilon_{ijk} \Phi_{jk}, \quad \psi_i = \epsilon_{ijk} \Psi_{jk}, \quad \gamma_i = \epsilon_{ijk} \Gamma_{jk}, \quad \tilde{\gamma}_i = \epsilon_{ijk} \tilde{\Gamma}_{jk} \quad (3.2)$$

でそれぞれ定義し、さらに

$$\Gamma + \tilde{\Gamma} = \Gamma^+, \quad \Gamma - \tilde{\Gamma} = \Gamma^- \quad (3.3)$$

$$\gamma_i + \tilde{\gamma}_i = \gamma_i^+, \quad \gamma_i - \tilde{\gamma}_i = \gamma_i^- \quad (3.4)$$

とおく。つぎに、いま一つのスカラー関数

$$\Theta = \Omega_k \gamma_k^+ / \Omega \quad (3.5)$$

( $\gamma^+$  の  $\Omega$  方向への射影) を導入すれば、もとのテンソル方程式からつぎの 2 組の閉じた縮約方程式をみちびくことが出来る：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2 \right) \Phi - i\kappa\mu H \Gamma^- = 0, \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\kappa^2 \right) \Psi + i\kappa\mu H \Gamma^- = 0, \quad (3.7)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2 \right] \Gamma^- - 2i\kappa\mu H (\Phi - \Psi) + 2\Omega\Theta = 0, \quad (3.8)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2 \right] \Theta - 2\chi^2 \Omega \Gamma^- = 0, \quad (3.9)$$

および

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2 \right) \phi_i - i\kappa\mu H \gamma_i^- = 0, \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\kappa^2\right)\phi_i + i\kappa\mu H\gamma_i^- = 0, \quad (3.11)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\gamma_i^- - 2i\kappa\mu H(\phi_i - \psi_i) - 2\frac{\kappa_i}{\kappa}\chi\Omega\Gamma^+ = 0, \quad (3.12)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Gamma^+ + 2\Omega_i\gamma_i^- = 0. \quad (3.13)^*$$

ここに  $\chi$  は  $\pi$  と  $\Omega$  の交角の余弦, すなわち  $\kappa\chi\Omega = \kappa_k\Omega_k$  である (図 2 参照).

各組のはじめの二式 (3.6), (3.7) および (3.10), (3.11) は  $\Phi_{ij}$ ,  $\Psi_{ij}$  の式 (2.13) (2.14) から (3.1) (3.2) の定義に従って直ちに求められる. 他を検証するために, 便宜上

$$M = \kappa\mu H, \quad N = \kappa_k\Omega_k/\kappa^2 = \chi\Omega/\kappa$$

と書くと, (2.15), (2.16) から再び (3.1), (3.2) によって,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Gamma - iM(\Phi - \Psi) = -2\Omega_k\tilde{\gamma}_k, \quad (3.14)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\tilde{\Gamma} + iM(\Phi - \Psi) = 2\Omega_k\tilde{\gamma}_k, \quad (3.15)$$

および

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\gamma_i - iM(\phi_i - \psi_i) = 2N\Gamma\kappa_i, \quad (3.16)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\tilde{\gamma}_i + iM(\phi_i - \psi_i) = -2N\tilde{\Gamma}\kappa_i. \quad (3.17)$$

そこで (3.14) より (3.15) を引けば (3.8) が, (3.16) と (3.17) を加えた上で  $\Omega_i/\Omega$  とのスカラ一積を作れば (3.9) が得られ, さらに (3.16) と (3.17) の差は (3.12), また (3.14) と (3.15) の和は (3.13) に他ならない.

#### 4. 一般解とその性質

はじめ, 速度攪乱と磁場攪乱の全エネルギーに対するスペクトル  $\Phi$ ,  $\Psi$  について, その方程式 (3.6) と (3.7) が回転のない場合と全く同形であることに注意する. 特に,  $\nu$  と  $\lambda$  が無視できるときは,  $\Phi + \Psi =$  一定の関係が成り立つが, もともと Coriolis 力は仕事をしないから, これは当然の結果である.

さて,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Gamma^-$ ,  $\Theta$  に関する 4 元斉次スカラー方程式 (3.6) ~ (3.9) の一般解を

\* II;(14), 第 4 式は  $\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Gamma^+ + A\kappa\mu H\kappa_i\gamma_i^- = 0$  が正しく, 第 3 式では  $\sigma_i$  の代りに  $\kappa_i\Gamma^+/\kappa$  と書くよう訂正する. 従って, II;(14) の解が II;(9) のそれと同形になると述べたことも誤りである. これに伴い, II;(15) は  $\phi_i = \psi_i = \gamma_i^- = \Gamma^+ = 0$  でおきかえねばならないが, それから得られる結論自体には変りがない.

$$\sum_{S=1}^4 A^{(S)} \exp[k^{(S)} t] \quad (4.1)$$

の形に仮定し、

$$k^{(S)} = k_*(^{S}) - (\nu + \lambda) k^2 \quad (4.2)$$

とすれば、 $k_*(^{S})$  の決定方程式は

$$k_*^4 - (\vartheta^2 - \beta^2 - 4\kappa^2 \mu^2 H^2) k_*^2 - \vartheta^2 \beta^2 = 0 \quad (4.3)$$

で与えられる。ただし、

$$\vartheta = (\nu - \lambda) \kappa^2, \quad \beta = 2\chi \Omega \quad (4.4)$$

とおいた。(4.3)の根は、複数の4通りの組合せを考慮して、

$$k_*(^{1,2,3,4}) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [(\vartheta^2 - \beta^2 - 4\kappa^2 \mu^2 H^2) \pm \{(\vartheta^2 - \beta^2 - 4\kappa^2 \mu^2 H^2)^2 + 4\vartheta^2 \beta^2\}^{1/2}]^{1/2} \quad (4.5)$$

であるが、その値が  $\vartheta$ 、 $\beta$  および  $\kappa \mu H$  によってどのように変化するかを図1に示す。図では、乱れの特性尺度を  $l$  として、無次元表示

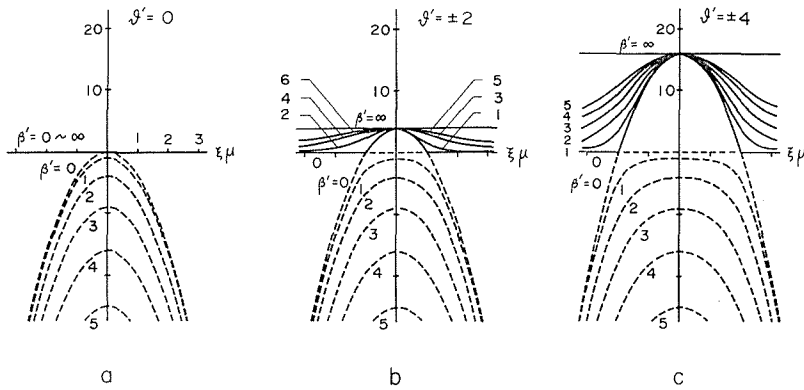


図1. 特性根の分布  
縦軸は  $k_*^2 l^2 / H^2$  を示す

$$\xi = \kappa l, \quad \vartheta' = \vartheta \frac{l}{H} = \frac{\nu - \lambda}{lH} \xi^2, \quad \beta' = \beta \frac{l}{H} = 2 \frac{\Omega l}{H} \chi \quad (4.6)$$

を用い、 $\vartheta' = 0, \pm 2, \pm 4$  の場合につき  $\beta'$  をパラメーターに、

$$\frac{k_*^2 l^2}{H^2} = \frac{1}{2} [(\vartheta'^2 - \beta'^2 - 4\xi^2 \mu^2)$$

$$\pm \left\{ (\mathcal{G}'^2 - \beta'^2 - 4\epsilon^2 \mu^2)^2 + 4\mathcal{G}'^2 \beta'^2 \right\}^{1/2} \quad (4.7)$$

を $\xi\mu$ の関数として描いた。いうまでもなく、各図の上半平面( $k_*^2 \downarrow 0$ )は非振動解(Nで表わす)、下半平面( $k_*^2 \uparrow 0$ )は振動解(Oで表わす)に相当し\*、一般には、(4.7)の平方根における複号の正負に対応して、それぞれが2つの分枝から成っている。しかし、 $\mathcal{G}' = 0$  (a図)では、 $\beta'$ の値にかかわらずN分枝が一本( $k_*^2 = 0$ )に縮退するので、解の構造が格段に簡単である。これは、

$$\nu = \lambda, \text{ または } R_H = \frac{LH}{\nu} \gg 1, R_{mH} = \frac{LH}{\lambda} \gg 1 \quad (4.8)$$

を仮定することに当り、特に $\mathcal{G}' = \beta' = 0$ はIで取扱った場合に他ならない。つぎに、 $\mathcal{G}' \neq 0$ の場合(b, c図) $\beta' = 0$ ではやはり縮退があるが、この縮退は $\beta' \neq 0$ でN分枝とO分枝の両方に分離する。その様子を明示するために、N分枝を実線、O分枝を破線で区別した。N分枝において、 $|k_*|$ の最大値は $|\nu - \lambda|k^2$ に等しく、従って(4.2)によれば常に $k^{(S)} \leq 0$ で、時間的に増大するような解は現われない。またO分枝については、 $\beta'$ が0から増すと共に $|k_*|$ 、すなわち固有振動数は大きくなる傾向のあることが分る。

一般解は、分母が0でない限り、

$$\Phi = \exp[-(\nu + \lambda)\kappa^2 t] \sum_{S=1}^4 \Phi^{(S)} \exp[k_*^{(S)} t], \quad (4.9)$$

$$\Psi = -\exp[-(\nu + \lambda)\kappa^2 t] \sum_{S=1}^4 \frac{k_*^{(S)} + \mathcal{G}}{k_*^{(S)} - \mathcal{G}} \Phi^{(S)} \exp[k_*^{(S)} t], \quad (4.10)$$

$$\Gamma^- = -\frac{i}{\kappa\mu H} \exp[-(\nu + \lambda)\kappa^2 t] \sum_{S=1}^4 (k_*^{(S)} + \mathcal{G}) \Phi^{(S)} \exp[k_*^{(S)} t], \quad (4.11)$$

$$\Theta = -\frac{2i\chi^2 \Omega}{\kappa\mu H} \exp[-(\nu + \lambda)\kappa^2 t] \sum_{S=1}^4 \frac{k_*^{(S)} + \mathcal{G}}{k_*^{(S)}} \Phi^{(S)} \exp[k_*^{(S)} t], \quad (4.12)$$

であって、ここに $\Phi^{(1,2,3,4)}$ は任意の定関数である\*\*。分母が0となる場合の中、 $\kappa\mu H = 0$ では元の方程式に戻って $\Phi$ と $\Psi$ が独立、 $\Gamma^-$ と $\Theta$ だけが連成した形となり、 $k_*^{(S)} = 0$ では対応する $\Phi^{(S)}$ が0で、その代りに他の定関数、例えば $\Theta^{(S)}$ を任意に選ぶことが出来る。さらに、 $k_*^{(S)} = \pm\mathcal{G}$ のときは、(4.3)から $\kappa\mu H = 0$ または $\pm\mathcal{G} = 0 (= k_*^{(S)})$ となるから、あらためて考える必要はない。勿論、 $\Phi^{(1,2,3,4)}$ 、あるいはこれに代る定関数は、 $t = 0$ での初期関数 $\Phi_0, \Psi_0, \Gamma_0^-, \Theta_0$ によって表わされるけれども、一般の結果は徒らに複雑となるので省略する。

一方、方程式(3.10)~(3.13)は、 $\phi_i, \psi_i, \gamma^-_i$ の各成分とスカラー $\Gamma^+$ に対する10元の連

\* (4.2)により $k^{(S)}$ と $k_*^{(S)}$ との差は実数であるから、後者が実数か虚数かに従って、前者はそれぞれ実数または複素数となる。

\*\*  $\Phi, \Psi, \Gamma^-, \Theta$ は $\kappa$ と $t$ の関数、 $\Phi^{(1,2,3,4)}$ は $\kappa$ だけの関数であることに注意。

立て同じように解けるが、その詳細には立ち入らない。ただ p. 19 の脚註でもふれた通り、

$$\phi_i = \phi_i = \gamma_i^- = \Gamma^+ = 0 \quad (4.13)$$

はたしかに一つの解であって、これから  $\Gamma_{ij}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}$  の本質的な非対称性が指摘できることは Hall 効果の場合と全く同様である (上記脚註および II; § 3 参照)。

## 5. 特別な場合

前節によって、 $\nu$ ,  $\lambda$  の値,  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{\Omega}$  の方向, 初期分布関数をそれぞれ任意に与えたときに運動エネルギーと磁気エネルギーの分配を求める問題は、線形理論に関する限り、原理的に解かれたことになる。しかし、そのような一般的な形で、解 (4.9) ~ (4.12) からさらに計算を進めることはそれほど簡単ではない。そこで、さし当り定性的な傾向を知るために以下では解析の容易な特別な場合に限定しよう。

まず、I および II に準じ、(4.8) の意味で  $\vartheta = 0$  を仮定すると\*, (4.5) は、

$$\left. \begin{aligned} k_{*}^{(1,2)} &= \pm 2i(\kappa^2 \mu^2 H^2 + \chi^2 \Omega^2)^{1/2}, \\ k_{*}^{(3,4)} &= 0 \quad (2 \text{ 重根}) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

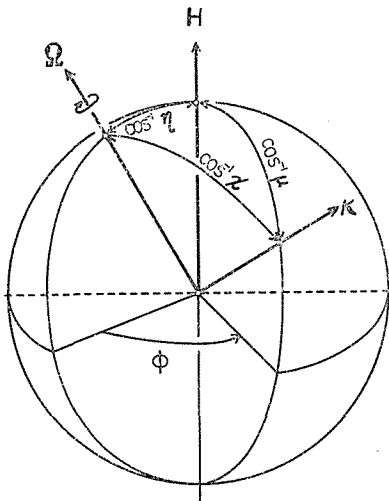


図2. 3ベクトル  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{\kappa}$  の相互関係

に帰着する (図 1, a). ただし,  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{\Omega}$  の交角の余弦を  $\eta$  とすれば、図 2 の幾何学的関係から、一般に

$$\chi = \eta \mu \pm \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \mu^2)} \cos \varphi \quad (5.2)$$

である。(複号は  $\kappa$  および  $\mathbf{\Omega}$  の属する象限の組合せに応じて適当に定める.)

つぎに、初期条件として、はじめ乱れのない系にエネルギー・スペクトル  $\Phi_0(\kappa)$  の速度攪乱を  $t = 0$  で突然に与えたとする。この時刻には磁場攪乱は存在しないから、明らかに  $\Psi_0 = \Gamma_0^- = \theta_0 = 0$  であり、

$$Z(\kappa) = (\kappa^2 \mu^2 H^2 + \chi^2 \Omega^2)^{1/2} \quad (5.3)$$

(すなわち  $k_{*}^{(1,2)} = \pm 2iZ$ ), および

$$D(\kappa, t) = \begin{cases} \exp(-2\nu\kappa^2 t), & \nu = \lambda \text{ のとき,} \\ 1 & R_H, R_{mH} \rightarrow \infty \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.4)$$

とおくと、以後の変化を表わす解は、

$$\Phi = \Phi_0 D \left[ 1 - \frac{\kappa^2 \mu^2 H^2}{2Z^2} (1 - \cos 2Zt) \right], \quad (5.5)$$

\* この仮定については、なお I; §§1, 3 参照。



$$\psi = \phi_0 D \left[ \frac{\kappa^2 \mu^2 H^2}{2Z^2} (1 - \cos 2Zt) \right], \quad (5.6)$$

$$\Gamma^- = i\phi_0 D \left( \frac{\kappa \mu H}{Z} \sin 2Zt \right), \quad (5.7)$$

$$\Theta = i\phi_0 D \left[ \frac{\kappa \mu \gamma^2 H \Omega}{Z^2} (1 - \cos 2Zt) \right], \quad (5.8)$$

と書かれる。ところで、速度攪乱と磁場攪乱の全エネルギーがそれぞれ

$$\frac{\overline{u^2}}{2} = 3 \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa, \quad \frac{\overline{h^2}}{2} = 3 \int_0^\infty F(\kappa) d\kappa \quad (5.9)$$

であるような動径スペクトル関数  $E(\kappa)$ ,  $F(\kappa)$  は\*,

$$E(\kappa) = \frac{\kappa^2}{6} \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\varphi d\mu, \quad F(\kappa) = \frac{\kappa^2}{6} \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Psi(\boldsymbol{\kappa}) d\varphi d\mu \quad (5.10)$$

によって求められるが、(5.2), (5.3)が示す通り、 $Z$ は $\mu$ と $\varphi$ の複雑な関数だから、 $\mathbf{H}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ の任意の向きについて、これらの積分を実行することは實際上むづかしい。初期スペクトル $\Phi_0$ も $\mu$ や $\varphi$ に依存するときは、事柄は一層複雑である。

その意味で、初期攪乱は等方的、従って $\Phi_0$ は $\kappa$ だけの関数で $\Phi_0(\boldsymbol{\kappa}) \equiv \Phi_0(\kappa)$ と仮定し、しかも特に、(i)回転軸が磁場に平行な場合 ( $\boldsymbol{\Omega} \parallel \mathbf{H}$ ,  $\eta = \pm 1$ ):

$$\chi^2 = \mu^2 \text{より}$$

$$Z = \mu(\kappa^2 H^2 + \Omega^2)^{1/2} (=Z_{\parallel} \text{とおく}), \quad (5.11)$$

(ii) 回転軸が磁場に直交する場合 ( $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{H}$ ,  $\eta = 0$ ):

$$\chi^2 = (1 - \mu^2) \cos^2 \varphi \text{より}$$

$$Z = \{\kappa^2 \mu^2 H^2 + \Omega^2 (1 - \mu^2) \cos^2 \varphi\}^{1/2} (=Z_{\perp} \text{とおく}) \quad (5.12)$$

について具体的に取扱う。

## 6. エネルギーの分配

上に述べたように、等方的な初期条件のもとでは、動径スペクトル関数(5.10)を求めるときに $\Phi_0$ を積分記号の外に出すことが出来る。この場合、 $t=0$ での値を指標0で表わすと、

$$E_0(\kappa) = \frac{2\pi}{3} \kappa^2 \Phi_0(\kappa); \quad \overline{u^2}_0 = 6 \int_0^\infty E_0(\kappa) d\kappa \quad (6.1)**$$

\*  $3E$ ,  $3F$ を動径スペクトル関数とする場合もあるが、ここでは従前の定義(I;§5, II;§4)に従った。

\*\* I;(30)参照, ただし $\Phi_0 = 2\phi_0^{(1)}$ に注意。

であるから、結局積分の結果は直接  $E_0(\kappa)$  を含む形に書かれるが、ここでは簡単のために、前節の (i), (ii) についても  $t \rightarrow \infty$  におけるエネルギー分配の度合を問題にしよう。いま、 $Z_{\parallel}$  または  $Z_{\perp}$  を (5.5), (5.6) に代入して  $\kappa$  空間で積分するとき、 $\cos 2Zt$  の因子をもつ項は  $t$  が増すほど空間的に急速な振動関数となって相殺し、 $t$  が大きいとその寄与は高次の微小量であることが予想される。これに似た事情は I, II や文献 4 の場合にも存在したが、付録 1 に示すように事実その通りであって、十分大きい  $t$  の値に対しては非振動項からの寄与を考えるだけでよく、以後それを指標  $\infty$  で表わす。

このことを考慮すると、(5.6), (5.10), (6.1) を用いて

$$F_{\infty}(\kappa, t) = \frac{\kappa^2 H}{8\pi} E_0(\kappa) D(\kappa, t) \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu^2}{Z^2} d\varphi d\mu \quad (6.2)$$

であり、これから  $\overline{h^2_{\infty}/2}$ ,  $\overline{u^2_{\infty}/2}$  およびその比

$$I_{\infty} = \overline{h^2_{\infty}/u^2_{\infty}} \quad (6.3)$$

を求めることは容易である。結果を無次元的に表示するため、

$$\left. \begin{aligned} \kappa l &= \xi, & tH/l &= \tau, & l\Omega/H &= \omega, \\ 3E(\kappa, t) &= \overline{lu^2_0} e(\xi, \tau), & 3F(\kappa, t) &= \overline{lu^2_0} f(\xi, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

とおけば、(6.2) に相当して

$$f_{\infty}(\xi, \tau) = e_0(\xi) d(\xi, \tau) J(\xi); \quad J = \frac{\xi^2}{8\pi} \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu^2}{z^2} d\varphi d\mu, \quad (6.5)$$

さらに

$$\frac{\overline{h^2_{\infty}}}{2} = \overline{u^2_0} \int_0^{\infty} f_{\infty}(\xi, \tau) d\xi, \quad (6.6)$$

$$\frac{\overline{u^2_{\infty}}}{2} = \overline{u^2_0} \int_0^{\infty} e_0(\xi) d(\xi, \tau) d\xi - \frac{\overline{h^2_{\infty}}}{2} \quad (6.7)$$

が順次に得られる。ここに、

$$lZ/H = z(\xi, \mu, \varphi), \quad D(\xi/l, l\tau/H) \equiv d(\xi, \tau) \quad (6.8)$$

とおいた。式 (6.5) に導入した  $J(\xi)$  は (エネルギー) 動径転換関数ともいふべきもので、球殻 ( $\xi, \xi + d\xi$ ) における運動エネルギーから磁気エネルギーの転換率を意味し、等方的初期条件のもとでは  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{\Omega}$  の方向だけできまる関数である。特に、(i) および (ii) の場合には初等積分によって、それぞれ

(i)  $\mathbf{\Omega} \parallel \mathbf{H}$  のとき:  $z^2_{\parallel} = \mu^2(\xi^2 + \omega^2)$  より

$$J_{\parallel}(\xi) = \frac{\xi^2}{2(\xi^2 + \omega^2)}, \quad (6.9)$$

(ii)  $\Omega \perp \mathbf{H}$  のとき:  $z_{\perp}^2 = \xi^2 \mu^2 + \omega^2(1 - \mu^2)\cos^2 \varphi$  より

$$J_{\perp}(\xi) = \frac{\xi}{2(\xi + \omega)}, \quad (6.10)$$

のように求められる (図 7)。

つぎに, 初期スペクトル  $e_0(\xi)$  として, II で用いた 2 つの代表的な分布をふたたび例にとろう。

(A) 線スペクトル:

$$e_0(\xi) = \frac{1}{2} \delta(\xi - 1). \quad (6.11)^*$$

$\xi = 1$  に集中した Dirac 殻モデルで, 狭いスペクトルの極限とみなされる。

(B) 指数型相関のスペクトル:

$$e_0(\xi) = \frac{8}{3\pi} \frac{\xi^4}{(\xi^2 + 1)^3}. \quad (6.12)^*$$

これは縦相関関数が指数曲線である場合に当り, 上と反対に広がった連続スペクトルをもつモデルである (図 4, 5, 8 参照)<sup>6)</sup>。ただし, 結果を簡単にするために, この型に対しては減衰を無視して  $d \equiv 1$  と仮定する。

これら両者を (6.9), (6.10) に組合せて (6.5) ~ (6.7) および (6.3) の手続きを実行すると, いずれも初等的な計算によって次の諸結果に達する。

(i)  $\Omega \parallel \mathbf{H}$  の場合:

$$(iA) \quad f_{\infty} = \frac{\xi^2}{4(\xi^2 + \omega^2)} d(\xi, \tau) \delta(\xi - 1) \quad (6.13)$$

$$\frac{\overline{h^2_{\infty}}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{1}{4(1 + \omega^2)} d(1, \tau) \quad (6.14)$$

$$\frac{\overline{u^2_{\infty}}}{2} = \frac{1 + 2\omega^2}{u_0^2 4(1 + \omega^2)} d(1, \tau) \quad (6.15)$$

$$H_{\infty} = \frac{1}{1 + 2\omega^2} \quad (\text{図 3}). \quad (6.16)$$

$$(iB) \quad f_{\infty} = \frac{4}{3\pi} \frac{\xi^6}{(\xi^2 + \omega^2)(\xi^2 + 1)^3} \quad (\text{図 4}), \quad (6.17)$$

$$\frac{\overline{h^2_{\infty}}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{3 + 9\omega + 8\omega^2}{12(1 + \omega)^3}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\overline{u^2_{\infty}}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{3 + 9\omega + 10\omega^2 + 6\omega^3}{12(1 + \omega)^3}, \quad (6.19)$$

\* 定義(6.4)を参照して,  $e_0(\xi)$  は  $\xi=0$  から  $\infty$  まで積分した値が 1/2 となるように規格化されている。

$$\Pi_{\infty} = \frac{3 + 9\omega + 8\omega^2}{3 + 9\omega + 10\omega^2 + 6\omega^3} \quad (\text{図 6}). \quad (6.20)$$

(ii)  $\Omega \perp \mathbf{H}$  の場合 :

$$(iiA) \quad f_{\infty} = \frac{\xi}{4(\xi + \omega)} d(\xi, \tau) \delta(\xi - 1) \quad (6.21)$$

$$\frac{\bar{h}^2_{\infty}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{1}{4(1 + \omega)} d(1, \tau) \quad (6.22)$$

$$\frac{\bar{u}^2_{\infty}}{2} = \frac{1 + 2\omega}{u_0^2} \frac{1}{4(1 + \omega)} d(1, \tau) \quad (6.23)$$

$$\Pi_{\infty} = \frac{1}{1 + 2\omega} \quad (\text{図 3}). \quad (6.24)$$

$$(iiB) \quad f_{\infty} = \frac{4}{3\pi} \frac{\xi^5}{(\xi + \omega)(\xi^2 + 1^3)} \quad (\text{図 5}), \quad (6.25)$$

$$\frac{\bar{h}^2_{\infty}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{3 + 10\omega^2 + 15\omega^4 - \omega K(\omega)}{12(1 + \omega^2)^3}, \quad (6.26)$$

$$\frac{\bar{u}^2_{\infty}}{2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{3 + 8\omega^2 + 3\omega^4 + 6\omega^6 + \omega K(\omega)}{12(1 + \omega^2)^3}, \quad (6.27)$$

$$\Pi_{\infty} = \frac{3 + 10\omega^2 + 15\omega^4 - \omega K(\omega)}{3 + 8\omega^2 + 3\omega^4 + 6\omega^6 + \omega K(\omega)} \quad (\text{図 6}); \quad (6.28)$$

$$K(\omega) = \frac{4}{\pi} \{1 + 4\omega^2 + (3 - 4 \ln \omega) \omega^4\}. \quad (6.29)$$

初期分布 A については最終的なエネルギー分配比  $\Pi_{\infty}$  を図 3 に, 初期分布 B については  $f_{\infty}(\xi)$  および  $e_{\infty}(\xi) = e_0(\xi) - f_{\infty}(\xi)$  を図 4, 5 に, また  $\Pi_{\infty}$  を図 6 に示した. 勿論この近似では, 減衰を無視する限り, 回転がなければ ( $\omega = 0$ ) 常に  $f_{\infty} = e_0/2$ ,  $\Pi_{\infty} = 1$ , すなわちすべての波数について完全な等分配である (I の場合). ところが,  $\omega \neq 0$  では各図に明らかなように  $\Pi_{\infty} < 1$  で, しかも  $\omega$  が増すほど等分配からの外れは大きい\*. これは結局転換関数  $J$  が 1 よりも小さい結果ということが出来る.

以上の解析では, 初めに速度攪乱だけを与えたが ( $\Pi_0 = 0$ ), 反対に磁場攪乱だけを与えれば ( $\Pi_0 = \infty$ ),  $e$  と  $f$ ,  $\bar{u}^2$  と  $\bar{h}^2$  の役割がそのまま入れ代って,  $\Pi_{\infty} > 1$  を得る. さらに一般には, 減衰を考慮しないとき,  $e_0 \geq f_0$  に応じ  $e_{\infty} \geq f_{\infty}$  であって, 各波数についての等分配が実現するのは初めから等分配が成立しているときに限られる (付録 2). いいかえると, Coriolis 力によって運動-磁気エネルギー間の相互転換効率は低下するわけである. その効果は, 上の例のように,  $\omega$  が小さいと  $\Omega \perp \mathbf{H}$  の場合の方が  $\Omega \not\perp \mathbf{H}$  の場合よりも著

\*  $\omega$  は (6.4) の定義から角速度ベクトル  $\Omega$  の向きに正負にかかわらず正, 従ってここに得た結果は回転が右回りか左回りかには関係しない.

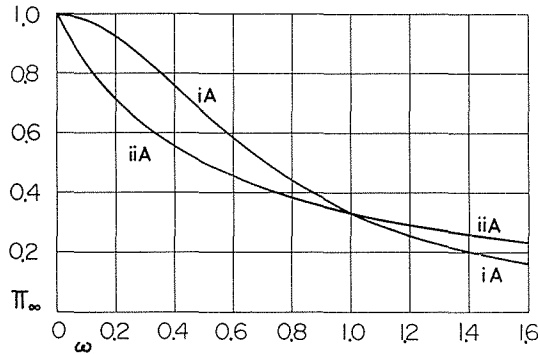


図3. エネルギー分配比の漸近値 (Dirac 殻モデル)  
 $iA: \Omega \parallel H$ ,  $iiA: \Omega \perp H$ .

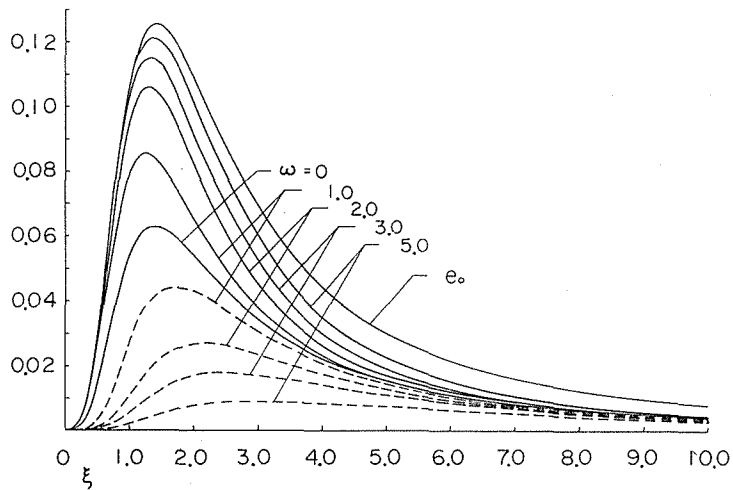


図4.  $\Omega \parallel H$  の場合の漸近スペクトル (指数型相関モデル)

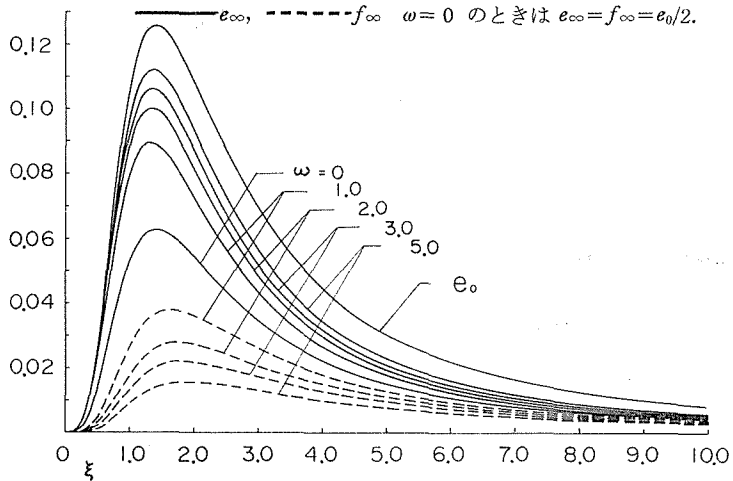
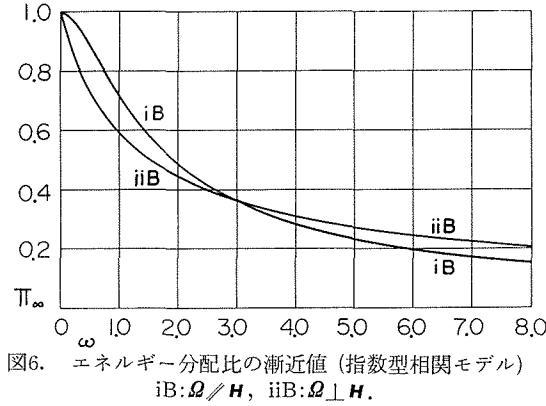


図5.  $\Omega \perp H$  の場合の漸近スペクトル (指数型相関モデル)

—  $e_\infty$ , - - -  $f_\infty$ ,  $\omega = 0$  のときは  $e_\infty = f_\infty = e_0/2$ .



しく、 $\omega$ が増すと共にこれが逆転する傾向をもつものと思われるが、 $\omega$ が大きいときは、一様性の仮定や非線形項の無視が保証されなくなるので、事情はもっと複雑であろう。  $\omega$ の大きさの程度は、例えば太陽では平均的推定値<sup>1)</sup>  $H \approx 4\text{m/sec}$ ,  $\Omega \approx 2.7 \times 10^{-6} \text{sec}^{-1}$  から、攪乱のスケール  $l$  を  $10^6\text{m}$  とすれば  $\omega \approx 0.6$ , また地核では  $H \approx 10^{-2} \text{m/sec}$ <sup>7)</sup>,  $\Omega \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$  より  $l = 10^3 \text{m}$  に対して  $\omega \approx 7.3$  となる。

## 7. Hall 効果の影響との比較

前節までの解析とその結果は、すでに述べた通り、Hall 効果を考慮したIIの場合と多くの点で似ている。特に、エネルギーの相互転換効率を低下させるという結論は全く同じであった。もともと Hall 効果は荷電粒子が磁力線のまわりに行なうサイクロトロン (または Larmor) 旋回に起因するものであり、いわゆる ジャイロ素子としての性質をもつ点で Coriolis力と共通しているから<sup>8)</sup>、この類似は勿論偶然ではない。一方、両者の間には、微視的と巨視的、電磁的と力学的のちがいによって乱れに対する影響の仕方におのずから相異のあることも当然である。そこで、この節ではそれらの異同を明らかにするため、両者の比較を試みよう。

Hall 効果があるときのスペクトル方程式は、その度合を表わすパラメーターを  $A$  として

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\Phi_{ij} - i\kappa\mu H(\Gamma_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ij}) = 0, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\kappa^2\right)\Psi_{ij} + i\kappa\mu(H\Gamma_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ij}) \\ = A\kappa\mu H\kappa_l(\epsilon_{ilm}\Psi_{mj} + \epsilon_{jlm}\Psi_{im}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Gamma_{ij} - i\kappa\mu H(\Phi_{ij} - \Psi_{ij}) = A\kappa\mu H\kappa_l\epsilon_{jlm}\Gamma_{im}, \quad (7.3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\tilde{\Gamma}_{ij} + i\kappa\mu H(\Phi_{ij} - \Psi_{ij}) = A\kappa\mu H\kappa_l\epsilon_{ilm}\tilde{\Gamma}_{mj}, \quad (7.4)$$

(II; (4) 式), 対応する縮約方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\Phi - i\kappa\mu H\Gamma^- = 0, \quad (7.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\kappa^2\right)\Psi + i\kappa\mu H\Gamma^- = 0, \quad (7.6)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Gamma^- - 2i\kappa\mu H(\Phi - \Psi) + A\kappa^2\mu H\Sigma = 0, \quad (7.7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda)\kappa^2\right]\Sigma - A\kappa^2\mu H\Gamma^- = 0 \quad (7.8)$$

(II; (9) 式)であった. ここに  $\Sigma$  は, (3.5) の  $\Theta$  と異なり  $r^*$  の  $\kappa$  方向への射影, すなわち

$$\Sigma = \kappa_k \gamma^+_{k/\kappa} \quad (7.9)$$

である (II; (8) 式参照).

方程式 (7.1) ~ (7.4) を (2.13) ~ (2.16) と比べると, いずれもジャイロ素子の特徴である  $\epsilon_{ijk}$  型因子を含むが,  $\Phi_{ij}$  と  $\Psi_{ij}$  に対して Hall 効果と Coriolis 力は対照的な役割をもっている. このように両者が全く分離した影響を及ぼすのは, MFD 近似がもともと電子の慣性を無視していることのあらわれに他ならない<sup>9)</sup>. また, Hall 効果の場合, 圧力と磁気圧の寄与を示す  $A_{ij}$  型因子が関係しない事情については, 第2節でふれた. これらの対照は, 縮約方程式 (7.5) ~ (7.8) と (3.6) ~ (3.9) で見かけ上消失するけれども, 異なる方向成分間のエネルギー伝達に関して本質的にちがった機構が存在することは明らかである. その定量的な議論は, 各成分ごとのさらに詳しい解析にまたなければならない.

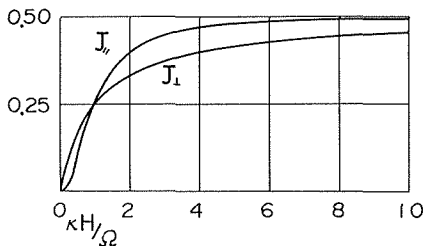
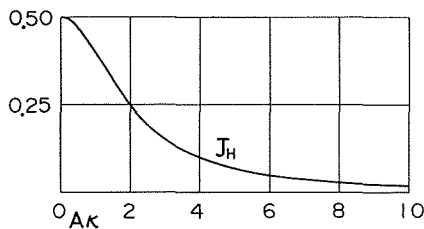


図7. 動径転換関数

つぎに, Hall 効果の項は  $A\kappa^2$  の次数で波数に関係するが, ジャイロ素子の軸は常に  $\mathbf{H}$  に平行して一定であるの対し, Coriolis 力の項は  $\Omega\kappa^0$  の次数で波数の大きさに関係しない反面, 軸の向きを任意にとることが出来る. このちがいは縮約方程式においても消失しないので, エネルギー転換の内容を異なったものとしている.

具体的には, (6.5) と同じ意味で Hall 効果がある場合の動径転換関数を  $J_H$  とすると, II; (18) より

$$J_H(\xi) = \frac{1}{2\left(\frac{A^2\xi^2}{4l^2} + 1\right)} \quad (7.10)$$

であって, (6.9), (6.10) の  $J_{\parallel}$ ,  $J_{\perp}$  と異なり

$\xi$ と共に減少する性質をもつ。比較のために、Hall効果については  $A^2\xi^2/l^2 = A^2\kappa^2$  を、Coriolis 力については  $\xi/\omega = \kappa H/\Omega$  を横軸として、 $J$  の変化を図7に示した。 $J_{\parallel}$ 、 $J_{\perp}$  の差は量的であるが、 $J_H$  とのちがいは質的で、波数に関し全く逆の傾向となる。すなわちHall効果では波数が大きい程、Coriolis 力では波数が小さい程エネルギーの転換がさまたげられる、いかえるとHall効果は乱れの高波数成分に、Coriolis 力は低波数成分にも影響するものであることが分る。

そこで、前節の数値例と同様の初期条件のもとに、 $t \rightarrow \infty$ におけるエネルギー配分を求めると、Dirac 殻モデル(6.11)に対しては

$$H_{\infty} = \frac{2}{2 + s^2} \quad (\text{II}; (25) \text{式}) \quad (7.11)$$

同じく指数型相関モデル(6.12)に対しては、減衰を無視して

$$f_{\infty} = \frac{4}{3\pi} \frac{\xi^4}{\left(\frac{s^2}{4}\xi^2 + 1\right)(\xi^2 + 1)^3} \quad (7.12)$$

$$H_{\infty} = \frac{12 + 2s}{12 + 34s + 18s^2 + 3s^3} \quad (\text{II}; (26) \text{式}) \quad (7.13)$$

を得る。ただし、 $s = A/l$ 。図8は(7.12)の  $f_{\infty}$  とこれに対応する  $e_{\infty}$  を、図9はエネルギー分配比(7.11)、(7.13)を示すが\*、さきの図3～6に比べて、上に述べた波数依存性の相異を明らかにうかがうことが出来る。また、Hall効果ではCoriolis 力のときと反対に、デル

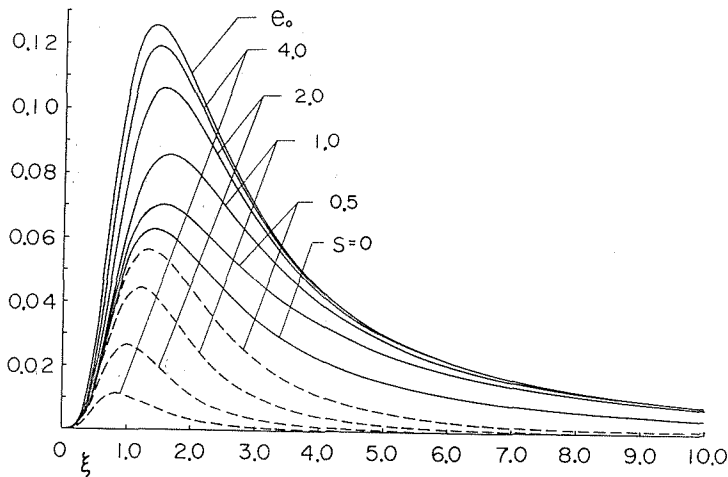


図8. ホール効果がある場合の漸近スペクトル(指数型相関モデル)  
 —  $e_{\infty}$ , - - -  $f_{\infty}$ ,  $s = 0$  のときは  $e_{\infty} = f_{\infty} = e_0/2$ .

\* II; Fig. 3で(7.13)に相当して描かれた破線のカーブは誤りで、図9のように訂正する。



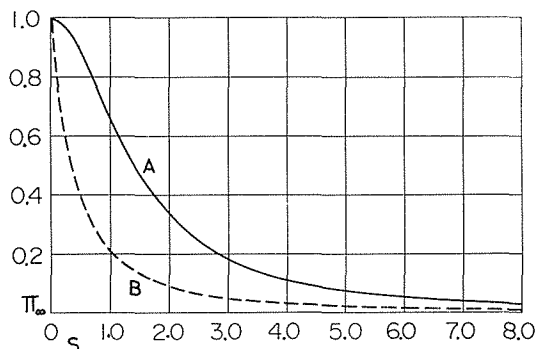


図9 エネルギー分配比の漸近値 (Hall 効果).  
A : Dirac 殻モデル, B : 指数型相関モデル.

タ・スペクトルの場合の方が等分配よりの外れの小さいことも注目に値しよう。

### 8. む す び

以上、一様な磁場を伴う回転系中の電磁乱流について、乱れの運動エネルギーと磁気エネルギーの間の相互転換をしらべた。すべての因子を考慮した完全な解析はむずかしいが Coriolis 力の影響だけを考える線形近似により、Hall 効果の吟味に対して用いたと同じ方法で大よその傾向が知られる。結果として、Coriolis 力のためにエネルギーの等分配が一般には成り立たなくなること、そしてその度合はパラメーター  $\omega (= l\Omega/H)$  が小さいときは  $\Omega // H$  の方が  $\Omega \perp H$  に比べて少なく、 $\omega$  が大きくなると逆転することなどが示された。さらに、Hall 効果の影響と詳しい比較を行なって、エネルギー転換の波数依存性が正反対であることを指摘した。しかし、いずれの効果もジャイロ素子としての特性をもち、運動一磁気エネルギー間の転換効率を低下させるように働らくことは、興味深い類似であると思われる。

おわりに、本研究は一部文部省科学研究費の援助によるものであることを附記する。

### 付 録 1

$e_{\infty}, f_{\infty}$  に  $\Phi, \Psi$  の振動項が寄与しないことの証明：式 (5.5), (5.6) における振動部分に着目し、対応する積分を無次元形で

$$m(\xi, \tau) = \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\xi^2 \mu^2}{z^2} \cos(2z\tau) d\varphi d\mu, \tag{1}$$

$$n(\tau) = \int_0^{\infty} e_0(\xi) d(\xi, \tau) m(\xi, \tau) d\xi \tag{2}$$

とおく。

(i)  $\Omega // H$  の場合

$z'^2 = \mu^2(\xi^2 + \omega^2)$  を (1) に代入すれば、直ちに積分されて

$$\begin{aligned}
 m(\xi, \tau) &= \frac{2\pi\xi^2}{\tau(\xi^2 + \omega^2)^{3/2}} \sin(2\tau(\xi^2 + \omega^2)^{1/2}) \\
 &= \frac{2\pi J_{\neq}}{\tau} \left[ \frac{\sin(2\tau(\xi^2 + \omega^2)^{1/2})}{(\xi^2 + \omega^2)^{1/2}} \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

を得るが, 第3辺の[ ]内はつねに有限であるから,  $\tau$ の大きい値に対して  $|m(\xi, \tau)|$  が  $J_{\neq}$ よりも  $O(\tau^{-1})$ の微量量となることは明らかである. また, (2)の積分が  $\overline{h^2_\infty}, \overline{u^2_\infty}$ に寄与しないことを陽に示すには, 積分に関する Schwartz の不等式<sup>10)</sup>を適用すればよい.

(ii)  $\mathbf{Q} \perp \mathbf{H}$  の場合

$$z^2 = \xi^2 \mu^2 + \omega(1 - \mu^2) \cos^2 \varphi \quad (4)$$

(簡単のため,  $z_\perp$ を単に  $z$ と書く)を(1)に代入し,  $z^2 \geq \xi^2 \mu^2$ に注意すると, 対称性を考慮して

$$|m(\xi, \tau)| \leq 8 \left| \int_{\mu=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos(2z\tau) d\varphi d\mu \right| \quad (5)$$

であり,  $\mu \geq 0, \cos \varphi \geq 0, \sin \varphi \geq 0$ の変域だけを考えれば十分である. いま,

$$z = \xi\mu + (z_* - \xi\mu) \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(z_* + \xi\mu) + \frac{1}{2}(z_* - \xi\mu) \cos 2\theta, \quad (6)$$

ただし

$$z_* = (\xi^2 \mu^2 + \omega^2(1 - \mu^2))^{1/2}, \quad (7)$$

とおいて積分変数を  $\varphi$  から  $\theta$  に変換すると,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2z\tau) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos(2z\tau) \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta \quad (8)$$

となるが, (4), (6)から多少の計算によって

$$0 \leq \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2z}{\sqrt{(z + \xi\mu)(z + z_*)}} \leq 2, \quad (9)$$

従って

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\pi/2} \cos(2z\tau) d\varphi \right| &\leq 2 \left| \int_0^{\pi/2} \cos((z_* + \xi\mu)\tau + (z_* - \xi\mu)\tau \cos 2\theta) d\theta \right| \\
 &= \pi \left| \cos((z_* + \xi\mu)\tau) J_0((z_* - \xi\mu)\tau) \right| \quad (10)
 \end{aligned}$$

を得る. ここに,  $J_0$ は0次の Bessel 関数である. さらに,  $|J_0((z_* - \xi\mu)\tau)| < 1$ , および

$$\left| \cos((z_* + \xi\mu)\tau) \right| < \left| \cos(\xi\mu\tau) \right| + \left| \sin(\xi\mu\tau) \right|$$

を用いれば、結局

$$\left| \int_0^{\pi/2} \cos(2z\tau) d\varphi \right| < \pi \left[ \left| \cos(\xi\mu\tau) \right| + \left| \sin(\xi\mu\tau) \right| \right] \quad (11)$$

に達する。これを  $\mu$  について積分して

$$\left| m(\xi, \tau) \right| < \frac{8\pi\tau}{\xi} \left[ \frac{1}{\xi} \left( \left| \sin(\xi\tau) \right| + \left| \cos(\xi\tau) - 1 \right| \right) \right] \quad (12)$$

右辺の [ ] 内は有限であるから、この場合も  $|m(\xi, \tau)|$  は  $O(\tau^{-1})$  より大きくないことが分る。

## 付 録 2

$e_0, f_0$  がともに 0 でないときのエネルギー分配：減衰を無視すれば、II; (20) (21) と同様に、

$$e_\infty = e_0(1 - J) + f_0J \quad (13)$$

$$f_\infty = e_0J + f_0(1 - J) \quad (14)$$

と表わされ、これから

$$e_\infty - f_\infty = (e_0 - f_0)(1 - 2J), \quad (15)$$

ここで  $2J < 1$  であるから、 $e_\infty - f_\infty$  の符号は  $e_0 - f_0$  のそれと一致する。

## 文 献

- 1) B. Lehnert: The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and a Coriolis force. *Quart. Appl. Math.* 12 (1955)321.
- 2) M. Ohji: Effect of a very strong uniform magnetic field on magneto-fluid dynamic turbulence. *J. Phys. Soc. Japan* 19: (1964)1430. (文中 I と略記.)
- 3) M. Ohji: Response of magneto-fluid dynamic turbulence to an imposed strong magnetic field in the presence of the Hall effect. *J. Phys. Soc. Japan* 21 (1966) 167. (文中 II と略記.)
- 4) 土屋良明: 回転系における乱流の特性 (I). 信州大工学部紀要 第24号 (1968)47.
- 5) G. K. Batchelor: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press (1953) Chap. 5.
- 6) 大路通雄: 等方性乱れの二重速度相関を近似する一函数. 九大応力研所報第15号 (1960) 139.
- 7) W. M. Elsasser: Hydrodynamic dynamo theory. *Rev. Mod. Phys.* 28 (1956) 135.
- 8) 高橋秀俊: 振動と回路. 岩波講座現代物理学 (1958).
- 9) T. G. Cowling: *Magnetohydrodynamics*. Interscience Publ. (1962) Chap. 2.
- 10) 寺沢寛一: 数学概論 (改訂版). 岩波書店 (1954) 第13章.

### Summary

#### **Magneto-Fluid Dynamic Turbulence in a Rotating System with a Uniform Magnetic Field**

Michio OHJI and Yosiaki TUTIYA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

The effect of an external uniform magnetic field  $\mathbf{B}$  on incompressible magneto-fluid dynamic turbulence is considered in the presence of a constant angular velocity  $\mathcal{Q}$  with which the whole system is rotating. It is assumed that the imposed field is strong enough for nonlinear coupling terms as well as reactions from the turbulence to be negligible. Regions are considered where the spatial inhomogeneity due to rotation plays no significant rôle. Under these simplifications, a set of linear differential equations governing the spectral tensors for turbulent energies and mechano-magnetic interactions is derived. The equations are combined to get the associated scalar form whose explicit solutions are obtained in a certain simple case. The partition of energy between the mechanical and magnetic modes is discussed for the two special cases: (1)  $\mathcal{Q} // \mathbf{B}$  and (2)  $\mathcal{Q} \perp \mathbf{B}$ . As an essential result, it is shown that the Coriolis force more or less destroys the tendency to equipartition by reducing the net flow of energy between the two modes. Furthermore, the analogy and contrast to the effect of the Hall current terms are discussed in detail.