

インボリュートフェースギヤの研究

両 角 宗 晴*

(昭和45年5月30日受理)

1. 緒 言

一般に交叉軸にはカサ歯車, 食違軸にはハイポイドギヤ, スピロイドギヤ, ヘリコンギヤまたはAVA歯車などが用いられるが, これら歯車を歯切りするためには高価な特殊歯切機械を必要とする. これに対して, フェースギヤは普通の歯車形削盤とピニオンカッタを用いて容易に歯切りすることが出来, しかも組立調整も容易であるので, カサ歯車, ハイポイドギヤ, スピロイドギヤ, ヘリコンギヤ, AVA歯車などの代りに交叉軸歯車または食違軸歯車として十分の実用性を持っている. しかしこのフェースギヤの外径は歯先尖りにより, また内径は歯元切下げと, ピニオンカッタの刃元による刃元干渉により制限を受け, フェースギヤの歯巾の合理的決定ということが重要な問題となる. これら問題が完全に解決されるならば, 交叉軸歯車および食違軸歯車としてのフェースギヤの応用方面は, はかり知れぬものがある. このフェースギヤはアメリカのフェローズ社により発表されて以来, フェースギヤの外径と内径の制限について多くの研究が行なわれてきたが^{1)~6)}, 実際にフェースギヤを設計するためには不十分と思われる. そこで筆者はオフセンタ形フェースギヤについての厳密な解析的考察を行ない, フェースギヤの歯形方程式, 接触線と接触軌跡面の方程式を求め, フェースギヤの歯先尖り限界, 歯元切下げ限界, 刃元干渉限界を明らかにし, オフセンタ形インボリュートフェースギヤの設計に必要な図表を作成し, さらにその特別の場合として, オフセット量を零にしたオンセンタ形フェースギヤの図表も作成し, これら図表を用いて設計したフェースギヤを, 試作のフェースギヤ切削装置により歯切りして, 理論の検討を行なった.

2. 使 用 記 号

- m : モジュール
- α_c : ピニオンの基準圧力角 (工具圧力角)
- α_k : ピニオンの歯先圧力角
- α : ピニオン歯形上の任意の点の圧力角
- ϕ : ピニオンの回転角
- N_1 : ピニオンおよびピニオンカッタの歯数
- N_2 : フェースギヤの歯数

* 精密工学教室 教授

i : 歯数比 ($= N_2/N_1$)

r_g : ピニオンの基礎円半径 ($= \frac{1}{2} m N_1 \cos \alpha_c$)

r_1 : ピニオンの基準ピッチ円半径 ($= \frac{1}{2} m N_1$)

r_k : ピニオンの外半径

r : ピニオンの任意半径

x : ピニオンの転位係数

h_k : 標準歯車の歯末のたけを m で割った値で, $h_k = 1$ (並歯), $h_k > 1$ (高歯),
 $h_k < 1$ (低歯)

a : オフセット量

r_2 : フェースギヤの転がり円半径 $\left[= \sqrt{\left(\frac{1}{2} m N_1 i\right)^2 + a^2} \right]$

R_u : フェースギヤの歯元切下げ限界半径

R_d : フェースギヤの刃元干渉限界半径

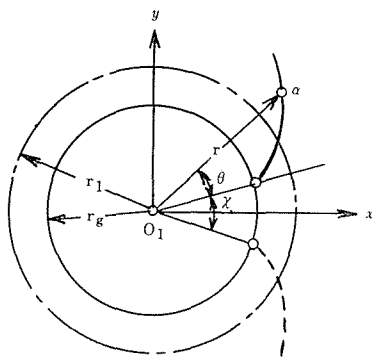
R_k : フェースギヤの歯先尖り限界半径

b : フェースギヤの歯巾

β : $\left[= \cot^{-1} \frac{r_1 i}{a} = \cot^{-1} \frac{\frac{1}{2} N_1 i}{\left(\frac{a}{m}\right)} \right]$

ε : 同時嚙合歯数

3. ピニオンとフェースギヤの歯面の方程式



第1図 インボリュート平歯車の軸直角断面

する。しかるに

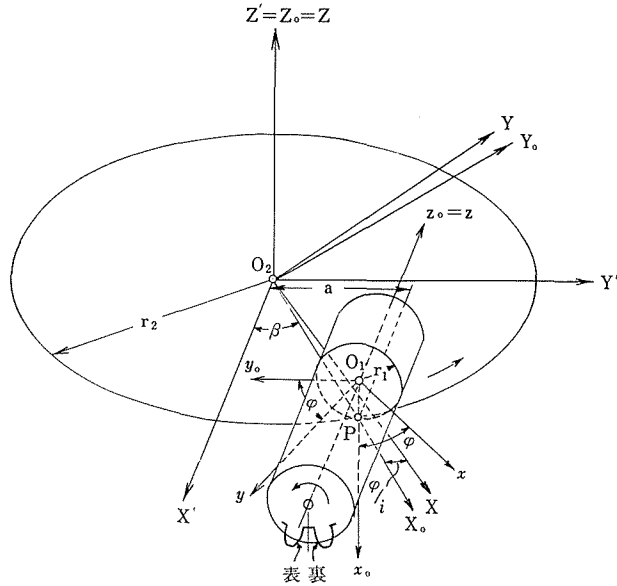
$$r = r_g \sec \alpha,$$

$$\theta = \text{inv } \alpha,$$

第1図はインボリュート平歯車の軸直角断面を示し, x 軸が歯みぞの中央を通るように定めたとき, この歯車の歯面の方程式は次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \pm \left(\theta + \frac{\chi}{2} \right), \\ y &= r \sin \pm \left(\theta + \frac{\chi}{2} \right), \\ z &= S. \end{aligned} \right\}$$

ただし複号は実線で示す歯面(表歯面), 点線で示す歯面(裏歯面)の順とし, χ は基礎円歯隙の角, S は歯すじ方向の値を与えるパラメータと



第2図 オフセンタ形フェースギヤと座標軸

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv}\alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \quad \Bigg|$$

故に、すぐばのインボリュート平歯車の歯面の方程式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv} \alpha \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ y &= r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv} \alpha \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ z &= S. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし複号は表歯面，裏歯面の順とする。

つぎに第2図において直交座標軸 (x_0, y_0, z_0) , (X', Y', Z') , (X_0, Y_0, Z_0) は静止座標軸で，ピニオンの基準ピッチ円とフェースギヤの転がり円との切点 P を X_0 軸と x_0 軸が通るように定めてある。 Z' 軸はフェースギヤ軸と一致し， X' 軸はピニオン軸 z に平行であり，ピニオン軸を z 軸とする座標軸 (x, y, z) はピニオンに固着して回転し，フェースギヤ軸を Z 軸とする座標軸 (X, Y, Z) はフェースギヤに固着して回転するものとする。ピニオン軸 z とフェースギヤ軸 Z との距離 a がオフセット量である。いまピニオンを第2図に示す方向に φ だけ回転させた時のピニオンの歯面を静止座標系 (x_0, y_0, z_0) で表わすと，

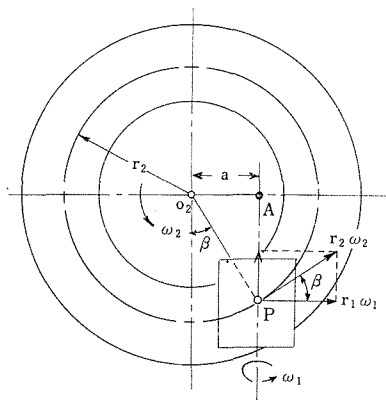
$$x_0 = r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \quad \Bigg|$$

$$y_0 = r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \quad (2)$$

$$z_0 = S.$$

これを静止座標系 (X_0, Y_0, Z_0) で表わすと

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= r_2 \cos^2 \beta + a \sin \beta - r_g \sec \alpha \sin \\ &\quad \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \beta - S \cos \beta, \\ Y_0 &= -r_2 \cos \beta \sin \beta + a \cos \beta - r_g \sec \alpha \sin \\ &\quad \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \beta + S \sin \beta, \\ Z_0 &= r_1 - r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



第3図 オフセンタ形フェースギヤの転がり円

これは静止座標 (X_0, Y_0, Z_0) に対するピニオン歯面の運動による曲面群である。この場合 r_2 はフェースギヤの転がり円半径であり、ピニオンとフェースギヤの回転角速度をそれぞれ ω_1, ω_2 とすると、第3図に示すごとく、ピニオンの基準ピッチ円とフェースギヤの転がり円との切点 P における速度は、それぞれ $r_1\omega_1, r_2\omega_2$ であり、 $r_2\omega_2$ の歯すじ直角方向の分速度 $r_2\omega_2 \cos \beta$ が $r_1\omega_1$ に等しくなければならないから次式が成立する。

すなわち

$$r_2\omega_2 \cos \beta = r_1\omega_1.$$

これより

$$\cos \beta = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} = \frac{r_1 i}{r_2} \quad \text{を得る.}$$

しかるに $\sin \beta = \frac{a}{r_2}$ であるから、両式から β を消去すると

$$r_2 = \sqrt{(r_1 i)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} m N_1 i\right)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} m N_2\right)^2 + a^2}. \quad (4)$$

したがって第3図において $\overline{PA} = \frac{1}{2} m N_1 i = \frac{1}{2} m N_2$ であることがわかるから次式を得る。

$$\beta = \cot^{-1} \frac{\frac{1}{2} m N_1 i}{a} = \cot^{-1} \frac{\frac{1}{2} m N_2}{a}. \quad (5)$$

さてピニオンが φ だけ回転すると、フェースギヤは φ/i だけ回転するから、フェースギヤに固着して回転する座標系 (X, Y, Z) で(3)式を表わすと

$$\left. \begin{aligned} X &= r_2 \cos \beta \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) + a \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha \right. \\ &\quad \left. - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - S \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right), \\ Y &= -r_2 \cos \beta \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) + a \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha \right. \\ &\quad \left. - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) + S \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right), \\ Z &= r_1 - r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これはフェースギヤに固着の座標 (X, Y, Z) に対するピニオン歯面の運動による曲面群をあらわす。(6)式の包絡面を求めれば、フェースギヤの歯面が得られる。すなわち包絡面の条件式は、(6)式に対してつぎの函数行列式を解いて得られる。

すなわち、

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Z}{\partial S} \end{vmatrix} = 0$$

から次式を得る。

$$S = -r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} + r_2 \cos \beta. \quad (7)$$

(7)式を(6)式に代入して S を消去すれば、

$$\begin{aligned} X &= a \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) + r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \left. \right\} \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right), \\
 Y = & \left. \begin{aligned}
 & a \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right) - r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \right. \\
 & \left. \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \left(\beta + \frac{\varphi}{i} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (8) \\
 Z = & r_1 - r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

ただし複号は表歯面，裏歯面の順とする．これがフェースギヤの歯面を表わす式である．

4. 接触線と接触軌跡面の方程式

(1) 式に (7) 式を代入すると，

$$\begin{aligned}
 x = & r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 y = & r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 z = & -r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} + r_2 \cos \beta.
 \end{aligned} \quad (9)$$

この式において $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ と定め，それぞれの φ の値に対して α を変化させれば，ピニオン歯面上の接触線が求められる．

(8) 式において $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ と定め，それぞれの φ の値に対して α を変化させれば，フェースギヤ歯面上の接触線が求められる．つぎに (3) 式に (7) 式を代入して S を消去すれば，

$$\begin{aligned}
 X_0 = & a \sin \beta - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \beta \\
 & + r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \beta, \\
 Y_0 = & a \cos \beta - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \beta \\
 & - r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \beta, \\
 Z_0 = & r_1 - r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

この(10)式は静止座標 (X_0, Y_0, Z_0) における接触軌跡面を表わす。つぎに(2)式に(7)式を代入して S を消去すれば、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ y_0 &= r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ z_0 &= -r_g i \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} + r_2 \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

この(11)式は静止座標 (x_0, y_0, z_0) における接触軌跡面を表わす。

5. 干渉曲線と限界半径

5.1 フェースギヤ歯面の歯元切下げ限界

歯車の干渉曲線は、歯車の軸を軸とする回転面と接触軌跡面との同時接触線として求められる⁷⁾。これを求める方法としてつぎの如き考えを採用する⁸⁾。すなわち接触軌跡面と、この回転面との同時接触線において立てた共通法線が、歯車軸を通るということである。そこで(10)式に示す接触軌跡面上に同時接触線を考え、その上の一点 m ($\alpha = \alpha_m, \varphi = \varphi_m$) において立てた法線は次式によって表わされる。

$$\frac{X_0 - X_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \frac{Y_0 - Y_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \frac{Z_0 - Z_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} \quad (12)$$

$\alpha = \alpha_m, \varphi = \varphi_m$

この法線はフェースギヤ軸 (Z_0 軸) を過ぎるはずであるから、(12)式を $X_0 Y_0$ 平面に投影した場合、原点 O_2 を通ることより次式を得る。

$$-X_{0m} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\alpha = \alpha_m, \varphi = \varphi_m} + Y_{0m} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\alpha = \alpha_m, \varphi = \varphi_m} = 0. \quad (13)$$

これより次式を得る。

$$\begin{aligned} & a \tan \alpha - r_g \tan \alpha \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & \mp r_g i^2 \tan^2 \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sec \left\{ \pm \tan \alpha \right. \end{aligned}$$

$$-\varphi \pm \left(\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) = 0. \quad (14)$$

この(14)式により干渉限界曲線の α と φ の関係が求められる。さてピニオンの歯先の圧力角 α_k は次式から求められる。

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{1 + \frac{2(h_k + x)}{N_1}} \cos \alpha_c. \quad (15)$$

そこで(14)式の α に(15)式の α_k を代入し、(14)式を満足する φ を求め、この φ を φ_u とする。さて(8)式の X と Y を $\frac{R}{m} = \sqrt{\left(\frac{X}{m}\right)^2 + \left(\frac{Y}{m}\right)^2}$ に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} = & \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c \sec^2 \alpha \sin^2 \left\{ \pm \left(\text{inv } \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) - \varphi \right\}} \\ & + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c i^2 \sec^2 \left\{ \pm \left(\tan \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) - \varphi \right\} \\ & - \frac{a}{m}N_1 \cos \alpha_c \sec \alpha \sin \left\{ \pm \left(\text{inv } \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) - \varphi \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

(16)式中の α と φ に α_k と φ_u を代入して得られる R を R_u とすれば、この R_u はフェースギヤの歯元切下げ限界半径を表わす。

5.2 ピニオンカッタによる刃元干渉限界

z_0 軸(ピニオン軸)を回転軸とする回転面と、(11)式の接触軌跡面との同時接触線がピニオンの歯元干渉曲線となる。前と同様に(11)式に示す接触軌跡面上に同時接触線を考えその上の一点 n ($\alpha = \alpha_n$, $\varphi = \varphi_n$)において法線を立て、その法線が z_0 軸(ピニオン軸)を通ることから次式を得る。

$$-x_{0n} \begin{vmatrix} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\substack{\alpha=\alpha_n \\ \varphi=\varphi_n}} + y_{0n} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\substack{\alpha=\alpha_n \\ \varphi=\varphi_n}} = 0. \quad (17)$$

これより次式を得る。

$$\alpha = 0. \quad (18)$$

ただし
$$\varphi \approx \pm \left(\tan \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right)$$

すなわち(9)式で $\alpha = 0$ とすればピニオン歯面上の干渉曲線が得られる。なお(8)式で

$\alpha = 0$ とすれば、フェースギヤがピニオンカッタで歯切りされる時、フェースギヤの歯先がピニオンカッタの刃元で削り落とされる現象（これをピニオンカッタによる刃元干渉という）が生じるときの、フェースギヤ歯面上の刃元干渉曲線が得られる。

さて(8)式の Z を表わす式から次式を得る。

$$\frac{Z}{m} = \frac{1}{2}N_1 - \frac{1}{2}N_1 \cos \alpha_c \sec \alpha \cos \left\{ \pm \left(\operatorname{inv} \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) - \varphi \right\}.$$

これより φ を求めると、

$$\varphi = \pm \left\{ \operatorname{inv} \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} - \cos^{-1} \frac{\left(1 - \frac{2}{N_1} \cdot \frac{Z}{m} \right) \cos \alpha}{\cos \alpha_c} \right\} \quad (19)$$

を得る。ただし

$$\left. \begin{aligned} N_1 \leq \frac{2\frac{Z}{m}}{1 - \cos \alpha_c} \quad & \text{のときは } \alpha \text{ の値として } \alpha \geq 0 \text{ をとり得る,} \\ N_1 > \frac{2\frac{Z}{m}}{1 - \cos \alpha_c} \quad & \text{のときは } \alpha \text{ の値として } \alpha \geq \cos^{-1} \frac{\cos \alpha_c}{1 - \frac{2}{N_1} \left(\frac{Z}{m} \right)} \text{ でなければ} \\ & \text{ならない.} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19) 式の φ を(16)式の $\frac{R}{m}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} = & \sqrt{\left(\frac{a}{m} \right)^2 + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c \sec^2 \alpha \sin^2 \left\{ \cos^{-1} \frac{\left(1 - \frac{2}{N_1} \frac{Z}{m} \right) \cos \alpha}{\cos \alpha_c} \right\}} \\ & + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c i^2 \sec^2 \left\{ \alpha + \cos^{-1} \frac{\left(1 - \frac{2}{N_1} \frac{Z}{m} \right) \cos \alpha}{\cos \alpha_c} \right\} \\ & \mp \frac{a}{m} N_1 \cos \alpha_c \sec \alpha \sin \left\{ \cos^{-1} \frac{\left(1 - \frac{2}{N_1} \frac{Z}{m} \right) \cos \alpha}{\cos \alpha_c} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

ピニオンカッタによる刃元干渉限界半径を考えると、(21)式において $\alpha = 0$ 、 $\frac{Z}{m} = (h_k - x)$ とすればよく、この R を R_d と名付ければ、(21)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{R_d}{m} = & \sqrt{\left(\frac{a}{m} \right)^2 + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c \sin^2 \left\{ \cos^{-1} \frac{1 - \frac{2}{N_1} (h_k - x)}{\cos \alpha_c} \right\}} \\ & + \frac{1}{4}N_1^2 \cos^2 \alpha_c i^2 \sec^2 \left\{ \cos^{-1} \frac{1 - \frac{2}{N_1} (h_k - x)}{\cos \alpha_c} \right\} \mp \frac{a}{m} N_1 \cos \alpha_c \sin \left\{ \cos^{-1} \frac{1 - \frac{2}{N_1} (h_k - x)}{\cos \alpha_c} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

ただし
$$N_1 \leq \frac{2(h_k - x)}{1 - \cos \alpha_c}$$

6. フェースギヤの歯先尖がり限界

フェースギヤの外径を大きくすると、ついにフェースギヤの表歯面と裏歯面との歯形が交叉し、歯の頂きの歯厚が零になった歯先尖がり曲線となる。これは(19)式と(20)式において $\frac{Z}{m} = (h_k - x)$ とおけば、

$$\varphi = \pm \left\{ \text{inv } \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} - \cos^{-1} \frac{\left\{ 1 - \frac{2(h_k - x)}{N_1} \right\} \cos \alpha}{\cos \alpha_c} \right\}, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 \leq \frac{2(h_k - x)}{1 - \cos \alpha_c} \text{ のときは } \alpha \geq 0 \text{ をとり得る,} \\ N_1 > \frac{2(h_k - x)}{1 - \cos \alpha_c} \text{ のときは } \alpha \geq \cos^{-1} \frac{\cos \alpha_c}{1 - \frac{2(h_k - x)}{N_1}} \text{ でなければならない.} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を得るから、(23)式と(24)式において適当な α を与えて φ を求め、これら (α, φ) の組の値を(8)式に代入して表歯面の X の値と裏歯面の X の値が等しく、かつ表歯面の Y の値と裏歯面の Y の値が等しくなるような (α, φ) の組を求め、この (α, φ) の値を (α_n, φ_n) と名付け、(16)式の α と φ に α_n と φ_n を代入すれば、フェースギヤの上面における表歯形と裏歯形の交点(つまり歯先尖がり点)の半径 R_k が求まる。

7. オフセット量の制限

実用的最大オフセット量は、フェースギヤの転がり円直径の約 1/4 までであるといわれている⁹⁾。実際に多くのオフセンタ形フェースギヤを歯切りしてみると、上記制限以上にオフセット量を大きくした場合には、ピニオンカッタによるフェースギヤ歯面の創成が終了したあとで、再びピニオンカッタの刃によってフェースギヤの歯面がくいこまれて、フェースギヤの正しい歯面が変に削り取られてしまう。丁度内歯車切削におけるトロコイド干渉のような現象を生ずる。そこでいまオフセット量の最大値をフェースギヤの転がり円直径の 1/4 とすると(4)式より次式を得る。

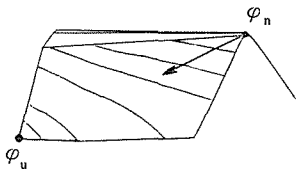
$$a \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} m N_1 i \right)^2 + a^2}$$

これより
$$N_1 \geq \frac{2\sqrt{3} \left(\frac{a}{m} \right)}{i}. \quad (25)$$

8. フェースギヤの歯巾とかみあい率

フェースギヤの歯巾は、フェースギヤの歯先尖り限界半径 R_k と、歯元切下げ限界半径 R_u により制限される。なお刃元干渉限界半径からも歯巾を制限することも考えられるが、フェースギヤに刃元干渉が生じて、かみあい率や歯の強度には殆んど影響を与えないからフェースギヤの歯巾 b は次式から求められる。

$$\frac{b}{m} \leq \frac{R_k - R_u}{m} \quad (26)$$



第4図 フェースギヤの接触線

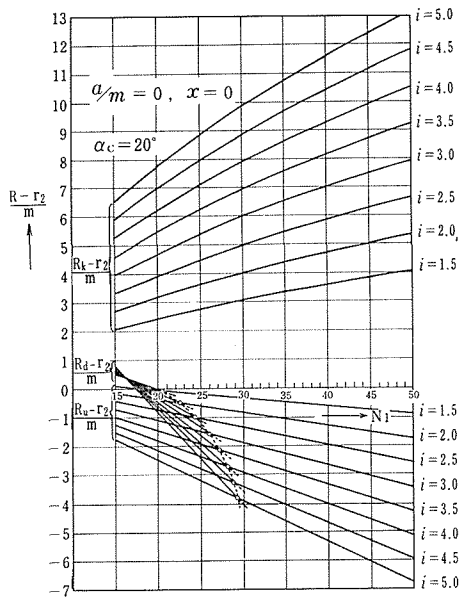
しかし実際にはフェースギヤの歯元切下げは歯高の中央の高さぐらいまで生じてもたいして問題がないといわれており¹⁰⁾¹¹⁾、したがってフェースギヤの内半径は R_u より小さく取り得るから、フェースギヤの歯巾は(26)式の値よりもっと大きく取り得る。

つぎにフェースギヤ歯面上の接触線は、第4図に示すごとく、歯面上ななめの曲線となりその長さも次第に変化し、フェースギヤの外側側の歯先かどからかみあいが始まって、内側側の歯元でかみあいが終るから、かみあい率 ϵ の最大値は、歯先尖りに対するピニオンの回転角 φ_n と、歯元切下げに対する φ_u とから計算される。すなわち

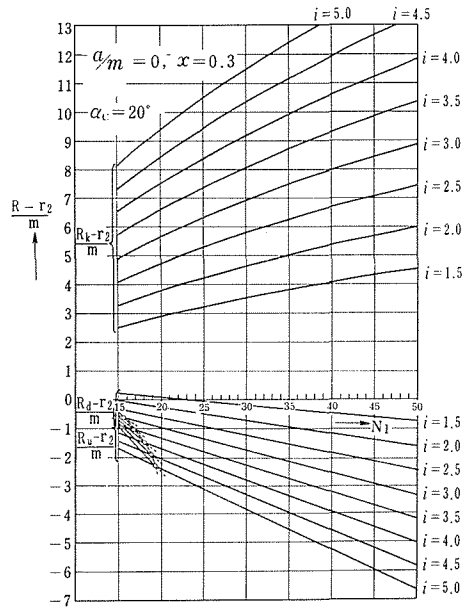
$$\epsilon = \frac{|\varphi_n - \varphi_u|}{\frac{2\pi}{N_1}} \quad (27)$$

9. 総合限界線図

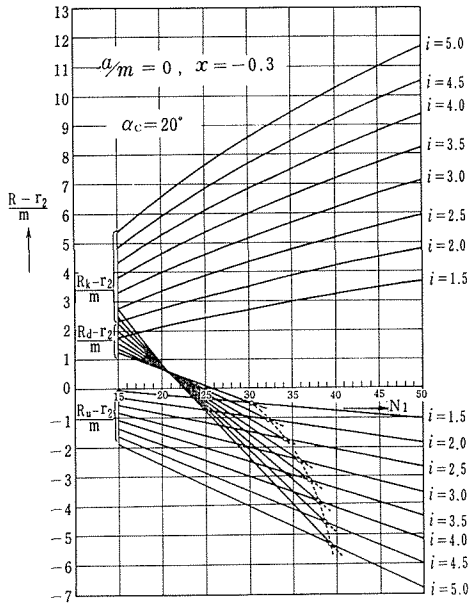
以上の理論を用いて電子計算機 FACOM 231 により計算を行なった。この場合 $\alpha_c = 20^\circ$, $h_k = 1$, $15 \leq N_1 \leq 50$, $i = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4, 4.5, 5.0$ とし、オンセンタ形フェースギヤの場合は $a = 0$, $\beta = 0$ とすればよい。なおオフセット量の制限としての N_1 , i , a/m の関係は(25)式を用いた。第5図, 第6図, 第7図はオンセンタ形フェースギヤの総合限界線図を示し、それぞれ $x = 0, 0.3, -0.3$ に対するものである。図において $\frac{R_k - r_2}{m}$ の曲線はフェースギヤ歯先尖り限界線を示し、これより下の部分が安全領域であり、 $\frac{R_u - r_2}{m}$ の曲線はフェースギヤの歯元切下げ限界線を示し、これより上の部分が安全領域であり、 $\frac{R_d - r_2}{m}$ の曲線はフェースギヤの刃元干渉限界線を示し、これより上の部分が安全領域である。この総合限界線図により N_1 が大なるほど、また i が大なるほどさらに x が大なるほど各種の干渉に対する安全領域が広くなり、歯巾を広くとることができることがわかる。第8図, 第9図, 第10図はそれぞれ $a/m = 5, 10, 15$, に対するものである。この場合は $x = 0$ としている。オフセット量が次第に大きくなると、歯先尖り限界線, 歯元切下げ限界線および刃元干渉限界線の実線部分が少しづつ欠けてくるが、これは(25)



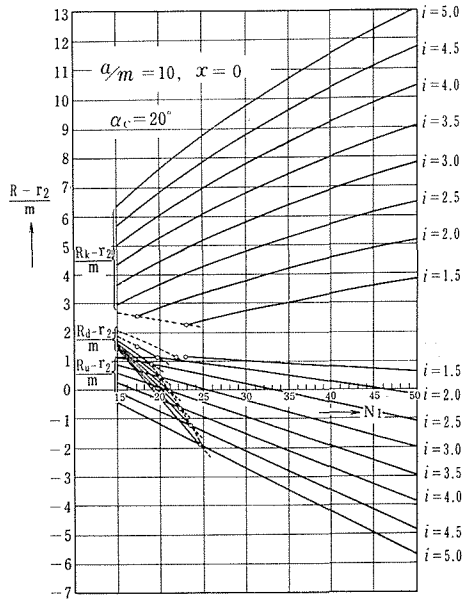
第5図 総合限界線図



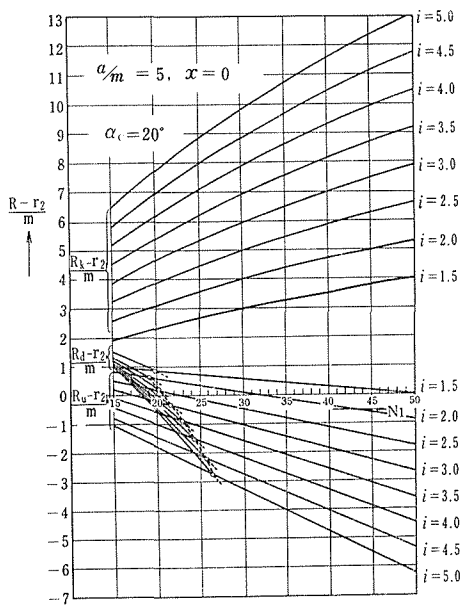
第6図 総合限界線図



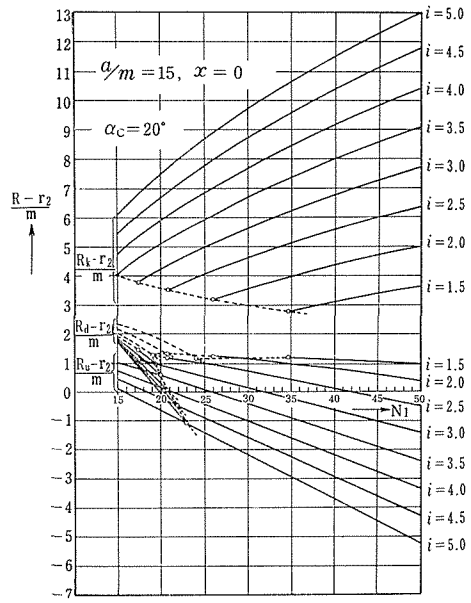
第7図 総合限界線図



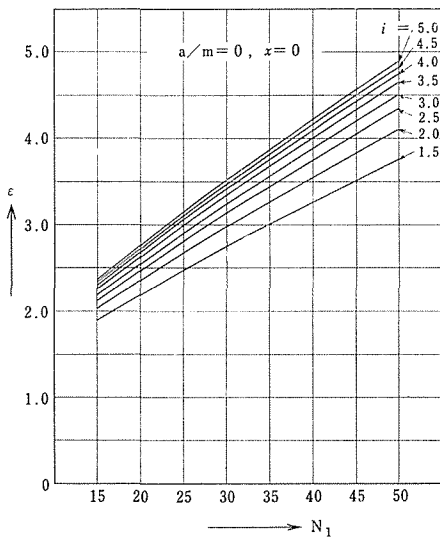
第8図 総合限界線図



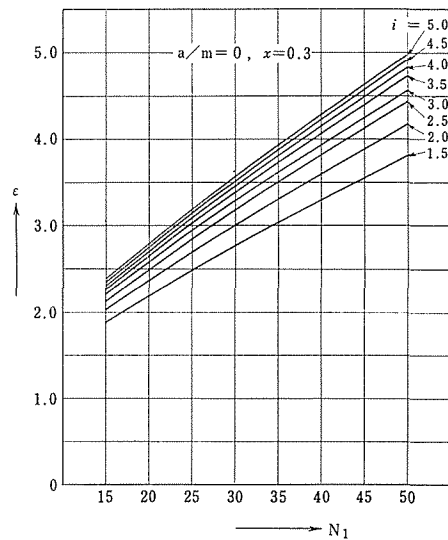
第9図 総合限界線図



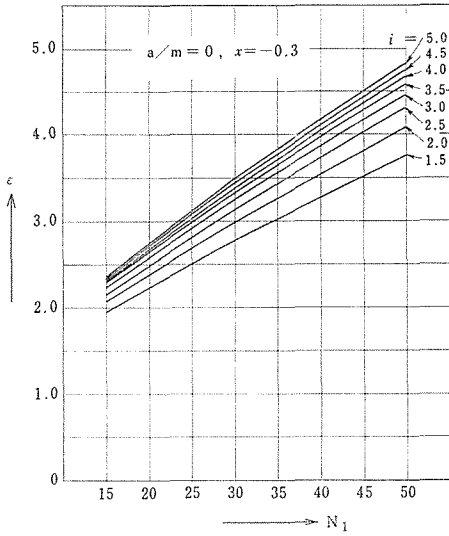
第10図 総合限界線図



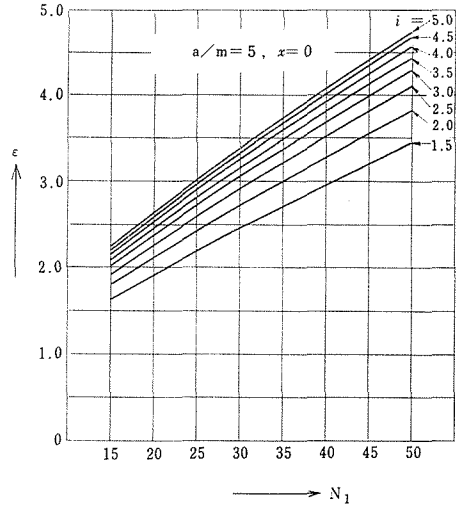
第11図 フェースギヤのかみあい率の最大値



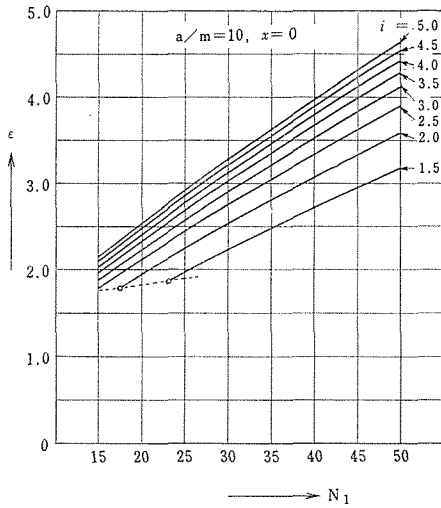
第12図 フェースギヤのかみあい率の最大値



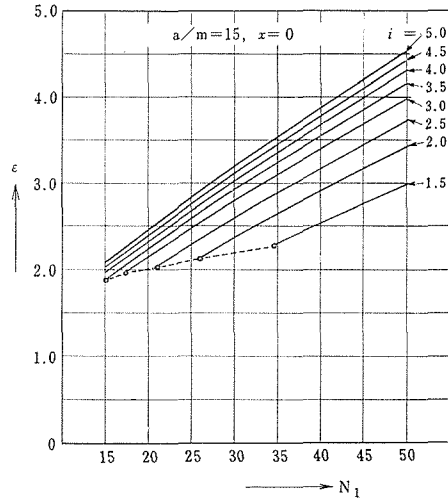
第13図 フェースギヤのかみあい率の最大値



第14図 フェースギヤのかみあい率の最大値



第15図 フェースギヤのかみあい率の最大値



第16図 フェースギヤのかみあい率の最大値

式のアフセット量の制限を示している。

なおオフセンタ形フェースギヤの場合には、フェースギヤの歯元切下げは表歯面に大きく生じ、刃元干渉は裏歯面に大きく生ずるので、第8図、第9図および第10図では、いずれも歯元切下げ限界線は表歯面に対するものを示し、刃元干渉限界線は裏歯面に対するものを示している。第11図から第16図までの図はこれらフェースギヤのかみあい率の最大値を示す。この図から、フェースギヤのかみあい率は、かなり大きい値であることがわかる。

10. 数 値 例

第9図の総合限界線図を用いて、 $\alpha_c = 20^\circ$ 、 $m = 2$ 、 $N_1 = 20$ 、 $x = 0$ 、 $i = 3$ 、 $N_2 = 60$ 、 $a = 20$ のオフセンタ形フェースギヤについて寸法を定める。まづ(4)式から $2r_2 = 126.49$ 、第9図を用いて $2R_k = 144.50$ 、 $2R_u = 128.30$ を得る。いま総合限界線図を検討するため、何等の干渉も生じないように外径と内径を定めたものを No. 1 とし、外径を大きくしてフェースギヤの歯先尖がりを生じさせたものを No. 2 とし、内径を小さくしてフェースギヤの歯元切下げを生じさせたものを No. 3 とし、これらを第1表に示す。

第1表 試作したオフセンタ形フェースギヤ

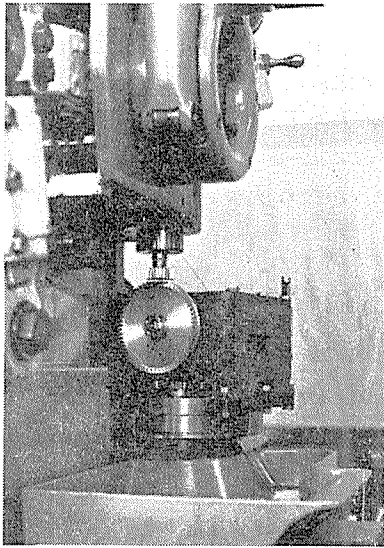
| No. | ピニオン (ピニオンカッタ) | | | | フェースギヤ $2r_2 = 126.49$ | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-----|-------|-----|------------------------|-------|-----|--------|----------|--------|----------|-----|-------|
| | α_c | m | N_1 | x | i | N_2 | a | $2R_k$ | 実際 外径 | $2R_u$ | 実際 内径 | b | 干渉の有無 |
| 1 | 20° | 2 | 20 | 0 | 3 | 60 | 20 | 144.50 | 142 | 128.30 | 130 | 6 | なし |
| 2 | | | | | | | | | 145 | | 130 | 7.5 | 歯先尖り |
| 3 | | | | | | | | | 142 | | 126 | 8 | 歯元切下げ |

第2表 試作したオンセンタ形フェースギヤ

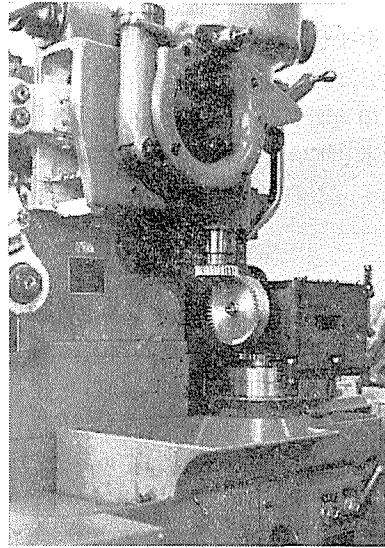
| No. | ピニオン (ピニオンカッタ) | | | | フェースギヤ | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-----|-------|-----|--------|-------|-----|--------|----------|--------|----------|------|-------|
| | α_c | m | N_1 | x | i | N_2 | a | $2R_k$ | 実際 外径 | $2R_u$ | 実際 内径 | b | 干渉の有無 |
| 4 | 20° | 3.5 | 22 | 0 | 1.5 | 33 | 0 | 133.7 | 133 | 114.8 | 118 | 7.5 | なし |
| 5 | | 2.5 | 30 | | | 45 | | 128.0 | 130.5 | 110.8 | 113 | 8.75 | 歯先尖り |
| 6 | | 2 | 38 | | | 57 | | 127 | 127 | 111.6 | 108 | 7 | なし |
| 7 | | 2 | 38 | | | 57 | | 128.0 | 127 | 111.6 | 108 | 9.5 | 歯元切下げ |

つぎに第5図の総合限界線図を用いてオンセンタ形フェースギヤを4種類求めた。第2表にその数値を示す。

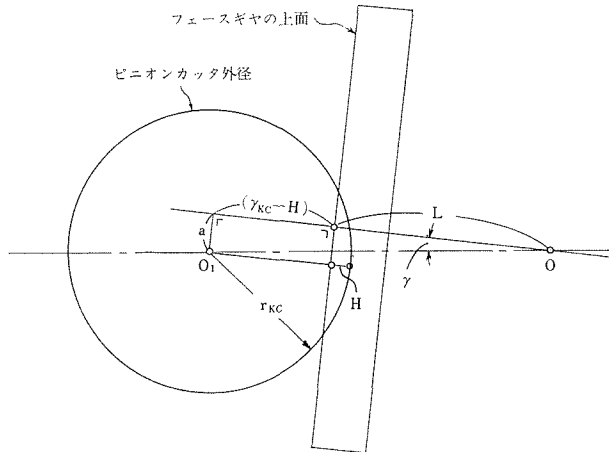
第17図は試作したフェースギヤ切削装置によるオフセンタ形フェースギヤの歯切りの様子を示し、第18図はオンセンタ形フェースギヤの歯切りの様子を示す。オフセンタ形フェースギヤを歯切りするときは、第19図に示すように歯切り装置を0点のまわりに γ だけ回



第17図 オフセンタフェースギヤの切削



第18図 オンセンタフェースギヤの切削

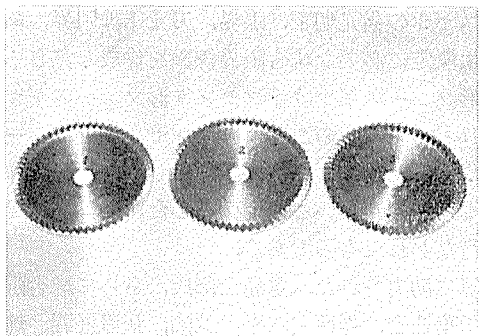


第19図 オフセンタを与えるための切削装置の取付角

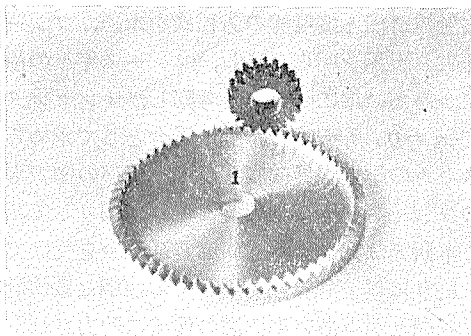
転させてテーブルに取付けることにより、 a なるオフセットを与えることができる。0点からフェースギヤ上面までの距離を L 、ピニオンカッタの外半径を r_{kc} 、切込みを H 、とすれば次式が成立する。

$$\tan \gamma = \frac{a}{L + r_{kc} - H} \quad (28)$$

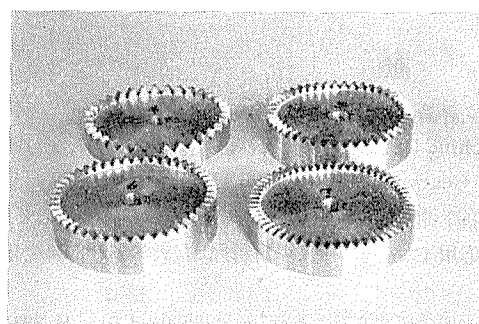
切込みはじめには $H = 0$ であるから、そのときの取付角 γ' は



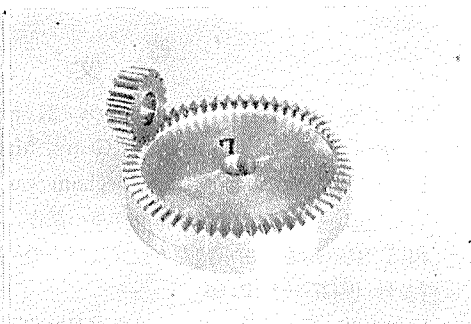
第20図 試作したオフセンタフェースギヤ



第21図 オフセンタフェースギヤとピニオンのかみあい



第22図 試作したオンセンタフェースギヤ



第23図 オンセンタフェースギヤとピニオンのかみあい

$$\tan \gamma' = \frac{a}{L + r_{kc}}$$

でなければならないが、実際には終始 γ なる取付角で歯切りするから、切込みはじめのときのオフセット量は $a' = (L + r_{kc}) \tan \gamma$ となり、 $a' > a$ となる。しかし a' と a の差は小さいので問題はない。

第20図は表1のNo. 1, No. 2, No. 3のオフセンタフェースギヤを実際に歯切りしたものを示し、第21図はNo. 1のオフセンタフェースギヤとピニオンのかみあいを示す。これら試作のフェースギヤにより干渉の有無が理論通りにあらわれていることがわかる。また第22図は表2のNo. 4, No. 5, No. 6, No. 7のオンセンタフェースギヤを実際に歯切りしたものを示し、第23図はNo. 7のオンセンタフェースギヤとピニオンのかみあいを示す。これら試作のフェースギヤにより、本理論の正しいことを確認した。

11. 結 言

オフセンタ形フェースギヤについての解析的研究を行ない、フェースギヤ歯面の方程式

接触軌跡面と接触線の方程式を求め、フェースギヤの歯元切下げ限界、刃元干渉限界、歯先尖り限界を明らかにし、フェースギヤの歯巾決定に必要な総合限界線図を作成し、さらにかみあい率についても考察し、オンセンタ形フェースギヤはオフセンタ形フェースギヤで $\alpha = 0$, $\beta = 0$ の特別な場合として求められるので、そのことよりオンセンタ形フェースギヤの総合限界線図とかみあい率の図表も作成した。そして数値例を示し、これを試作のフェースギヤ切削装置により歯切りして、本理論の正しいことを確認した。

本研究は文部省科学研究費補助金を受けて行なわれたものである。

終りに電子計算機を用いての面倒な数値計算に助力された八重島公郎氏、さらに総合限界線図とかみあい率線図の作成に助力された千葉礼士、轟碩允、平出誠治、荻原経義、坪倉博明、小野定義の諸君に深甚なる感謝の意を表するとともに、フェースギヤ切削装置の試作に協力された平田幸吉、滝沢一孝、浅野嘉友、田島洋太郎、大平長人、羽佐田正敏の諸君に対しましても深く感謝の意を表します。

文 献

- 1) 明山正元, フェース歯車の切削について, 日立評論, 23巻 9号 (昭15—9) P. 35
- 2) B. Bloomfield, Designing Face Gears, Machine Design, Vol. 19, No. 4, April, 1947, P. 129
- 3) E. Buckingham, Analytical Mechanics of Gears, P. 312, Mc GRAW-HILL (1949)
- 4) 石川二郎, 平歯車に噛合う特殊歯車の試作, 科学測器, 9巻 (昭25—2) P. 9
- 5) 相羽三良, 新しい歯車基礎方程式及びその一応用 (フェースギヤの解析) 山梨大学工学部研究報告 3号 (昭27—3) P. 66
- 6) 成瀬政男, 横田 晃, フェースギヤ (1), (2), 機械の研究 6巻, 4号, 5号 (昭29—4, 5), P. 383, P. 473
- 7) 渡辺 茂, 歯車歯形論, (昭24—4), P. 48 (コロナ社)
- 8) 両角宗晴, 螺旋面に関する数学的考察, 精密機械, 12巻, 10, 11, 12号, P. 24 (昭21—10, 11, 12)
- 9) Nicholas P. Chironis, Gear Design and Application, P. 86, Mc GRAW-HILL (1967)
- 10) W. Dudley, Practical Gear Design, P. 108 MC GRAW-HILL (1954)
- 11) 9)に同じ, P. 90

Summary

Study on Involute Face Gear

Muneharu MOROZUMI

(Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering)

One of the principal design problems in the face gears is to calculate the face width of the face gears.

The maximum outside diameter of the face gear is limited by the point where the top land of the tooth narrows to a knife-edge, and the minimum inside diameter is limited by the point where the undercut exists in the tooth profile of the face gear.

In designing the face gearsets, the following conditions should be fulfilled:

- (a) The crest of the face gear should not be sharpened.
- (b) The undercut should not exist in the tooth form of the face gear.
- (c) The involute interference should be avoided.
- (d) The contact ratio should be larger than 1.0.

An analytical study on these subjects in the face gear is made by the author, and a pack of the synthetic diagrams available for the design and production of the face gearset is prepared.

These synthetic diagrams are used for determining the maximum outside diameter, the minimum inside diameter and the face width of the face gear.

The author shows some numerical examples with a view to facilitating the practical utilization of these diagrams, and the face gearsets are made by using the synthetic diagrams presented in this paper.