

# 内接フェースギヤの研究

両角宗晴\*

(昭和44年10月31日受理)

## 1. 緒言

軸角が $90^\circ$ の普通のフェースギヤについては多くの研究が行われており<sup>1)~7)</sup>、実用化も進んでいる。しかし軸角が $90^\circ$ よりも大きくなった内接フェースギヤについては全く研究されておられない。この内接フェースギヤのピッチ面は、ピニオンのピッチ面を包む形となり、そのためかみあい率が大きく、しかも凹形の内歯車の歯形に凸形のピニオンの歯が接触するから負荷容量が大きくなり、実用的に多くの利点を有している。この内接フェースギヤにおける最大の問題点は、やはりフェースギヤの歯元切り下げ限界、刃元干渉限界および歯先尖り限界などにより歯中に制限があるという点である。そこでこの内接フェースギヤについて解析的に考察し、内接フェースギヤの歯面の方程式、接触軌跡面と接触線の方程式、歯元干渉曲線、刃元干渉曲線および歯先尖り限界曲線の方程式を求め、これより三種の干渉限界を明らかにし、内接フェースギヤの設計に必要な限界線図を作成し、さらにかみあい率についても考察し、これら図表を用いて内接フェースギヤを設計し、それらを試作の内接フェースギヤ切削装置により歯切りして、理論の検討を行なった。

## 2. 使用記号

$m$ : モジュール

$\alpha_c$ : ピニオンの基準圧力角(工具圧力角)

$\alpha_{k1}$ : ピニオンの歯先圧力角

$\alpha$ : ピニオンの歯形上任意の点の圧力角

$\Sigma$ : ピニオン軸とフェースギヤ軸とのなす角

$\varphi$ : ピニオンの回転角

$N_1$ : ピニオンおよびピニオンカッタの歯数

$N_2$ : 内接フェースギヤの歯数

$i$ : フェースギヤとピニオンの歯数比 ( $=\frac{N_2}{N_1}$ )

$r_g$ : ピニオンの基礎円半径 ( $=\frac{1}{2}mN_1 \cos \alpha_c$ )

$r_1$ : ピニオンの刻み円半径 ( $=\frac{1}{2}mN_1$ )

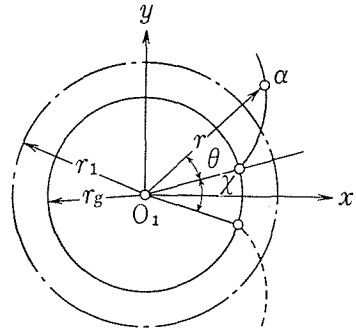
$r_2$ : フェースギヤの刻み円半径 ( $=\frac{1}{2}mN_2 = \frac{1}{2}mN_1 i$ )

\* 精密工学教室, 教授

- $x$  : ピニオンの転位係数
- $R'_u$  : 歯元における歯元切下げ限界半径
- $R_u$  :  $R'_u$ に対応する歯先での限界半径
- $R_d$  : 刃元干渉限界半径
- $R_k$  : 歯先尖り限界半径

### 3. ピニオンと内接フェースギヤの歯面の方程式

第1図はインボリュート平歯車の軸直角断面を示し、 $x$ 軸が歯みぞの中央を通るように定めたとき、この歯車の歯面の方程式は次式で表わされる。



第1図 インボリュート平歯車の軸直角断面

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \left( \theta + \frac{\lambda}{2} \right), \\ y &= r \sin \left( \theta + \frac{\lambda}{2} \right), \\ z &= S. \end{aligned} \right\}$$

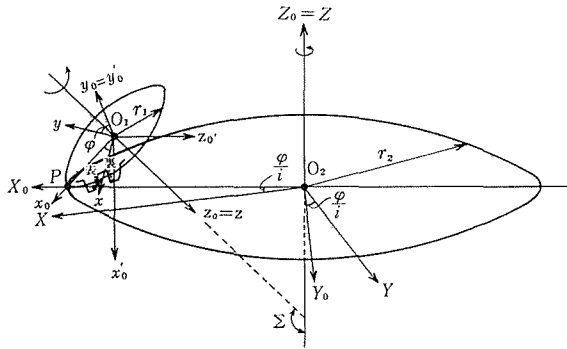
ただし複号は実線で示す歯面，点線で示す歯面の順とし， $\lambda$ は基礎円歯隙の角， $S$ は歯すじ方向の値を与えるパラメータとする。しかるに

$$\left. \begin{aligned} r &= r_g \sec \alpha, \\ \theta &= \text{inv } \alpha, \\ \frac{\lambda}{2} &= \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1}. \end{aligned} \right\}$$

故に，すぐばのインボリュート歯車の歯面の方程式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ y &= r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ z &= S. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

つぎに第2図において直交座標軸  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ ,  $(X_0, Y_0, Z_0)$ は静止座標軸で， $x_0$ 軸と $X_0$ 軸は，ピニオンの基準ピッチ円と内接フェースギヤの転がり円との切点 $P$ を通るように定めてある。ピニオン軸を $z$ 軸とする座標軸 $(x, y, z)$ はピニオンに固着して回転し，内接フェースギヤ軸を $Z$ 軸とする座標軸 $(X, Y, Z)$ は内接フェースギヤに固着して回転し，軸角を $\Sigma$ とする。ピニオンを第2図に示す方向に $\varphi$ だけ回転させた



第2図 内接フェースギヤと座標軸

時のピニオンの歯面を静止座標系  $(x_0, y_0, z_0)$  で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ y_0 &= r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ z_0 &= S. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

この式を静止座標系  $(x', y', z')$  で表わし、さらに静止座標系  $(X_0, Y_0, Z_0)$  に変換して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= (r_2 + r_1 \cos \Sigma) - S \sin \Sigma \\ &\quad - r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ Y_0 &= -r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\ Z_0 &= r_1 \sin \Sigma + S \cos \Sigma \\ &\quad - r_g \sec \alpha \sin \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これは静止座標  $(X_0, Y_0, Z_0)$  に対するピニオン歯面の運動による曲面群を示す。

これをフェースギヤに固着して回転する座標系  $(X, Y, Z)$  で表わすと

$$\left. \begin{aligned} X &= (r_2 + r_1 \cos \Sigma) \cos \frac{\varphi}{i} - S \sin \Sigma \cos \frac{\varphi}{i} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \frac{\varphi}{i} \\
& -r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \frac{\varphi}{i}, \\
Y = & -(r_2 + r_1 \cos \Sigma) \sin \frac{\varphi}{i} + S \sin \Sigma \sin \frac{\varphi}{i} \\
& + r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \frac{\varphi}{i} \\
& - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \frac{\varphi}{i}, \\
Z = & r_1 \sin \Sigma + S \cos \Sigma \\
& - r_g \sec \alpha \sin \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

これはフェースギヤに固着の座標  $(X, Y, Z)$  に対するピニオン歯面の運動による曲面群である。

(4)式の包絡面を求めれば、内接フェースギヤの歯面が得られる。すなわち包絡面の条件式は、(4)式に対してつぎの函数行列式を解いて得られる。

すなわち、

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Z}{\partial S}
\end{vmatrix} = 0$$

から次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
S = & \frac{1}{\sin \Sigma} \left[ (r_2 + r_1 \cos \Sigma) \right. \\
& \left. - r_g (i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \right].
\end{aligned} \right\} \tag{5}$$

(5)式を(4)式に代入して  $S$  を消去すれば

$$X = -r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \frac{\varphi}{i}$$

$$\begin{aligned}
& + r_g(i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \frac{\varphi}{i} \\
& - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \frac{\varphi}{i}, \\
Y = & r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \frac{\varphi}{i} \\
& - r_g(i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \sin \frac{\varphi}{i} \\
& - r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cos \frac{\varphi}{i}, \\
Z = & \frac{1}{\sin \Sigma} (r_1 + r_2 \cos \Sigma) \\
& - r_g \sec \alpha \sin \Sigma \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\
& - r_g(i + \cos \Sigma) \cot \Sigma \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

これが内接フェースギヤの歯面を表わす式である。

#### 4. 接触線と接触軌跡面の方程式

(1)式に(5)式を代入すると、

$$\begin{aligned}
x = & r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
y = & r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
z = & \frac{1}{\sin \Sigma} \left[ (r_2 + r_1 \cos \Sigma) \right. \\
& \left. - r_g(i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

この式において  $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  と定め、それぞれの  $\varphi$  の値に対して  $\alpha$  を変化させれば、ピニオン歯面上の接触線が求められる。

(6)式において  $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  と定め、それぞれの  $\varphi$  の値に対して  $\alpha$  を変化させれば、

ば、フェースギヤ歯面上の接触線が求められる。つぎに(3)式に(5)式を代入してSを消去すれば、

$$\begin{aligned}
 X_0 &= -r_g \sec \alpha \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\
 &\quad + r_g (i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 Y_0 &= -r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 Z_0 &= \frac{1}{\sin \Sigma} (r_1 + r_2 \cos \Sigma) \\
 &\quad - r_g \sec \alpha \sin \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\
 &\quad - r_g (i + \cos \Sigma) \cot \Sigma \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

この(8)式は静止座標( $X_0, Y_0, Z_0$ )における接触軌跡面を表わす。つぎに(2)式に(5)式を代入してSを消去すれば、

$$\begin{aligned}
 x_0 &= r_g \sec \alpha \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 y_0 &= r_g \sec \alpha \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}, \\
 z_0 &= \frac{1}{\sin \Sigma} [(r_2 + r_1 \cos \Sigma) \\
 &\quad - r_g (i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\}].
 \end{aligned} \tag{9}$$

この(9)式は静止座標( $x_0, y_0, z_0$ )における接触軌跡面を表わす。

## 5. 干渉曲線と限界半径

### 5.1 内接フェースギヤ歯面の歯元切下げ限界

歯車の干渉曲線は、歯車の軸を軸とする回転面と接触軌跡面との同時接触線として求められる<sup>8)</sup>。これを求める方法としてつぎの如き考えを採用する<sup>9)</sup>。すなわち接触軌跡面と、この回転面との同時接触線において立てた共通法線が、歯車軸を通るということである。そこで(8)式に示す接触軌跡面上に同時接触線を考え、その上の一点  $m$  ( $\alpha = \alpha_m, \varphi = \varphi_m$ ) に

において立てた法線は次式によって表わされる。

$$\frac{X_0 - X_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \frac{Y_0 - Y_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \frac{Z_0 - Z_{0m}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} \quad (10)$$

$\alpha = \alpha_m$   
 $\varphi = \varphi_m$

この法線を  $X_0 Y_0$  平面に投影すれば、

$$Y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} \cdot X_0 - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} \cdot X_{0m} + Y_{0m} \quad (11)$$

$\alpha = \alpha_m$   
 $\varphi = \varphi_m$

しかるに法線(10)式は、 $Z_0$  軸 (フェースギヤ軸) を過ぎるはずであるから、(11)式の直線は原点  $O_2$  を通るはずであり、従って次式を得る。

$$- X_{0m} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} + Y_{0m} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = 0. \quad (12)$$

$\alpha = \alpha_m$   
 $\varphi = \varphi_m$

これより次式を得る。

$$\begin{aligned} & (i + \cos \Sigma) \cos \Sigma \tan \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & - \sin^2 \Sigma \sec \alpha \cos \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & \times \sin \left\{ \pm \text{inv } \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & \mp (i + \cos \Sigma)^2 \cot \alpha \tan^2 \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

この(13)式により干渉限界曲線の  $\alpha$  と  $\varphi$  の関係が求められる。

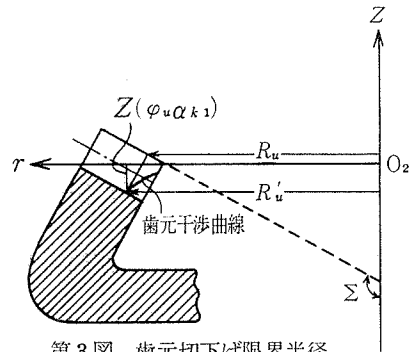
さてピニオンの歯先の圧力角  $\alpha_{k1}$  は次式から求められる。

$$\cos \alpha_{k1} = \frac{1}{1 + \frac{2(1+x)}{N_1}} \cos \alpha_c \quad (14)$$

そこで(13)式の $\alpha$ に(14)式の $\alpha_{k1}$ を代入し、(13)式を満足する $\varphi$ を求め、この $\varphi$ を $\varphi_u$ とし、この $\varphi_u$ と $\alpha_{k1}$ を(6)式の $X$ と $Y$ に代入し、その $X$ と $Y$ から

$$R_u' = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (15)$$

として第3図に示す歯元切下げ限界半径 $R_u'$ を求め、さらに $R_u'$ に対応する歯先における限界半径 $R_u$ を次式から求める。



第3図 歯元切下げ限界半径

$$R_u = \frac{r_2 + m \sec \Sigma + R_u' \tan^2 \Sigma - Z_{(\varphi_u, \alpha_{k1})} \tan \Sigma}{\sec^2 \Sigma} \quad (16)$$

ただし $Z_{(\varphi_u, \alpha_{k1})}$ は(6)式の $Z$ の $\varphi$ と $\alpha$ に $\varphi_u$ と $\alpha_{k1}$ を代入したものである。

### 5.2 ピニオンカッタによる刃元干渉限界

つぎにピニオンの歯元干渉曲線を求める。すなわち(9)式の接触軌跡面と、 $z_0$ 軸(ピニオン軸)を回転軸とする回転面との同時接触線が、ピニオンの歯元干渉曲線となる。前と同様に(9)式に示す接触軌跡面上に同時接触線を考え、その上の一点 $n(\alpha=\alpha_n, \varphi=\varphi_n)$ において法線を立て、その法線が $z_0$ 軸(ピニオン軸)を通るということから次式を得る。

$$-x_{0n} \begin{vmatrix} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\substack{\alpha=\alpha_n \\ \varphi=\varphi_n}} + y_{0n} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y_0}{\partial \varphi} & \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{\substack{\alpha=\alpha_n \\ \varphi=\varphi_n}} = 0 \quad (17)$$

これより次式を得る。

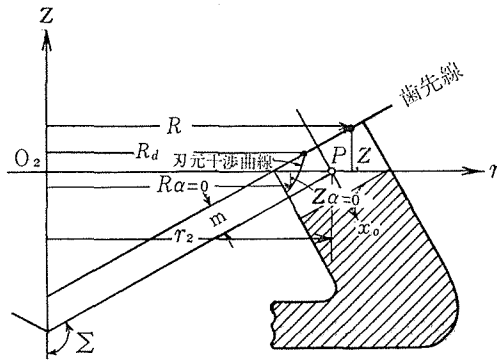
$$\alpha = 0 \quad (18)$$

$$\text{ただし } \varphi \approx \pm \left( \tan \alpha + \frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right)$$

すなわち(7)式で $\alpha=0$ とすればピニオン歯面上の干渉曲線が得られる。なお(6)式で $\alpha=0$ とすれば、フェースギヤがピニオンカッタで歯切りされる時、フェースギヤの歯先がピニオンカッタの刃元で削り落とされる現象(これをピニオンカッタによる刃元干渉という)が生じるときの、フェースギヤ歯面上の刃元干渉曲線が得られる。すなわち(6)式の $X$ と $Y$ において $\alpha=0$ とし、この $X_{\alpha=0}$ と $Y_{\alpha=0}$ から

$$R_{\alpha=0} = \sqrt{X_{\alpha=0}^2 + Y_{\alpha=0}^2} \quad (19)$$





第4図 刃元干渉限界半径

として第4図に示す刃元干渉限界半径が求められる。第4図に示す内接フェースギヤの歯先線の方程式は次のごとくなる。

$$Z = - \left\{ r_2 \cot(180^\circ - \Sigma) - \frac{m}{\sin(180^\circ - \Sigma)} \right\} + R \tan(\Sigma - 90^\circ). \quad (20)$$

そこで(20)式のZに(6)式の $Z_{\alpha=0}$ を代入し、Rに(19)式の $R_{\alpha=0}$ を代入し、(20)式を満足する $\varphi$ を求め、この $\varphi$ を $\varphi_d$ とし、この $\varphi_d$ を(19)式の $\varphi$ に代入すれば、第4図の内接フェースギヤの歯先における刃元干渉限界半径 $R_d$ が求まる。

### 6. 内接フェースギヤの歯先尖がり限界

フェースギヤの外径を大きくすると、ついにフェースギヤの表歯面と裏歯面との歯形が交叉し、歯の頂きの歯厚が零になった歯先尖り曲線となる。これは(6)式において、 $Y=0$ とおけば、内接フェースギヤ歯面とXZ平面との交線を与えるための $\alpha$ と $\varphi$ の関係式が得られる。すなわち $Y=0$ より次式を得る。

$$\begin{aligned} & \cos \Sigma \cos \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & - \cos \alpha (i + \cos \Sigma) \sec \left\{ \pm \tan \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \\ & - \sin \left\{ \pm \operatorname{inv} \alpha - \varphi \pm \left( \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_c - \frac{2x \tan \alpha_c}{N_1} \right) \right\} \cot \frac{\varphi}{i} = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

(21)式において $\varphi$ を $\varphi_1$ と仮定すると $\alpha$ として $\alpha_1$ が得られ、この $\varphi_1$ と $\alpha_1$ を(6)式に代入することにより $X_1, Z_1$ が求められる。同様にして $\varphi_2$ に対する $\alpha_2, X_2, Z_2, \varphi_3$ に対する $\alpha_3, X_3, Z_3$ 等を求めると、これらXとZによりXZ平面内の歯先尖り曲線が得られる。さてXZ平面における内接フェースギヤの歯先線の方程式は

$$Z = (-X + r_2) \cot \Sigma + \frac{m}{\sin \Sigma} \quad (22)$$

そこで歯先尖り曲線と歯先線との交点を求めるには、上記  $(X_1, Z_1)$ ,  $(X_2, Z_2)$ ,  $(X_3, Z_3)$  …… のうちで(22)式を満足する  $(X_m, Z_m)$  を見出すと、歯先尖り半径  $R_k$  は

$$R_k = X_m \quad (23)$$

として求められる。

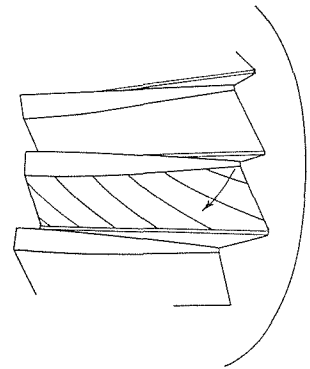
### 7. 内接フェースギヤの歯巾と、かみあい率

内接フェースギヤの歯巾は、フェースギヤの歯先尖り限界半径と歯元切下げ限界半径により制限される。なお双元干渉限界半径からも歯巾を制限することも考えられるが、フェースギヤに双元干渉が生じてもかみあい率や歯の強度には殆んど影響を与えないから、内接フェースギヤの歯巾  $b$  は次式から求められる。

$$\frac{b}{m} \leq \frac{R_k - R_u}{m} \operatorname{cosec}(180^\circ - \Sigma). \quad (24)$$

この式からわかるごとく、軸角  $\Sigma$  が大きくなるほど歯巾  $b$  を大きくとることができ、強度上有利となる。つぎに内接フェースギヤ歯面上の接触線は、第5図に示すごとく歯面上ななめの曲線となり、フェースギヤの外側側の歯先かどからかみあいが始まり、内側側の歯元でかみあいが終るから、かみあい率の最大値は歯先尖りに対するピニオンの回転角  $\varphi_n$  [(22)式を満足する  $X_m, Z_m$  を与える  $\varphi_n$ ] と、歯元切下げに対する  $\varphi_u$  とから計算される。すなわち

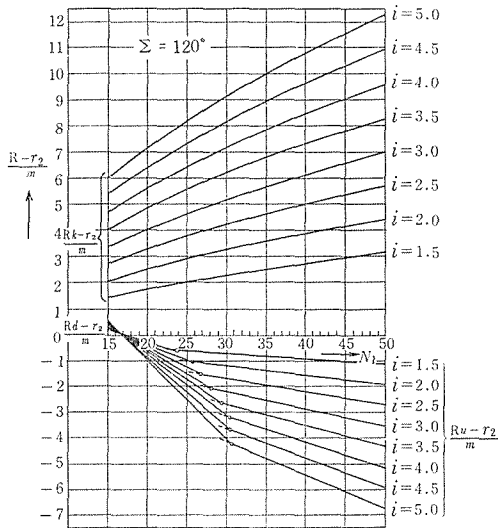
$$\varepsilon = \frac{|\varphi_n - \varphi_u|}{\frac{2\pi}{N_1}} \quad (25)$$



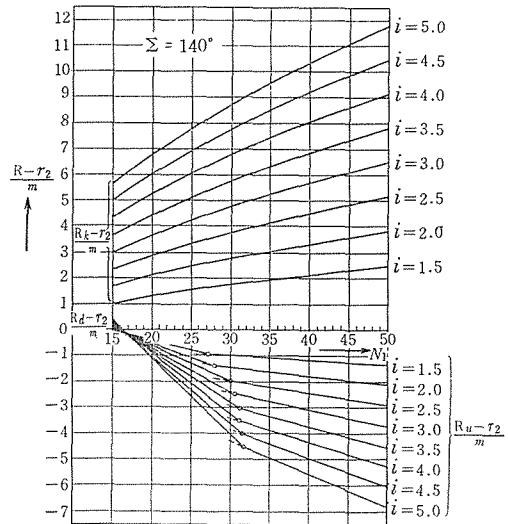
第5図 フェースギヤの接触線

### 8. 総合限界線図

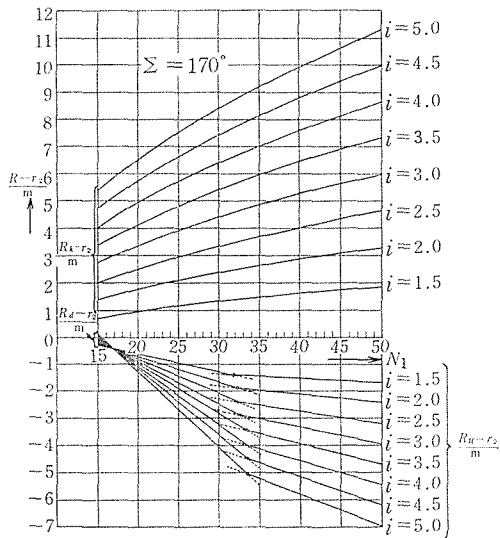
以上の理論を用いて電子計算機 FACOM 231 により計算を行ない、 $\alpha_c = 20^\circ$ ,  $x = 0$ ,  $\Sigma = 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ, 140^\circ, 150^\circ, 160^\circ, 170^\circ$  に対する総合限界線図を作成した。第6図、第7図、第8図はそれぞれ  $\Sigma = 120^\circ$ ,  $\Sigma = 140^\circ$ ,  $\Sigma = 170^\circ$  に対するオンセンタ形内接フェースギヤの総合限界線図を示す。図において  $\frac{R_k - r_2}{m}$  の曲線はフェースギヤ歯先尖り限界線を示し、これより下の部分が安全領域であり  $\frac{R_d - r_2}{m}$  の曲線はフェースギヤの双元干渉限界線を示し、これより上の部分が安全領域であり、 $\frac{R_u - r_2}{m}$  の曲線はフェースギヤの歯元切下げ限界線を示し、これより上の部分が安全領域である。歯数比  $i (= N_2/N_1)$  として



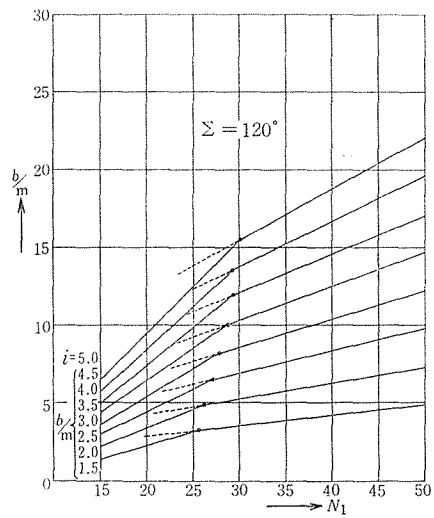
第6図 総合限界線図



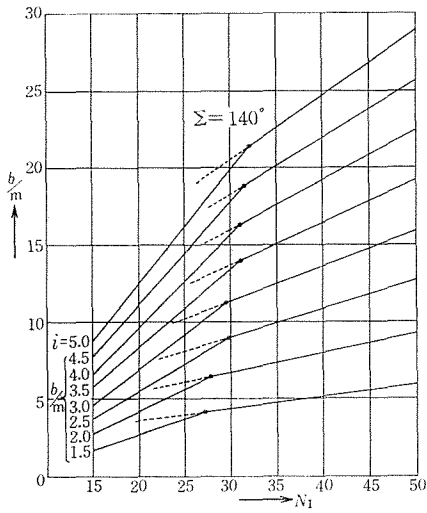
第7図 総合限界線図



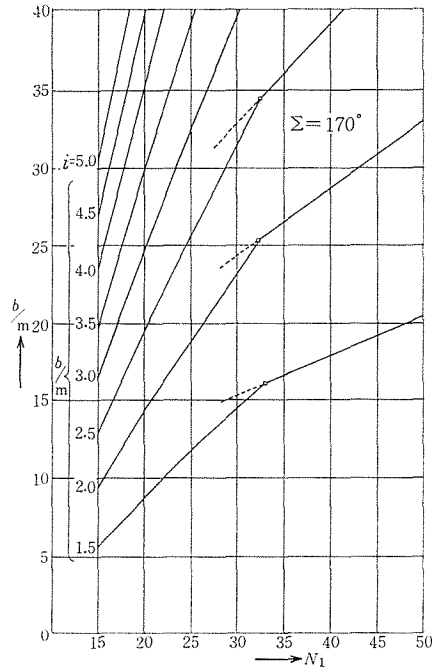
第8図 総合限界線図



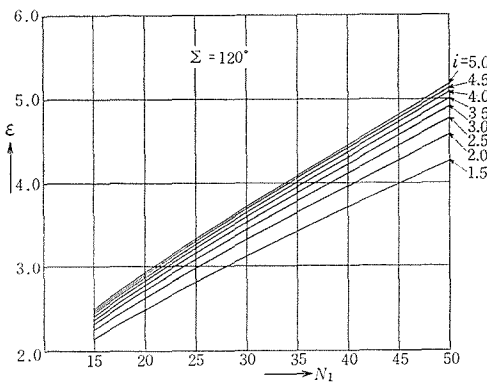
第9図 フェースギヤの歯巾の最大値



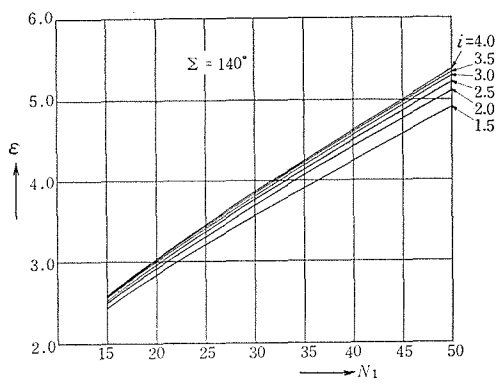
第10図 フェースギヤの歯巾の最大値



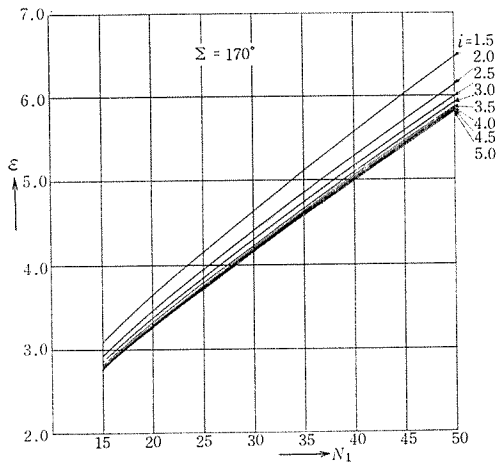
第11図 フェースギヤの歯巾の最大値



第12図 フェースギヤのかみあい率の最大値



第13図 フェースギヤのかみあい率の最大値



第14図 フェースギヤのかみあい率の最大値

1.5~5.0を与えている。この総合限界線図により  $N_1$  が大なるほど、また  $i$  が大なるほど各種の干渉に対する安全領域が広くなり、歯巾を広くとることができることがわかる。第9図、第10図、第11図はそれぞれ  $\Sigma=120^\circ, 140^\circ, 170^\circ$  に対する歯巾の最大値を示す。この図ではフェースギヤの双元干渉も考慮しているので、限界線が折れ線となっているが、前述のごとく双元干渉限界を考えないで歯元切下げ限界のみを考えるならば、歯元切下げ限界線の延長(点線で示してある)を採用すればよく、歯巾は広くとり得る。実用上は

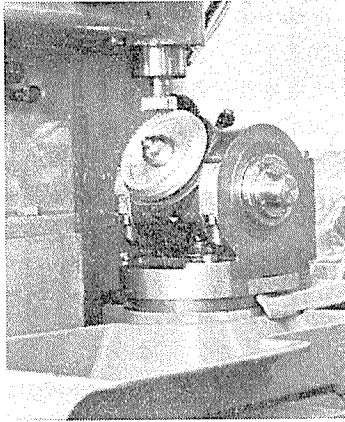
歯の中央の高さまで切下げが生ずるまで内径を小さくしてもよいので歯巾はもっと広くとれる<sup>10)</sup>。第12図、第13図、第14図はそれぞれ  $\Sigma=120^\circ, 140^\circ, 170^\circ$  に対するかみあい率(最大値)を示す。この図から内接フェースギヤのかみあい率は大なる値を有することがわかる。

### 9. 数 値 例

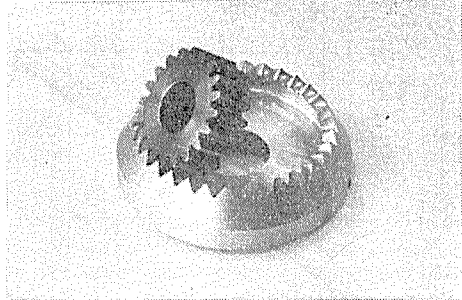
$m=2, \alpha_c=20^\circ, x=0, N_1=20$  のピニオンに、軸角  $\Sigma=120^\circ$  でかみあう  $N_2=30, 40, 50$  の3ケの内接フェースギヤ、軸角  $\Sigma=140^\circ$  でかみあう  $N_2=30, 40, 50$  の3ケの内接フェースギヤ、および軸角  $\Sigma=170^\circ$  でかみあう  $N_2=30, 40, 50$  の3ケの内接フェースギヤを、それぞれ第6図、第7図、第8図の総合限界線図を用いて設計した。第1表はそれら計算値を示す。ただし括弧内の数値は試作した現物の数値である。第15図は試作の内接フェースギヤ切削装置による歯切りの様子を示し、第16図、第17図、第18図、第19図、第20図、第21図、第22図、第23図、第24図は、歯切りした内接フェースギヤを示す。これら試作の内接フェースギヤにより、本理論の正しいことを確認した。

第1表 試作内接フェースギヤの諸元の計算値( $m=2, \alpha_c=20^\circ, N_1=20$ )

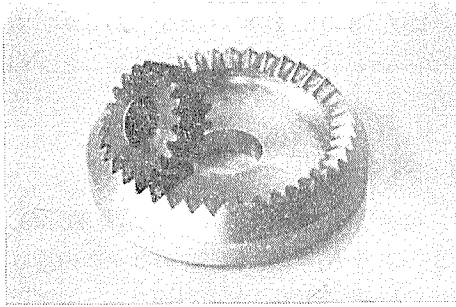
i	N <sub>2</sub>	Σ=120°					Σ=140°					Σ=170°				
		R <sub>k</sub>	R <sub>u</sub>	R <sub>d</sub>	b	ε	R <sub>k</sub>	R <sub>u</sub>	R <sub>d</sub>	b	ε	R <sub>k</sub>	R <sub>u</sub>	R <sub>d</sub>	b	ε
1.5	30	33.5	29.0	29.4	5.4	2.50	32.5	28.4	29.2	6.5	2.82	31.8	27.6	28.8	25 (15)	3.64
2	40	45.0	38.2	39.2	8.0	2.64	44.2	37.6	38.9	10.5	2.90	43.4	36.9	38.6	38 (16)	3.44
2.5	50	56.5	47.6	49.0	10.5	2.72	55.8	47.0	48.6	14.0	2.96	55.0	46.2	48.4	52 (16)	3.34



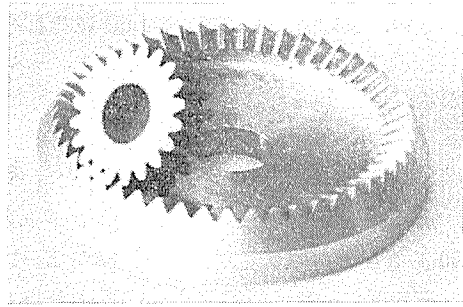
第15図 内接フェースギヤの  
切削装置



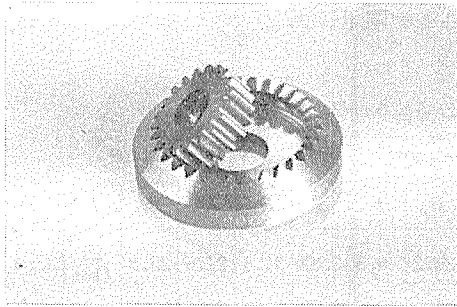
第16図  $\Sigma=120^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=30$  ( $i=1.5$ ) の  
内接フェースギヤ



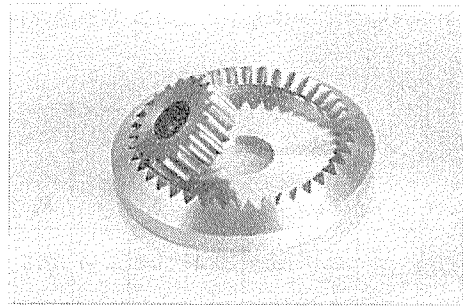
第17図  $\Sigma=120^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=40$  ( $i=2.0$ ) の  
内接フェースギヤ



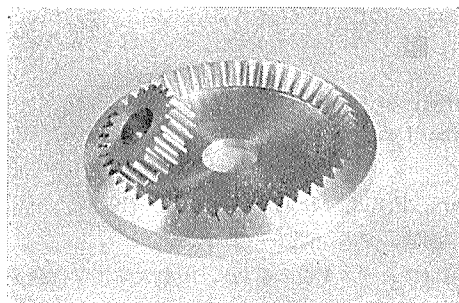
第18図  $\Sigma=120^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=50$  ( $i=2.5$ ) の  
内接フェースギヤ



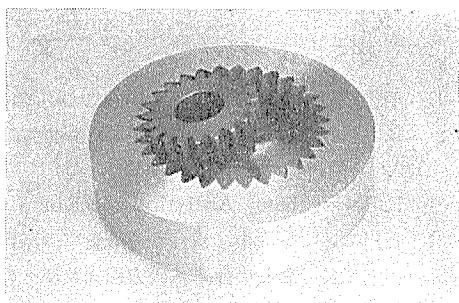
第19図  $\Sigma=140^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=30$  ( $i=1.5$ ) の  
内接フェースギヤ



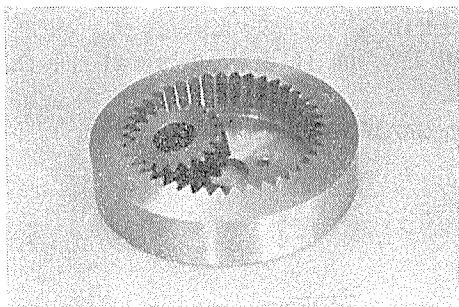
第20図  $\Sigma=140^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=40$  ( $i=2.0$ ) の  
内接フェースギヤ



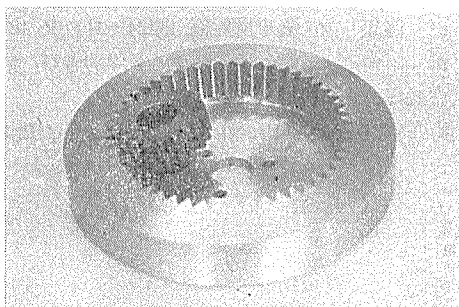
第21図  $\Sigma=140^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=50$  ( $i=2.5$ ) の  
内接フェースギヤ



第22図  $\Sigma=170^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=30$  ( $i=1.5$ ) の  
内接フェースギヤ



第23図  $\Sigma=170^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=40$  ( $i=2.0$ ) の  
内接フェースギヤ



第24図  $\Sigma=170^\circ$ ,  $m=2$ ,  $\alpha_c=20^\circ$ ,  $N_1=20$ ,  
 $x=0$ ,  $N_2=50$  ( $i=2.5$ ) の  
内接フェースギヤ

## 10. 結 言

内接フェースギヤについての解析的研究を行ない、内接フェースギヤの歯面の方程式、接触軌跡面と接触線の方程式を求め、内接フェースギヤの歯元切下げ限界、刃元干渉限界、歯先尖がり限界を明らかにし、内接フェースギヤの歯巾決定に必要な綜合限界線図を作成し、さらにかみあい率についても考察し、数値例を示し、これを試作の内接フェースギヤ切削装置により歯切りして、本理論の正しいことを確認した。なお本理論は  $\Sigma=90^\circ$  および  $\Sigma < 90^\circ$  の場合にも適用できることはいうまでもない。

本研究は昭和42年度の文部省科学研究費補助金を受けて行なわれたものである。

終りに数値計算に助力された八重島公郎、小野嘉一、小野定義の諸氏および内接フェースギヤ切削装置の試作に協力された平田幸吉、滝沢一孝、宮島征夫、峯村勝の諸氏に対し深甚なる感謝の意を表します。

## 文 献

- 1) 明山正元, フェース歯車の切削について, 日立評論, 23巻9号 (昭15—9) P.35.
- 2) B. Bloomfield, Designing Face Gears, Machine Design, Vol.19, No.4, April, 1947, P. 129.
- 3) E. Buckingham, Analytical Mechanics of Gears, P.312, Mc GRAW-HILL (1949).
- 4) 石川二郎, 平歯車に噛合う特殊歯車の試作, 科学測器, 9巻 (昭25—2) P.9.
- 5) 相羽三良, 新しい歯車基礎方程式及びその一応用 (フェースギヤの解析), 山梨大学工学部研究報告第3号 (昭27—3), P.66.
- 6) 成瀬政男, 横田晃, フェースギヤ(1), (2), 機械の研究, 6巻, 4号, 5号 (昭29—4, 5), P. 383, P.473.
- 7) 両角宗晴, インボリュートフェースギヤの研究, 日本機械学会講演論文集, No.199 (昭43—9) P.169.
- 8) 渡辺 茂, 歯車歯形論 (昭24—4), P.48 (コロナ社).
- 9) 両角宗晴, 螺旋面に関する数学的考察, 精密機械, 12巻, 10, 11, 12号, P.24 (昭21—10, 11, 12).
- 10) W. Dudley, Practical Gear Design, P.108, Mc GRAW-HILL (1954).



### Summary

#### Study on Internal Face Gear

Muneharu MOROZUMI

(Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering)

One of the principal design problems in the internal face gears is to calculate the face width of the internal face gears.

The maximum outside diameter of the internal face gear is limited by the point where the top land of the tooth narrows to a knife-edge, and the minimum inside diameter is limited by the point where the undercut exists in the tooth profile of the internal face gear.

In designing the internal face gearsets, the following conditions should be satisfied :

- (a) The crest of the internal face gear should not be sharpened.
- (b) The undercut should not exist in the tooth form of the internal face gear.
- (c) The involute interference should be avoided.
- (d) The contact ratio should be larger than 1.0.

An analytical study on these subjects mentioned above in the internal face gear is treated by the author, and a pack of the synthetic diagrams available for the design and production of the internal face gearset are prepared.

These synthetic diagrams are used for determining the maximum outside diameter, the minimum inside diameter and the face width of the internal face gear.

The author shows some numerical examples with a view to facilitating the practical utilization of these diagrams, and the internal face gearsets are made by using the synthetic diagrams presented in this paper.