

三段形差動変圧器の解析

山田 一*・五十嵐正夫**

(昭和44年10月29日受理)

1. ま え が き

相互誘導形変位変換器は、角変位(角度)あるいは直線変位などの機械量を電気量に変換するトランスジューサであり、差動変圧器はその代表的な例の一つである。

差動変圧器は、主として直線変位を計測対象とするものであり、巻線構造によって二段形と三段形とに分類される。両者の動作原理は同一であるが、磁気回路の観点から考察すると、大きな相違点がある。すなわち、二段形は、磁心をほぼ平等磁界中におき、磁心が全面磁化されている状態にあるのに対して、三段形は磁心が不平等磁界中におかれ部分磁化されている状態にある。この磁氣的な相違点によって、両者の出力電圧、感度および直線性などがかなり異なったものとなる。

差動変圧器についての従来の解析法は、その大半がパーミアンス法である。これらは、磁気回路の抵抗が空気磁路の抵抗より小さいとして無視し、もっぱら空気磁路のパーミアンスを主体とした解析法であるが、この方法では空気磁路が大半をしめる本変換器のような場合には、大きな誤差(30~40%)を生じてその効力を十分に発揮できず、経験的な資料にたよらざるを得なかった。

筆者らは、相互誘導形変位変換器の解析に関するこの種の困難性を克服するため、従来の、空気磁路に主体をおくパーミアンス法¹⁾に対して、鉄心磁路に主体をおく磁束分布法の有利性に着目してこの方法を発展させてきた。

本論文では、この磁束分布法を三段形差動変圧器に適用し、その動作原理やパーミアンス法では明確化できなかった諸量の関係を明らかにしようとしたもので、さまざまな寸法比をもつ磁心について磁束分布を正確に測定し、二段形の場合の磁束分布との相違点を明らかにして磁束分布の表現式を求め、ついで、出力電圧の理論式を導いた。

2. 磁束分布の表現式

2.1 磁束分布の特異性

開磁路を形成している磁心に外部磁界 H_0 を与えたときの磁束密度 B を MKSA 単位で表わすと次式となる。

$$B = \frac{\mu_0 \mu_s}{1 + N_d(\mu_s - 1)} H_0. \quad (2.1)$$

* 電気工学教室助教授

** 大学院修士課程

反磁界係数 N_d と比透磁率 μ_s との積がつぎの関係, すなわち,

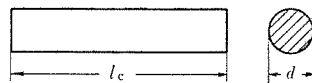
$$N_d \mu_s \gg 1, \text{ あるいは } N_d \gg 1/\mu_s, \tag{2.2}$$

を満足すれば, (2.1) 式は次式のように簡略化される.

$$B \sim \frac{\mu_0}{N_d} H_0. \tag{2.3}$$

一般に差動変圧器に用いられる磁心では, $N_d \simeq 10^{-2}$, $\mu_s \simeq 10^4$ の値にあるので, (2.2) 式の関係はほぼ満足され実用上 (2.3) 式で B を表現できる. したがって, 磁性体内部の磁束密度 B は反磁界係数 N_d と外部磁界 H_0 のみによって決めることができる.

2.1.1 円柱状磁心の反磁界係数 ¹⁾すでに二段形差動変圧器の場合で明らかにしているように, 巻線軸上の原点 O から任意の点 P までの距離 X での平等磁界中における円柱状磁心の反磁界係数については, 寸法比を $m=l_c/d$ とおいて次式で与えられる (第2.1図).

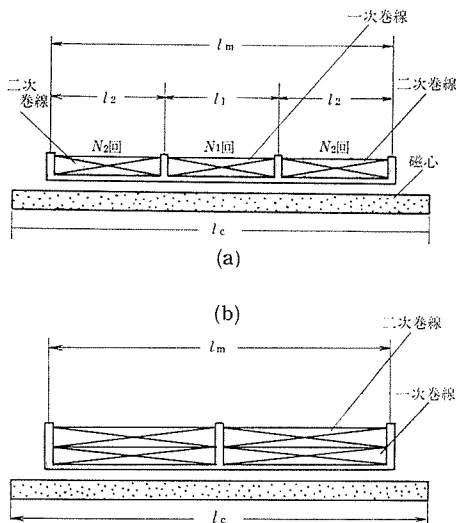


第2.1図 円柱磁心の構造

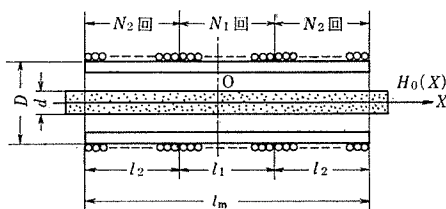
$$N_d = \frac{1}{m^2} \left(\ln \frac{km}{2} - 1 \right) \frac{1}{1 - C(2X/l_c)^2}. \tag{2.4}$$

しかし, 三段形の場合は, 第2.2図(a)のように一次巻線が磁心中央部に局部的にまかれて, 部分磁化が行なわれているため (2.4) 式は磁心の寸法比の小さい場合を除いては適用できない.

2.1.2 磁界の強さ 磁心内に形成される磁束を求めるには (2.3) 式に示したように, 巻



第2.2図 差動変圧器の構造
(a) 三段形, (b) 二段形



第2.3図 三段形差動変圧器の構造

線内の磁界の強さ H_0 も既知でなければならぬ。第2.3図において一次巻線 N_1 回に流れる電流 I_1 (実効値) によって与えられる磁界の強さ H_0 は、巻線軸上の原点0からの距離 X の関数として次式で与えられる。

$$H_0(X) = \frac{N_1 I_1}{2 l_m} \left\{ \frac{1 + 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 + 2X/l_m)^2}} + \frac{1 - 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 - 2X/l_m)^2}} \right\}. \quad (2.5)$$

ここに、 M : 一次巻線寸法比 $= l_m/D$, l_m : 全巻線の長さ (m)

二段形の場合には、巻線寸法比は、一般に $M \geq 5$ を満足するため、実用上平等磁界と考えてさしつかえなかったが、三段形の場合には二段形に比べ l_m は約1/3に過ぎないためもはや平等磁界とはみなされなく、磁界式は (2.5) 式を用いなければならない。

2.1.3 磁心軸上の磁束分布 巻線内の磁界が (2.5) 式で示されるような不平等磁界内にある円柱状磁心の軸上に形成される磁束分布は、磁心が飽和しないで、 $N_d \mu_s \gg 1$ の条件を満足しているとき、(2.3)式と(2.5)式より

$$B(X) = \frac{\mu_0 H_0}{N_d(X)} \left\{ \frac{1 + 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 + 2X/l_m)^2}} + \frac{1 - 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 - 2X/l_m)^2}} \right\}, \quad (2.6)$$

となる。

ここに、 $H_0(0) = \frac{N_1 I_1}{l_m}$: 巻線中央部での磁界の強さ、 N_d : 三段形の場合の磁界 $H_0(X)$ における反磁界係数。

円柱状磁心の軸上の磁束分布は、 S_c を磁心の断面積として、

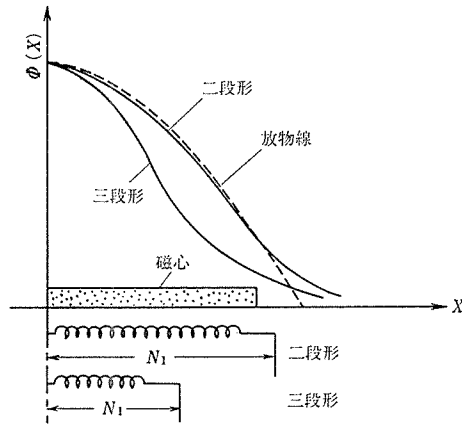
$$\phi(X) = S_c B(X) = \frac{\pi d^2}{4} \cdot B(X), \quad (2.7)$$

であるから、(2.6)式を代入して、

$$\phi(X) = \frac{\pi \mu_0 H_0 d^2}{8 N_d(X)} \left\{ \frac{1 + 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 + 2X/l_m)^2}} + \frac{1 - 2X/l_m}{\sqrt{1/M^2 + (1 - 2X/l_m)^2}} \right\}, \quad (2.8)$$

となる。第2.4図は、二段形および三段形巻線構造の場合の磁心軸上に形成される磁束分布形状の比較を示したものであり、二段形では放物線で近似できる。しかし、三段形では一次巻線 N_1 によって励磁された磁心の磁束分布は、磁心寸法比 m および一次巻線寸法比 M が大きくなるにしたがって、反磁界係数 N_d は (2.4) 式の適用外となり、また巻線内の磁界の不平等さも増すために、もはや放物線では近似できなくなる。しかし第2.3図の考察から放物線状の磁束分布に指数関数を相乗した形、すなわち $\phi(X)$ は、

$$\phi(X) = \phi_0 \{1 - C(2X/l_c)^2\} \exp\{-\tau(2X/l_c)^2\}, \quad (2.9)$$



第2.4図 二段形、三段形差動変圧器の磁心軸上の磁束分布

で表わされることがわかる。

磁束分布法による解析においては、出力電圧等の諸量を求めるにあたり、磁束分布関数 $\phi(X)$ を積分する操作が入ってくるので、(2.9)式を積分の容易な関数に変えた方がよく、つぎのように変形する。

$$\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{2} \cdot \frac{2X}{l_c}\right)^2 &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c}\right)^4 \cdots \\ &= 1 - C \left(\frac{2X}{l_c}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c}\right)^4 \cdots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

を考えれば、実際の $C=0.7$ 、 $2X=l_c$ の値では第3項以下は第1、第2項にくらべて無視できるので(2.10)式は次のようになる。

$$\cos\left(\sqrt{2} \cdot \frac{2X}{l_c}\right) = 1 - C \left(\frac{2X}{l_c}\right)^2. \quad (2.11)$$

さらに、 X がつぎの範囲

$$0 \leq \sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

にあるときは、

$$\exp\left\{-\tau \left(\frac{2X}{l_c}\right)^2\right\} \simeq \cos\left(\tau_1 \frac{2X}{l_c}\right) \exp\left(-\tau_2 \frac{2X}{l_c}\right), \quad (2.13)$$

となるので、結局(2.9)式は、 $C=0.7$ 、 $2X \simeq l_c$ の範囲で、(2.11)、(2.13)式から次式で近似できる。

$$\phi(X) = \phi_0 \cos\left(2C \frac{2X}{l_c}\right) \cdot \cos\left(\tau_1 \frac{2X}{l_c}\right) \cdot \exp\left(-\tau_2 \frac{2X}{l_c}\right). \quad (2.14)$$

そこで、(2.14)式において、 τ_1 、 τ_2 の値を決定しなければならない。(2.11)式の余弦項とそろえる意味で、

$$\tau_1 = \sqrt{2C}, \quad (2.15)$$

とおき、 τ_2 をきめるときは、

(1) $\gamma = l_c/l_m$ が大きくなるにしたがって $\phi(X)/\phi_0$ 曲線は放物線からのずれがいちじくしくなる。

(2) C の値が大きいくほど $\phi(X)/\phi_0$ の減衰のしかたが大きくなるのが実験からたしかめられているので、

$$\tau_2 = a\gamma^m C^n \quad (2.16)$$

の形における。このようにして、 a 、 m 、 n の値について検討すれば、 $\gamma = 0.7 \sim 1.4$ 、 $C = 0.7$ においては、 $a = 1$ 、 $m = 2$ 、 $n = 1$ がもっともよい近似を示すことがわかるので、(2.14)式は、

$$\frac{\phi(X)}{\phi_0} \simeq \cos^2\left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c}\right) \exp\left(-\gamma^2 C \frac{2X}{l_c}\right), \quad (2.17)$$

となる。

2.1.4 表現式の吟味 磁心の一部が磁化されたときに磁心軸上に形成される磁束分布の近似式(2.17)式は、つぎのような性質をもっていることに注意しなければならない。

(1) 実際の磁束分布と異なり、(2.17)式は X 軸上へのはっきりとした交点、すなわち磁束が完全に零になる点をもっている。この交点を X_{cr} とすれば

$$\cos\left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X}{l_c}\right) = 0, \quad (2.18)$$

とおけるので、(2.18)式から

$$X_{cr} = \frac{\pi}{4\sqrt{2C}} \cdot l_c. \quad (2.19)$$

したがって、 $\phi(X)$ によって近似される磁束分布の X 軸上での長さ l_s は、次式となる。

$$l_s = 2X_{cr} = \frac{\pi}{2\sqrt{2C}}. \quad (2.20)$$

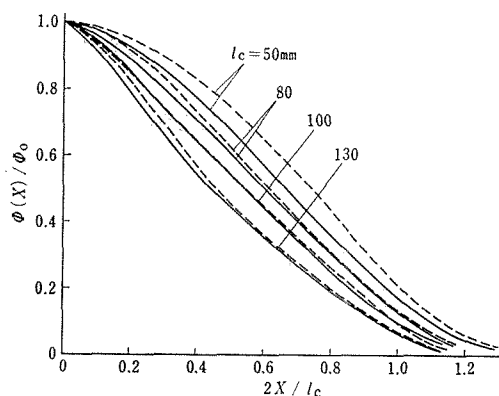
(2) $\phi(X)$ は、原点 O を中心とした磁心軸上において、 X の値によってつぎの形で表わさなければならない。

$X \geq 0$ では、

$$\phi(X) = \phi_0 \cos^2\left(\sqrt{2C} \frac{2X}{l_c}\right) \cdot e^{-r^2 C \frac{2X}{l_c}} \quad (2.21)$$

$X \leq 0$ では,

$$\phi(X) = \phi_0 \cos^2\left(\sqrt{2C} \frac{2X}{l_c}\right) \cdot e^{r^2 C \frac{2X}{l_c}} \quad (2.22)$$



第2.5図 磁束分布の数学的近似

第2.1表 三段形差動変圧器の寸法

記号	単位	寸法
l_c	mm	50~130
d	"	9.75
l_1	"	38
$2l_2$	"	2×30
l_m	"	100
D	"	18.5
N_1	回	500
$2N_2$	"	2×1000
R_1	Ω	18.0
R_2	"	2×36.0

第2.1表に示す三段形巻線構造をもつ差動変圧器を試作し、磁心の長さ $l_c = 50 \sim 130$ mm の範囲にわたって変化させたとき、その磁心軸上に形成される磁束分布の実測値と(2.17)式を用いて求めた計算値との対比を第2.5図に示した。磁心の長さ l_c が一次巻線の長さ ($l_1 = 38$ mm) よりもかなり大きいとき、すなわち $l_c = 80 \sim 130$ mm では(2.17)式は実測値とよい近似を示しているが、 l_c が短い50mm程度では(2.17)式よりもむしろ放物線近似のほうがよいことを示している。これはすでに述べたように磁心の長さ一次巻線の長さが同じ程度の場合には、二段形とほとんど同じ磁化状態になるからである。

2.2 磁心の中央磁束

二段形巻線構造をもつ差動変圧器においては、一次巻線のほどこされてある部分は磁心の長さより長い、あるいは同程度であるために、巻線中の磁界の強さはほぼ平等とみなせた。すなわち、巻線中央 ($X = 0$) での磁界の強さは、巻線寸法比 $M \geq 5$ であるので(2.5)式により、

$$\begin{aligned} H_0(0) &= \frac{N_1 I_1}{2l_1} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+1/M^2}} \\ &\simeq \frac{N_1 I_1}{l_1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

で表わされる。しかし、三段形では一次巻線のほどこされている部分が磁心の長さにくら

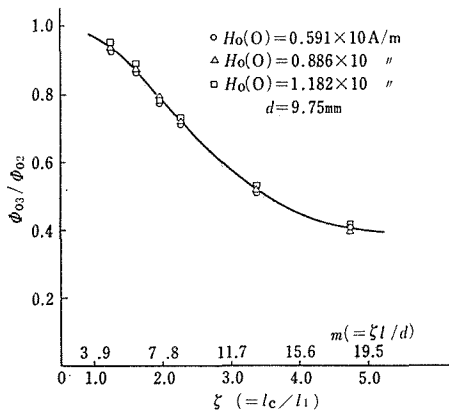
べて短かく $M \leq 5$ であるから、もはや(2.23)式は成立しなくなる。たとえば、 $M=2$ のときには、

$$H_0(0) = \frac{N_1 I_1}{l_1} \cdot \frac{2}{1.14} = \frac{N_1 I_1}{l_1} \times 0.905, \quad (2.24)$$

となり、二段形の場合にくらべて $H_0(0)$ は約1割減となる。

したがって、励磁アンペア・ターンがたとえ同一値であったとしても、二段形と三段形

とでは外部磁界の強さ $H_0(X)$ が異なり、また実効的な反磁界係数も異なるので、磁心中央での磁束 Φ_0 の値は二段形のように簡単に算出されなくなる。そこで、磁心の中央磁束 Φ_0 を二段形の場合に Φ_{02} とし、三段形の場合に Φ_{03} とし、その大小関係を比較してみると第2.6図のようになる。 Φ_{03} は第2.1表に示した三段形差動変圧器に長さの異なる磁心をそう入し、それぞれの電氣的零点、すなわち、 $X=0$ における磁心中央の磁束を測定したものであり、一方、 Φ_{02} は、上のそれぞれの磁心の寸法比 m に対応し、



第2.6図 中央磁束の比較
(Φ_{02} :二段形, Φ_{03} :三段形)

$$\Phi_{02} = \frac{\mu_0 H_0}{N_d S_c}, \quad (2.25)$$

から計算によって求めた。第2.6図からわかるように、 Φ_{03}/Φ_{02} は寸法 m あるいは $\zeta (=l_c/l_1)$ に依存して変化し、 $\zeta = 1$ で二段形と同じような磁化状態にある点でも、三段形では一次巻線比 $M = 38/18.5 = 2.05$ であるため一次巻線によって作り出される磁界は中央部においても二段形より小さく、 $\Phi_{03}/\Phi_{02} < 1$ となる。また ζ が大きくなるにしたがって、すなわち、磁心が一次巻線にくらべて長くなり、部分磁化が顕著になるにつれて Φ_{03}/Φ_{02} は減小し、しだいに一定値に落ち着く傾向をみせている。これは、外部磁界は一定であるので、 ζ の変化に対する磁心中央部の実効的な反磁界係数が一定となることに起因する。したがって、(2.21)、(2.22)両式の $\Phi_0 = \Phi_{03}$ の値は、二段形の $\Phi_0 = \Phi_{02}$ の値に対し、第2.6図の補正係数を用いて算出することができる。また、上の理由によって、不平等磁界における反磁界係数を考察することが可能となる。

3. 出力電圧の理論式

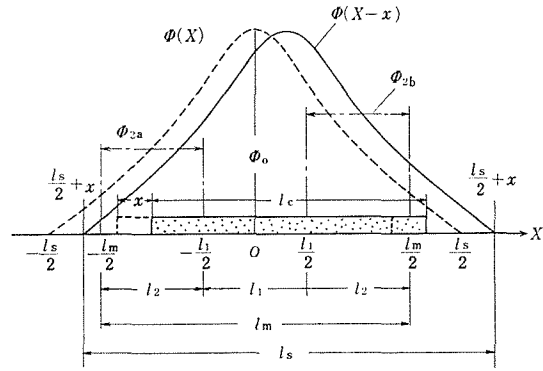
3.1 理論式の求め方

三段形差動変圧器の出力電圧の理論式を求めるにあたり、つぎの仮定をおくことにする。

(1) 磁心軸上に形成される磁束分布は、半経験的に十分な精度をもって(2.21)式および(2.22)式で近似できる。

(2) 磁心の半径方向の磁心外における磁束を無視し、また磁心内でも、磁心の半径方向の磁束密度の変化はないものとする。

(3) 実際の差動変圧器は、多層ソレノイドであるが、その中心軸上の磁界式は単層ソレノイドの式で近似する。



第3.1図 三段形における磁束分布の形成

いま、一次電流 I_1 によって一次巻線 N_1 が励磁されたとき、磁心軸上には第3.1図に示すような磁束分布が形成され、(2.21)式および(2.22)式で表わされたとする。同図中で l_m は巻線の長さ、 l_c は磁心の長さであり、 $l_s/2$ および $-l_s/2$ は巻線軸上の磁束が零となる長さを示し、(2.21)式および(2.22)式を用いる場合には、 $l_s = \pi/4\sqrt{2C} \cdot l_c$ である。磁心が磁気的な平衡状態にある場合の磁束分布は $\Phi(X)$ で表わされるが、磁心に x だけの変位を与えたときの磁束分布は磁心中心線上の X 軸を正方向へ x だけ平行移動することになるので、この場合の(2.21)式および(2.22)式は、次のように修正する必要がある。

$$\Phi(X-x) = \Phi_0 \cos^2(\sqrt{2C} \cdot 2(X-x)/l_c) e^{-r^2 C(2X-x)/l_c} \dots X \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\Phi(X-x) = \Phi_0 \cos^2(\sqrt{2C} \cdot 2(X-x)/l_c) e^{r^2 C(2X-x)/l_c} \dots X \leq 0, \quad (3.2)$$

さて、各二次巻線への磁束鎖交回数を用いて出力電圧を求めるにあたっては、磁心と巻線の長さの相対関係によって次の二つの場合が考えられる。

- A. $l_s \leq l_m$: 磁心の長さ l_c が巻線の長さ l_m に比べて比較的小さく、かつ変位 $x=0$ において、磁束分布の長さ l_c が l_m をはみ出さない場合。
- B. $l_s \geq l_m$: l_c が l_m と同程度の長さであって、 $x=0$ で磁束分布の長さ l_s が l_m をはみ出ている場合。

三段形においては、 $l_s \geq l_m$ の関係を満す場合に広い直線範囲がえられるのが普通であるから、ここでは $l_s \geq l_m$ ($l_s = \pi l_c / 2\sqrt{2C}$) の場合、すなわちBの場合について考察することにする。積分するにあたり、変位 x の大きさによって積分範囲がつぎのように変化するので注意しなければならない。

B.1 $l_c \geq l_m$, かつ $0 \leq x \leq (l_s - l_m)/2$ の場合:

変位 x に対して磁心軸上に形成される $\Phi(X)$ の関数は(3.1)式および(3.2)式で表わされる。そこで、

$$\mu = \frac{l_c}{2\sqrt{2C}}, \quad \lambda = \frac{C l_c^2}{\sqrt{2C}},$$

とおき、巻線の原点0から左半分の巻線部分をA領域、右半分のをB領域として、A領域にある二次巻線 N_2 回への磁束鎖交回数 Ψ_{2a} を求めると (第3.1図),

$$\Psi_{2a} = \frac{N_2}{l_2} \int_{-l_m/2}^{-l_1/2} \Phi(X-x) dX = N_2 \Phi_{2a}, \quad (3.3)$$

ここに,

$$\Phi_{2a} = \frac{1}{l_2} \int_{-l_m/2}^{-l_1/2} \Phi(X-x) dX. \quad (3.4)$$

同様に、B領域における磁束鎖交回数 Ψ_{2b} は,

$$\Psi_{2b} = \frac{N_2}{l_2} \int_{l_1/2}^{l_m/2} \Phi(X-x) dX = N_2 \Phi_{2b}, \quad (3.5)$$

ここに,

$$\Phi_{2b} = \frac{1}{l_2} \int_{l_1/2}^{l_m/2} \Phi(X-x) dX, \quad (3.6)$$

となる.

Φ_{2a} , Φ_{2b} は第3.1図に示したように巻線部分 $l_m/2 - l_1/2 = l_2$ にわたっての各平均磁束である. Φ_{2a} の(3.4)式には(3.2)式を, Φ_{2b} の(3.6)式には(3.1)式を代入して整理すると次式のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Phi_{2a} &= \frac{\Phi_0}{l_2} \int_{-l_m/2}^{-l_1/2} \cos^2\left(\frac{X-x}{\mu}\right) \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(X-x)} dX \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_m+2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{\frac{-\lambda(l_m+2x)}{2\mu}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ A \sin\left(\frac{l_1+2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{\frac{-\lambda(l_1+2x)}{2\mu}} \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2b} &= \frac{\Phi_0}{l_2} \int_{l_1/2}^{l_m/2} \cos^2\left(\frac{X-x}{\mu}\right) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}(X-x)} dX \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_m-2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{\frac{-\lambda(l_m-2x)}{2\mu}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ A \sin\left(\frac{l_1-2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{\frac{-\lambda(l_1-2x)}{2\mu}} \right], \quad (3.8) \end{aligned}$$

ここに,

$$A = \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\lambda}{2}\right).$$

(Φ_{2a} , Φ_{2b} の導き方については付録参照)

本変圧器の通常の動作状態では、磁化力正弦波と磁束正弦波の両条件をほぼ満足させることができるので、線形インダクタンスとしての取り扱いができる。⁴⁾⁵⁾そこで、 I_1 が角周波数 ω の正弦波とすれば、磁心軸上の任意の点における磁束は、

$$\Phi(X - x, t) = \sqrt{2} \Phi(X - x) \sin \omega t, \quad (3.9)$$

となる(ここで磁束は便宜上実効値表示してある)。

第3.1図に示したように A, B 各領域の二次巻線は互いに差動接続されているから、無負荷時の出力電圧 E_2 は、(3.7)式と(3.8)式を用いて、

$$\begin{aligned} E_2 &= \omega N_2 (\Phi_{2b} - \Phi_{2a}) \\ &= \omega N_2 \Phi_0 \frac{\mu e^{-\frac{\lambda l_1}{2\mu}}}{\lambda l_2} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} \sinh \frac{\lambda x}{\mu} \right. \\ &\quad \left. - Q \sin \frac{2x}{\mu} \cosh \frac{\lambda x}{\mu} - R \sinh \frac{\lambda x}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここに、 P, Q, R は、 x に無関係な係数でそれぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left\{ e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{2\mu}} \sin\left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\}, \\ Q &= \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left\{ e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{2\mu}} \cos\left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\}, \\ R &= e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{2\mu}} + 1. \end{aligned}$$

B.2 $l_s \geq l_m$, かつ $(l_s - l_m)/2 \leq x \leq l_2$ の場合:

第3.1図から理解できるように、この場合、平均磁束 Φ_{2a} を求めるときの積分範囲は、つぎのように異なるだけである。すなわち、

$$\begin{aligned} \Phi_{2a} &= \frac{\Phi_0}{l_2} \int_{-l_s/2}^{-l_1/2} \cos^2\left(\frac{X-x}{\mu}\right) e^{\frac{\lambda}{\mu}(X-x)} dX \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_s + 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\frac{\lambda(l_2 + 2x)}{2\mu}} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ A \sin\left(\frac{l_1 + 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\frac{\lambda(l_1 + 2x)}{2\mu}} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\Phi_{2b} = (3.8)$ 式.

したがって、このときの出力電圧 E_2 は (3.11) 式と (3.8) 式を用いて、

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \omega N_2 (\Phi_{2b} - \Phi_{2a}) \\
 &= \omega N_2 \Phi_0 \frac{e^{-\lambda l_1}}{2\lambda l_2} \left[e^{\frac{\lambda x}{\mu}} \left(P' \cos \frac{2x}{\mu} + Q' \sin \frac{2x}{\mu} - R' \right) \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{\lambda x}{\mu}} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} - Q \sin \frac{2x}{\mu} - R \right) \right], \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

ここに、

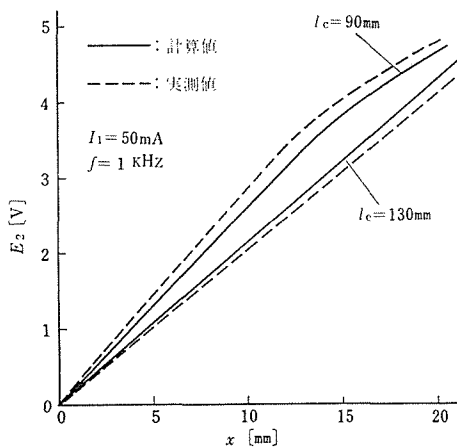
$$P' = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_s}{2\mu}} \sin \left(\frac{l_s}{\mu} + \varphi \right) + \sin \left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi \right) \right\},$$

$$Q' = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_c}{2\mu}} \cos \left(\frac{l_s}{\mu} + \varphi \right) + \cos \left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi \right) \right\},$$

$$R' = e^{\lambda \frac{l_1 - l_s}{2\mu}} + 1.$$

3.2 実験による検討

第3.2図には、三段形差動変圧器(第2.1表)を用い、 $l_c = 90$ と 130mm の2種類の磁心についての変換特性の実測値と計算値との対比を示した。実験条件は $I_1 = 50\text{mA}$ 、 $f = 1\text{kHz}$ の下で行われた。計算は、磁気係数 k 、 C の値として第3.1表を用いて、 $l_c = 90$ および 130



第3.2図 変換特性の理論値と計算値との比較

第3.1表 係数 k 、 C の値*
(M. A. Rozenblat による)

磁心の形状	k	C
円柱状	2.4	0.8~0.85
直方体	3.6	0.75
だ円体	4	0

* 差動変圧器用磁心 ($4 \leq m \leq 20$) については、これらの係数は修正しなければならない。ここでは $C = 0.7$ を用いる。

mmの場合とも $C=0.7$ としたので $l_c = \pi l_c / 2\sqrt{2C}$ はそれぞれ120, 173mmとなり、いずれも巻線の長さ $l_m=100\text{mm}$ より長く、Bの場合となる。したがって、出力電圧 E_2 は、 $l_c=90\text{mm}$ のとき(3.10)と(3.12)式の両式によって、また $l_c=130\text{mm}$ のときは(3.10)式のみで、磁心変位 $x=20\text{mm}$ までの E_2 が算出できる。第3.2図に示したように、計算値は実測値ときわめてよい近似を示し、このように磁束分布法を用いると巻線構造の違いを問わず変換特性の数学的表現が可能である。二段形で述べたと同様の手法によってインダクタンスや直線範囲および感度などについても求めうるが、これらの表現式は二段形と比較していちじるしく複雑なものとなる。

4. あとがき

三段形差動変圧器は、磁心の変位による一次インピーダンスの変化の割合が小さいために、二段形と比較して直線性の点ですぐれていることが広く知られている。しかし、従来から、その変換理論が確立するに至らなかった。本論文では、二段形差動変圧器の解析で有用であった磁束分布法を三段形に適用して、無負荷時の出力電圧の理論式を導くことができ、その理論値は実測値と比較してきわめてよい近似を示した。

しかし、三段形については、まだ負荷時の出力電圧をはじめとして、感度や直線性等の問題は未解決のままである。さらに、二段形と三段形の巻線構造による磁気的な相異点の本質的な比較は、応用分野が広いだけに我々にとって大いに学問的興味をそそる問題である。

参 考 文 献

- 1) 山田：相互誘導形角変位変換器に関する研究，東京工業大学学位論文（昭43—7）
- 2) 山田：差動変圧器の変換理論，電気学会誌，Vol.88-6，No.956，1873（昭43）
- 3) 竹山：電磁気学現象理論，丸善，249（昭24）
- 4) 山田：相互誘導形角変位変換器の直線性の解析，電気学会誌，Vol.85-7，No.922，1208（昭40）
- 5) 宮沢，山下，大日方：磁化力正弦波における磁化特性について，昭41電気東京支部連大，79.
- 6) 西口：差動変圧器の直線性改善，計測と制御，Vol.1，No.9，686（昭37）
- 7) B.O. ピアース：簡約積分表，59，ブレイン図書（1964）

付 録

ϕ_{2a} , ϕ_{2b} の導き方

B.1 の場合：

$$\phi(X-x) = \phi_0 \cos^2\left(\sqrt{2C} \cdot 2\frac{X-x}{l_c}\right) e^{+2C\frac{2(X-x)}{l_c}} \dots\dots\dots x \leq 0. \quad (\text{付.1})$$

$X-x = X'$ とおくと、(付.1)式は、

$$\phi(X') = \phi_0 \cos^2\left(\sqrt{2C} \cdot \frac{2X'}{l_c}\right) e^{+2C\frac{2X'}{l_c}}, \quad (\text{付.2})$$

となる。ここに、

$$\mu = \frac{l_c}{2\sqrt{2C}}, \quad \lambda = \frac{C_T^2}{\sqrt{2C}}, \quad t = \frac{\sqrt{2C} \cdot 2X}{l_c} = \frac{1}{\mu} X'$$

とおけば、(付.2)式は次式のように簡単化される。

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos^2 t e^{\lambda t}. \quad (\text{付.3})$$

したがって、平均磁束 Φ_{2a} は次のようになる。⁷⁾

$$\begin{aligned} \Phi_{2a} &= \frac{1}{l_2} \int_{-l_m/2}^{-l_1/2} \Phi(X-x) dX = \frac{1}{l_2} \int_{-l_m/2-x}^{-l_1/2-x} \Phi(X') dX' \\ &= \frac{\mu}{l_2} \int_{-\frac{l_m+2x}{2\mu}}^{-\frac{l_1+2x}{2\mu}} \Phi(t) dt = \frac{\mu}{l_2} \int_{-\frac{l_m+2x}{2\mu}}^{-\frac{l_1+2x}{2\mu}} \Phi_0 \cos^2 t \cdot e^{\lambda t} dt \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{l_2} \left[\frac{1}{4 + \lambda^2} \left(\sin 2t + \lambda \cos^2 t + \frac{2}{\lambda} \right) e^{\lambda t} \right]_{-\frac{l_m+2x}{2\mu}}^{-\frac{l_1+2x}{2\mu}} \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{l_2(4 + \lambda^2)} \left[\left\{ \sqrt{\frac{4 + \lambda^2}{4}} \sin(2t - \varphi) + \frac{4 + \lambda^2}{\lambda} \right\} e^{\lambda t} \right]_{-\frac{l_m+2x}{2\mu}}^{-\frac{l_1+2x}{2\mu}} \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_m + 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\lambda \frac{l_m+2x}{2\mu}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ A \sin\left(\frac{l_1 + 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\lambda \frac{l_1+2x}{2\mu}} \right], \quad (\text{付.4}) \end{aligned}$$

ここに、

$$A = \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\lambda}{2}\right).$$

(付.4)式をさらに簡単化すると、

$$\begin{aligned} \Phi_{2a} &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} e^{-\lambda \frac{l_1+2x}{2\mu}} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_m + 2x}{\mu} + \varphi\right) e^{\lambda \frac{l_1-l_m}{2\mu}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ A \sin\left(\frac{l_1 + 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} \right] \right. \\ &= \Phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} e^{-\lambda \frac{l_1+2x}{2\mu}} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} + Q \sin \frac{2x}{\mu} - R \right), \quad (\text{付.5}) \end{aligned}$$

ここに、

$$P = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_m}{2\mu}} \sin\left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\},$$

$$Q = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_m}{2\mu}} \cos\left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\},$$

$$R = e^{\lambda \frac{l_1 - l_m}{2\mu}} + 1.$$

同様に ϕ_{2b} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{2b} &= \frac{\mu}{l_2} \int_{\frac{l_1 + 2x}{2\mu}}^{\frac{l_m + 2x}{2\mu}} \phi_0 \cos^2 t e^{-\lambda t} dt \\ &= \phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} \left[\left\{ A \sin\left(\frac{l_m - 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\lambda \frac{l_m - 2x}{2\mu}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ A \sin\left(\frac{l_1 - 2x}{\mu} + \varphi\right) - 1 \right\} e^{-\lambda \frac{l_1 - 2x}{2\mu}} \right] \\ &= \phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} e^{-\lambda \frac{l_1 - 2x}{2\mu}} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} - Q \sin \frac{2x}{\mu} - R \right). \end{aligned} \quad (\text{付.6})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \phi_{2b} - \phi_{2a} &= \phi_0 \frac{\mu}{\lambda l_2} e^{-\lambda \frac{l_1}{2\mu}} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} \sinh \frac{\lambda x}{\mu} \right. \\ &\quad \left. - Q \sin \frac{2x}{\mu} \cosh \frac{\lambda x}{\mu} - R \sinh \frac{\lambda x}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{付.7})$$

B.2 の場合：

ϕ_{2a} の積分範囲が次のように変わり、 ϕ_{2b} は(付.6)式と同様である。

$$\begin{aligned} \phi_{2a} &= \frac{\mu}{l_2} \int_{-\frac{l_s + 2x}{2\mu}}^{-\frac{l_1 + 2x}{2\mu}} \phi_0 \cos^2 t e^{\lambda t} dt \\ &= \phi_0 \frac{\mu}{2\lambda l_2} e^{-\lambda \frac{l_1 + 2x}{2\mu}} \left(P' \cos \frac{2x}{\mu} + Q' \sin \frac{2x}{\mu} - R' \right). \end{aligned} \quad (\text{付.8})$$

ここに、

$$P' = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_s}{2\mu}} \sin\left(\frac{l_s}{\mu} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\},$$

$$Q' = A \left\{ e^{\lambda \frac{l_1 - l_s}{2\mu}} \cos\left(\frac{l_s}{\mu} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi\right) \right\},$$

$$R' = e^{\lambda \frac{l_1 - l_2}{2\mu}} + 1.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \phi_{2b} - \phi_{2b} = \phi_0 \frac{\mu}{2Xl_2} e^{-\lambda \frac{l_1}{2\mu}} \left\{ e^{\frac{\lambda x}{\mu}} \left(P' \cos \frac{2x}{\mu} + Q' \sin \frac{2x}{\mu} - R' \right) \right. \\ \left. - e^{-\frac{\lambda x}{\mu}} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} - Q \sin \frac{2x}{\mu} - R \right) \right\}. \quad (\text{付. 9}) \end{aligned}$$

Summary

Analysis on Three-Sectional Type Differential Transformer

Hajime YAMADA and Masao IGARASHI

Linear differential transformer can be classified into two-sectional and three-sectional types depending upon the winding constructions. In the past, the operation of the differential transformer has been analyzed based on the change of the in the magnetic reluctance of air gap caused by the magnetic core displacement. However, this method of analysis does not fully take in account the properties of core materials and the effect of leakage fluxes. Moreover, the quantitative relation between circuit parameters cannot be made clear. Previously, one of the authors has believed that the phenomena can essentially be clarified only by dealing directly with the magnetic flux itself on the core axis, and already applied this idea to analyze a two-sectional type differential transformer.

In this paper, we wish the extend this idea to derive an theoretical equation for the output voltage of the three-sectional type differential transformer taking into account the demagnetization of magnetic core and the flux distribution along the core axis.

The equation of the magnetic flux distribution $\phi(X)$ is given by

$$\phi(X) = \phi_0 \cos^2 \left(\sqrt{2C} \frac{2X}{l_c} \right) e^{-\gamma^2 C \frac{2X}{l_c}}, \quad X \geq 0, \quad (1)$$

where X is the distance measured from the center of the magnetic core along its axis.

When the load resistance of secondary winding is infinitely large, the theoretical expression for the output voltage E_2 (effective value) is obtained by

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \omega N_2 (\Phi_{2b} - \Phi_{2a}) \\
 &= \omega N_2 \Phi_0 \frac{\mu e^{-\frac{\lambda l_1}{2\mu}}}{\lambda l_2} \left(P \cos \frac{2x}{\mu} \sinh \frac{\lambda x}{\mu} - Q \sin \frac{2x}{\mu} \cosh \frac{\lambda x}{\mu} - R \sinh \frac{\lambda x}{\mu} \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

where P , Q and R are coefficients which do not depend on the linear displacement, x , as follows :

$$P = \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left\{ e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{2\mu}} \sin \left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi \right) + \sin \left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi \right) \right\},$$

$$Q = \frac{\lambda}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left\{ e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{\mu}} \cos \left(\frac{l_m}{\mu} + \varphi \right) + \cos \left(\frac{l_1}{\mu} + \varphi \right) \right\},$$

$$R = e^{\frac{\lambda(l_1 - l_m)}{2\mu}} + 1.$$

The theoretical expression (2) for the output voltage is able to explain the influences of winding constructions, core materials and its dimensions.