

境界層を伴う不連続流

高田 治彦*・中村 輝直**

(昭和45年3月20日受理)

1. 緒 言

物体の後流に関する Helmholtz-Kirchhoff の不連続流理論は、d'Alembert のパラドックスを克服し、流体抵抗の問題に定性的な解釈を与えた点で大きな役割を果たした。しかし後流領域の圧力が一様流の静圧に等しいという非現実的な仮定を用いているため、実験的に得られる物体直後の圧力低下を表わすことができず、また後流の中が無限下流で無限大になるという不合理な結論に導かれるなど、理論として極めて不完全なものであった。

Helmholtz-Kirchhoff モデルのこのような欠陥を取り除き、より合理的な不連続流モデルへ修正、拡張しようとする試みが、1950年代半ばに Roshko^{1)~3)} (1954, 55) および Woods⁴⁾ (1955) によって相次いでなされた。両者の理論は、方法においてそれぞれ異っているが、物体直後の圧力（背圧）を任意に設定して計算できる点では共通しており、実験から得られる背圧の値を用いて物体まわりの圧力分布を計算した結果は、実験と極めて良い一致を示している。

しかし、これらの理論においても、後流の圧力や、さらに角のない物体の場合には剝離点の位置を理論から決定することができず、実験やあるいは適当な仮定を用いてそれらを定めなければならないという欠点は、依然として改善されぬまま残されている。このことは不連続流理論そのものの本質的な限界を示すもので、後流の圧力が後流のメカニズムに、剝離点の位置が物体表面の境界層のメカニズムに、それぞれ大きく依存していることを考え合せば、そういった微細構造に立ち入らず、あくまで巨視的な観点に留まる不連続流理論の立場からは、そのような困難は克服し得ないものであることはほとんど明らかであろう。

剝離点の位置を決定する問題に関しては、Schmieden⁵⁾⁶⁾ (1930, 32, 34) が円柱まわりの Kirchhoff 流について詳細な解析を行なった結果、 55° から 120° までの任意の剝離角で剝離することが物理的に可能であることを示した。このとき得られた最小剝離角 55° は自由流線の曲率と物体の曲率（この場合は円の曲率）とが等しくなる点の角度に対応しており、既に Schmieden 以前に Brodetsky⁷⁾ (1922) が上の条件に基づいて求めたものであるが、それが唯一の可能な解であることの理論的根拠はあいまいであった。

その後、Squire⁸⁾ (1934) および Imai⁹⁾ (1953) は剝離の現象が境界層の構造と深い関係に

* 機械工学教室 助教授

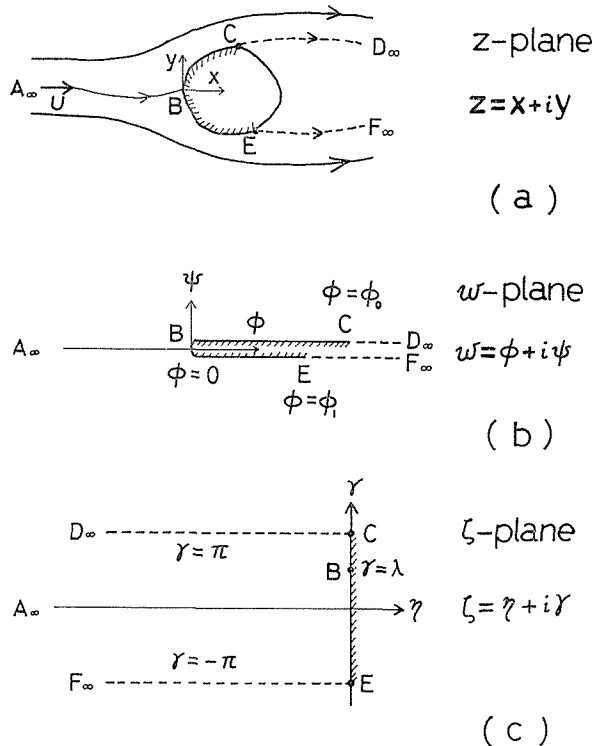
** 大学院生

あることから、不連続流理論に境界層理論を結合して剝離点の位置を一義的に決定しようという考えを提唱し、Brodetsky の条件に対する理論的な裏付けを行なった。Kawaguti¹⁰⁾ (1953)はImaiの示唆に基き、円柱まわりの Kirchhoff 流について層流境界層を考慮した数値計算を行なって、剝離角 58° という結果を得ている。この値は実験的に得られる層流剝離角 82° と著しく異っているが、その原因は Kawaguti 自身が指摘しているとおり、不連続流のモデルとして極めて非現実的な Kirchhoff の流れを用いたためにほかならない。したがって、より一層実際的な Roshko あるいは Woods のモデルを用いて同様の計算を行なえば、遙かに良い結果が得られるであろうことは容易に予想される。

本論文は、Woods の理論に層流境界層の理論を併用して剝離点の位置を決定する方法を論じ、円柱まわりの流れについて数値計算を行なったものである。

2. Woods の不連続流理論

はじめに Woods の不連続流理論の概要を述べておく。Woods の原論文は圧縮性流体について理論の展開を行なっているが、ここでは非圧縮性流体の場合に限って話を進めることにする。



第1図 等角写像 (Woods の方法)

いま速度 U の一様流中に任意形状の物体が置かれており (第 1 図 (a)), 流れは C 点および E 点で剝離して無限後方 D_∞ , F_∞ に連なる後流領域を形成しているものとする. 前方よどみ点 B を原点, 一様流の方向を x 軸として, 物理平面

$$z = x + iy \quad (1)$$

をとる. ここで速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ を用いて, 複素ポテンシャル

$$w = \phi + i\psi \quad (2)$$

を定義し, z 平面から w 平面へ写像すれば (第 1 図 (b)) 複素共役速度 $qe^{-i\theta}$ が,

$$\frac{dw}{dz} = qe^{-i\theta} \quad (3)$$

によって与えられる. この写像をうまく行なうために

$$f = \Omega + i\theta = \ln\left(\frac{U}{q}e^{i\theta}\right) = \ln\left(U\frac{dz}{dw}\right), \quad (4)$$

ただし

$$\Omega = \ln\left(\frac{U}{q}\right), \quad (5)$$

なる関数 f を導入すると, f は z 平面, w 平面, およびこれらから等角写像して得られる任意の平面で Laplace 方程式

$$\Delta^2 f = 0 \quad (6)$$

を満足する. そこで上面および下面の剝離点における ϕ の値を, それぞれ ϕ_0 , ϕ_1 とするとき,

$$w = 4a\left(i \sinh \frac{1}{2}\zeta + \sin \frac{1}{2}\lambda\right)^2, \quad (7)$$

$$\sin \frac{1}{2}\lambda \equiv \frac{\sqrt{\phi_1} - \sqrt{\phi_0}}{\sqrt{\phi_1} + \sqrt{\phi_0}}, \quad (8)$$

$$a \equiv \frac{1}{16}(\sqrt{\phi_1} + \sqrt{\phi_0})^2 \quad (9)$$

なる変換を行ない, ζ 平面における $\Delta^2 f = 0$ の解を求めると

$$f(\zeta) = i\theta_0(-\pi) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma^* = -\pi}^{\pi} \ln \left\{ \frac{\sin \frac{1}{4}(\gamma^* + i\zeta)}{\cos \frac{1}{4}(\gamma^* - i\zeta)} \right\} d\theta_0(\gamma^*)$$

$$-\frac{\cosh \frac{1}{2}\zeta}{2\pi} \int_0^{-\infty} \left\{ \frac{\Omega_+(\eta^*)}{\cosh \frac{1}{2}\eta^* + i \sinh \frac{1}{2}\zeta} + \frac{\Omega_-(\eta^*)}{\cosh \frac{1}{2}\eta^* - i \sinh \frac{1}{2}\zeta} \right\} d\eta \quad (10)$$

として得られる(第1図(c)). ただし, ここで θ_0 は物体表面上における θ の値, Ω_+ , Ω_- はそれぞれ上方および下方の自由流線上における Ω の値を表わす.

結局, 物体表面の前方よどみ点から剝離点までの形 $\theta_0(\gamma^*)$ と, 自由流線上での速度分布(あるいは圧力分布) $\Omega_{\pm}(\eta^*)$ が与えられれば $f(\zeta)$ が求まり, 解が得られることになる. 特にゼロ流線 $\phi = 0$ 上では, (7)式から

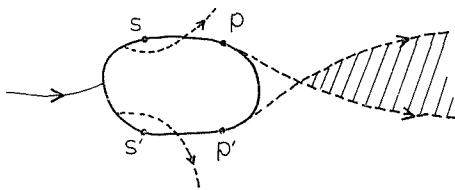
$$\phi = 4a \left(\sin \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\lambda \right)^2 \quad (11)$$

となるから, $\gamma = \lambda$ は前方よどみ点を, $\gamma = \pm\pi$ は剝離点を与えることがわかる. また, 物体表面に沿っての距離 s は, 基準長さを c として無次元化して表わすと,

$$\frac{s(\phi)}{c} = \int^{\phi} \frac{d\phi}{cq} = \frac{1}{cU} \int^{\phi} e^{\theta} d\phi \quad (12)$$

となるから, (11)式を用いて変数を γ に変換し, 前方よどみ点 B から距離をはかることにすれば,

$$\frac{s(\gamma)}{c} = \frac{4a}{cU} \int_{\lambda}^{\gamma} e^{\theta(\gamma)} \left(\sin \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\lambda \right) \cos \frac{1}{2}\gamma d\gamma \quad (13)$$



第2図 物理的に実現不可能な剝離の2つのタイプ

として計算される.

ところで剝離点の位置を与えて(10)式を解いたとき, それが物理的(ないしは幾何学的)に実現可能であるためには, 次の2つの条件を満さなければならない.

(i) 自由流線が剝離点以後で物体を横切らないこと. このためには剝離点は物体表面上のある点 S よりも後になければならない

い(第2図).

(ii) 自由流線が物体背後で互に交わらないこと. このためには剝離点は物体表面上のある点 P よりも前になければならない.

これらの条件から, それぞれ次の関係式を満足することが要求される.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta_0(\gamma) d\gamma}{1 - \sin \frac{1}{2}\gamma} + \int_0^{-\infty} \left\{ \frac{\Omega_+(\eta)}{\cosh \frac{1}{2}\eta - 1} + \frac{\Omega_-(\eta)}{\cosh \frac{1}{2}\eta + 1} \right\} d\eta \geq 0, \quad (14)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(\gamma) \sin \frac{1}{2} \gamma d\gamma - \int_0^{-\infty} (\Omega_+ + \Omega_-) \cosh \frac{1}{2} \eta d\eta \geq 0. \quad (15)$$

このほかに、 $\theta = 0$ の直線が x 軸に平行であるという付帯条件から

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(\gamma) d\gamma - \int_0^{-\infty} (\Omega_+ - \Omega_-) d\eta = 0 \quad (16)$$

となることが要求される。

特に、(14)式で等号をとれば S 点で剝離する場合に相当し、このとき自由流線の曲率は剝離点で有限であり、かつ物体の曲率に等しいという Brodetsky の条件を満している。また後流が無限後方で有限巾を持つという条件を与えれば、(15)式は等号をとる必要がある。

自由流線上の速度分布は原理的には任意に仮定して良いが、物理的な要請から、十分下流で流線がほぼ平行になり、物体直後で低い圧力を与えるようなものでなければならぬ。このようなモデルは一様流中に湧き出し(ソース)を置くことによって得られ、 Ω_{\pm} は

$$\Omega_{\pm} = \frac{-K}{1 + b^2 \sinh^2 \frac{1}{2} \eta} \quad (17)$$

によって与えられる。定数 K は、剝離点では $\eta = 0$ であるから $\Omega_S \equiv \Omega_{\pm}(0) = -K$ となることから、次式によって背圧係数(すなわち剝離点における圧力係数) C_{ps} と関係づけられる。

$$C_{ps} \equiv \frac{p_s - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{q_s^2}{U^2} = 1 - e^{-2\alpha_s} = 1 - e^{2K}. \quad (18)$$

ここで、 ρ は密度、添字 s は剝離点における値を表わす。(17)式の分母の定数 b は任意でなく、有限巾後流の条件から(15)式で等号を用いれば

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2\pi K} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(\gamma) \sin \frac{1}{2} \gamma d\gamma \quad (19)$$

によって計算される。

(17)式を、(10)、(14)および(16)式に代入すると、それぞれ

$$f(\zeta) = i\theta_0(-\pi) - \frac{K}{1 + b \cosh \frac{1}{2} \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma^* = -\pi}^{\pi} \ln \left\{ \frac{\sin \frac{1}{4}(\gamma^* + i\zeta)}{\cos \frac{1}{4}(\gamma^* - i\zeta)} \right\} d\theta_0(\gamma^*), \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta_0(\gamma) d\gamma}{1 - \sin \frac{1}{2} \gamma} - Kb \geq 0, \quad (21)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(\gamma) d\gamma = 0 \quad (22)$$

を得る．このうち(22)式は上下対称の物体では自動的に満たされる．

実際に数値計算を行なうには逐次近似法を用いる．まず背圧係数 C_{ps} と剝離点位置 $(s/c)_{\tau=\pi}$ を任意に与えれば，(18)式により K が定まる．次に物体表面上の速度 $q = q_0(\gamma)$ と λ の値（すなわち前方よどみ点における γ の値）を適当に仮定して(5)式から $\Omega(\gamma)$ を求め，さらに(13)式へ Ω を代入して $s/c(\gamma)$ を計算し，既知の曲率半径 $R(s)$ から $R(\gamma)$ を求める．一方，

$$\begin{aligned} d\theta_0(\gamma) &= \frac{d\theta_0}{ds} \frac{ds}{d\phi} \frac{d\phi}{d\gamma} d\gamma \\ &= -\frac{4a}{R(\gamma)q_0(\gamma)} \left(\sin \frac{1}{2} \gamma - \sin \frac{1}{2} \lambda \right) \cos \frac{1}{2} \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられるから，この式へ $R(\gamma)$ ， $q_0(\gamma)$ の値を代入して(22)式を用いれば新しい λ の値が，次いで(19)式を用いれば b の値が計算される．最後にこの b と(23)式の $d\theta_0(\gamma)$ を(20)式へ代入すれば物体表面で $f(\gamma)$ が計算され，その実数部分として $\Omega(\gamma)$ が，したがって(5)式から新しい $q_0(\gamma)$ が求められ逐次近似法の第1ステップが完了する．以下この手順を繰返しほどせば，たいいていの場合数ステップの繰返しで十分な精度の結果が得られる．この際，各ステップで必要条件式(21)を用いて物理的に可能な解か否かをチェックする．

3. 層流境界層理論による剝離点の決定

上述の Woods の理論では，背圧係数 C_{ps} と剝離点位置 $(s/c)_{\tau=\pi}$ の値を任意に仮定して物体表面の速度分布が計算された．次に，この速度分布を境界層外側の流れに仮定すると層流境界層理論によって層流剝離点の位置が計算される．こうやって求められた剝離点位置は，一般に最初仮定されたものと異っているであろう．そこで計算から得られた剝離点位置を新しく仮定して再び Woods の理論を用い，以下同様の手順を繰返し行なえば，最後には仮定した剝離点と，計算から得られた剝離点とが一致する点が見出されるであろう．このようにして，背圧係数 C_{ps} のある値に対して(物理的に妥当な)層流剝離点の位置がただひとつ確定する．

次節に述べる数値計算では藤本の近似計算式¹¹⁾を用いて境界層の計算を行なっている．これは境界層外側の速度分布 $q_0(s)$ が知られたとき，運動量厚さ θ を

$$\frac{\theta^2}{\nu} = \frac{0.47}{q_0^6} \int_0^S q_0^5 ds$$

によって算定し、無次元のパラメーター

$$\lambda_0 = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dq_0}{ds}$$

が $\lambda_0 = -0.157$ のとき剝離するという条件を用いて剝離点位置を定めるものである。

4. 円柱のまわりの流れの数値計算

第3図は以上の方法を用いて円柱まわりの流れについて数値計算を行なった結果を示したものである。横軸に前方よみ点からはかった角度 θ を、縦軸に圧力係数 $C_p = (p - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho U^2$ をとっている。図中の θ_1 および θ_2 の曲線は、それぞれ Woods の理論における最小および最大剝離角（第2図の S 点および P 点の角度）を背圧係数 C_{ps} に対してプロットしたもので、これら2本の曲線に囲まれた領域が物理的に実現可能な範囲を示している。たとえば $C_{ps} = 0$ (Kirchhoff 流) の場合には、 $\theta_1 = 55^\circ$ 、 $\theta_2 = 124^\circ$ で Schmieden の求めた結果にほとんど一致している。一般に C_{ps} が低くなるに従って θ_1 は増大し、 θ_2 は減少する傾向を示し、 $C_{ps} = -1.5$ で両者は等しくなる（すなわち S 点と P 点が一致する）。したがって Woods の理論によれば、円柱まわりの流れでは $C_{ps} < -1.5$ の状態は物理的に実現しないことになる。

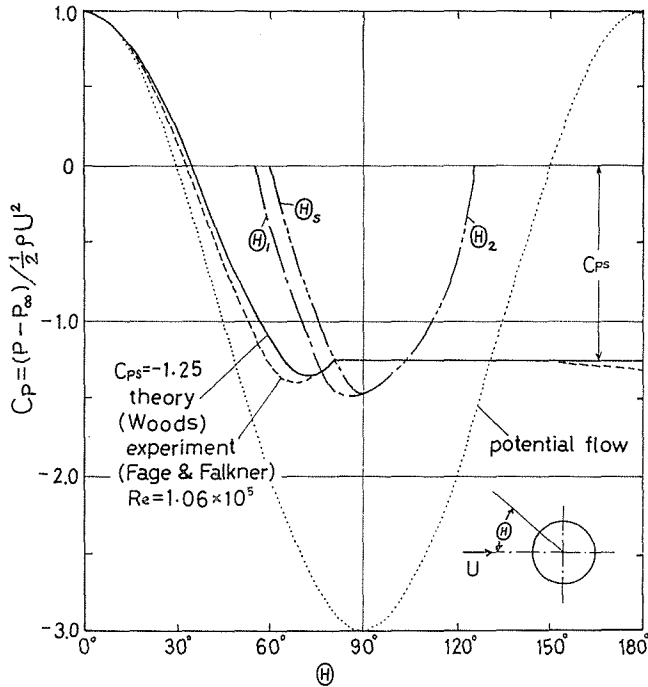
また、 θ_s の曲線は第3節で述べた方法によって計算した層流境界層の剝離角を C_{ps} に対してプロットしたもので、やはり $C_{ps} = 0$ のとき $\theta_s = 60^\circ$ となって Kawaguti の計算結果とほぼ一致する。実際の層流剝離の流れでは $C_{ps} = -1.25$ であるが、この値を用いて計算した層流剝離角は $\theta_s = 81^\circ$ となり、実験的に得られた θ_s の値（たとえば Fage and Falkner¹²⁾ (1931) によれば $R_e = 1.06 \times 10^5$ で $\theta_s = 82^\circ$ ）とほとんど完全な一致を示している。なお比較のため、その場合の圧力分布曲線が、計算と実験のそれぞれの結果について図示されている。

5. 層流剝離に関する考察

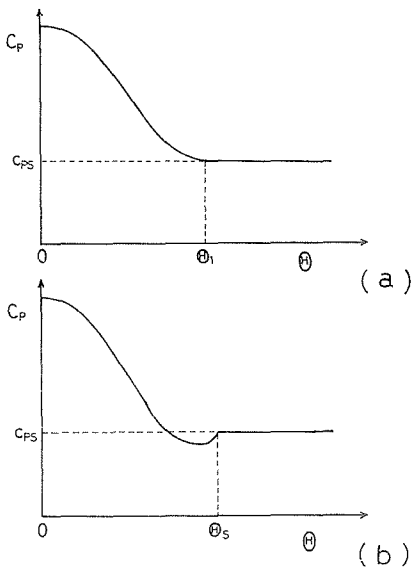
Squire, Imai および Woods はそれぞれ独立に層流剝離点が Brodetsky の条件を満たす点でなければならないことを数学的に証明している。このことは、第3図で θ_s 曲線が θ_1 曲線に一致すべきことを要請しているが、にもかかわらず実際には、 θ_s の方が θ_1 よりも常に数度ばかり大きな値を示している。同様な食い違いは Kawaguti の計算結果にも現われたが、Kawaguti は Imai の見解に従って、本来両者は一致すべきであるが、近似的な境界層理論を用いたために誤差が生じたものとみなしている。

しかし、そのような解釈は果して正しいであろうか。この食い違いはもっと本質的なものではなからうか。こういった疑問から、今一度 Squire, Imai, Woods らの証明を検討し直す必要が生じて来る。

Imai の理論によれば、もし剝離点が Brodetsky の条件を満たしていないとするならば、その点で速度勾配 dq/ds が $-\infty$ になり、したがって Pohlhausen の形状因子 $A = \frac{\partial^2 q}{\partial s^2}$ (\ddot{q} :



第3図 円柱まわりの流れ



第4図 C_p 分布曲線の2つのパターン
 (a) θ_1 で剝離する場合
 (b) θ_s で剝離する場合

排除厚さ) が $-\infty$ になる. ところが剝離は $A=-12$ の点で起るのであるから, それより前であればならず, そこで前へ前へと進んで行き, 遂に Brodetsky の条件を満す点 θ_1 に到達する, という論理である. この論法は一見もっともらしい. しかし θ_1 点では $dq/ds = 0$, すなわち $A=0$ であるから, その点ではまだ剝離は生じないはずである. そうなると剝離点は θ_1 より後でなければならないことになり矛盾が生じる. また, Squire や Woods の証明も表現に違いこそあれ, 考えの筋道は同じであるから, やはり同様の矛盾が生じてくる.

上に述べたような事情は, 不連続流理論から得られる C_p 分布曲線の形を眺めてみると一層良く理解されるであろう. θ_1 点で剝離すると仮定した場合の C_p 曲線の形は, 第4図 (a) に示したように極小点を持たず, 単調に減少して $\theta = \theta_1$ で $C_p = C_{ps}$ の直線に滑らか

に接続している。このとき速度勾配 dq/ds は常に正または 0 であるから、剝離は生じないことになる。剝離が生じるためには、第 4 図 (b) に示したように C_p 曲線は極小点を持たねばならないが、そうすると剝離点 $\theta = \theta_s$ では C_p 曲線は有限の角で折れ曲ることになり $dq/ds = -\infty$ になる。

かくして、 $dq/ds = -\infty$ の困難を避けようとするれば剝離が生じないという新たな困難が生まれ、剝離が生じることを要求すれば $dq/ds = -\infty$ となることは避けられないという事態に立ち到る。このような矛盾は、不連続流モデルが現実の剝離流の極めて不完全な描像でしかない事実に起因するものである。それゆえ、数学的な厳密性を必要以上に追求することは無意味であるし、ある場合にはかえって物理的な事実と合致しない結論を導き出す恐れもある。

上の場合、 $dq/ds = -\infty$ の困難には目をつぶっても、 C_p 分布曲線の形と剝離点の位置とが実験結果と良く一致する第 4 図 (b) の立場を採用することが、少なくとも実用的に意味のあることであると思われる。実際には、剝離はある有限な範囲内で起っていると考えられるから、幾何学的な一点を問題にして、そこで dq/ds が無限大になるとか、ならないとか議論することがそもそも物理的には無用である。

以上の考察から、物理的に妥当な層流剝離点は Brodetsky の条件を満す θ_1 の点ではなく、 θ_s の点でなければならぬことが結論される。

おわりに、本研究に対して多大の御援助と御助言を頂いた本学大路通雄教授、同土屋良明助手、ならびに図面作成に御協力頂いた大学院生池田敏彦君に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) Anatol Roshko : A New Hodograph for Free-Streamline Theory, NACA TN 3168 (1954).
- 2) Anatol Roshko : On the Drag and Shedding Frequency of Two-Dimensional Bluff Bodies, NACA TN 3169 (1954).
- 3) Anatol Roshko : On the Wake and Drag of Bluff Bodies, J. Aero. Sci., Vol. 22, pp 124-132 (1955).
- 4) L. C. Woods : Two-Dimensional Flow of a Compressible Fluid past Given Curved Obstacles with Infinite Wakes, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 227, pp 367-386 (1955).
- 5) C. Schmieden : Die unstetige Strömung um einen Kreiszyylinder, Ing. Arch., Bd. 1, s. 104-109 (1930).
- 6) C. Schmieden : Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetige Strömungen, Ing. Arch., Bd. 3, s. 356-370 (1932), und Bd. 5, s. 373-375 (1934).
- 7) S. Brodetsky : Discontinuous Fluid Motion past Circular and Elliptic Cylinders, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 102, pp 542-553 (1922).
- 8) H. B. Squire : On the Laminar Flow of a Viscous Fluid with Vanishing Viscosity, Phil. Mag., Vol. 17, pp 1150-1160 (1934).
- 9) Isao Imai : Discontinuous Potential Flow as the Limiting Form of the Viscous Flow for Vanishing Viscosity, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 8, pp 399-402 (1953).

- 10) Mitutosi Kawaguti : Discontinuous Flow past a Circular Cylinder, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 8, pp 403-406 (1953).
- 11) 藤本 武助 : 流体力学(改著), 養賢堂, pp 197-198 (1965).
- 12) A. Fage and V. M. Falkner : Further Experiments on the Flow around a Circular Cylinder, Rep. and Mem. 1369 (1931).

Summary

Discontinuous Flow with Laminar Boundary Layer.

Haruhiko TAKADA and Terunao NAKAMURA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

Woods' theory of the discontinuous flow past an obstacle is extended by making use of laminar boundary layer theory. This treatment enables one to determine the position of laminar separation point theoretically for arbitrary values of the base pressure coefficient C_{ps} . As an example, numerical calculations are made of flows past a circular cylinder. When C_{ps} is experimentally chosen to be -1.25 , the separation angle of 81° is obtained. This value agrees very well with the experimental results, but is some degrees greater than that calculated under Brodetsky's condition which requires that the free-streamline at separation should have the same curvature as that of the body surface. The justification of Brodetsky's condition which was asserted by Squire, Imai and Woods independently is discussed and criticized.