

孔縁を補強した円孔無限板の応力分布について

佐々木三郎*

(昭和43年10月31日受理)

1. ま え が き

円孔板を引張ると孔縁に応力が集中し、破損の原因となることは周知のことからである。この応力集中を緩和するために孔縁を増厚円環で補強するのが普通で、その理論や有限巾試験片による光弾性実験が多数報告されている⁽¹⁾。しかるに内周に面内荷重が作用したときの応力分布や補強環の効果を論じたものは少ないようである⁽²⁾。いずれも2次元弾性論による解析で、実際の3次元形状をもつ補強円環にたいしそれが妥当であるどうかは形状によつては疑はしく、といつて各種の断面について一々厳密に解くのも非常に困難と面倒が予想されよう。

筆者は円環を曲り梁と考え、前報告⁽³⁾の結果を用い、初めに内周に任意の面内荷重が作用したときの円孔板の応力解析を論じた。任意の荷重をフーリエ級数で与え、軸対称と逆対称の場合に分けて接合部の応力を定める係数を求めた。適用例として断面を異にする二つの試験片に集中(法線, 接線)荷重が作用した場合を計算し、補強環の剛性が ∞ (剛体環)と0(円孔無限板のみ)の特別な場合とも比較し応力分布を図表にして補強環の影響をしらべた。

つぎに補強円孔板を無限遠で引張つた場合を同じ方法で計算し、従来の報告と比較してその妥当性をたしかめ、さらに補強環が各種の大いさをもつ円形断面の場合の応力分布を図表にして補強環の効果を検討したものである。

附録に本論文に用いた主な記号の説明と、円輪を曲り梁として扱つた前報告の結果を本論文の荷重条件になおし要約してかかげた。

2. 内周に面内荷重が作用した場合

2. 円孔無限板の応力と変位

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ を複素応力函数とすれば、Airy の応力函数 F と極座標による応力・変位は

$$\left. \begin{aligned} F &= \operatorname{Re} \left[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z) \right], \\ \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 2\operatorname{Re} \left[\varphi'(z) \right] - \left\{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \right\} e^{i2\theta}, \\ \sigma_\theta &= 2\operatorname{Re} \left[\varphi'(z) \right] + \operatorname{Re} \left[\left\{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \right\} e^{i2\theta} \right], \\ u_r - iu_\theta &= \frac{1}{E} \left\{ (3-\nu)\overline{\varphi(z)} - (1+\nu) \left(\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z) \right) \right\} e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

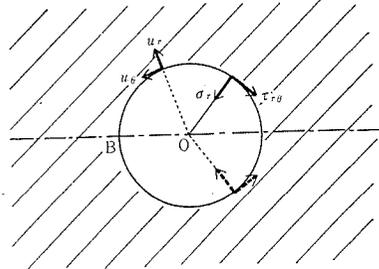
* 機械工学教室助教授

円孔板の内周に任意の面内荷重——フーリエ級数で与えた——が作用した場合を軸対称と逆対称に分け、各々について境界条件を満足する $\varphi(z)$, $\psi(z)$ および応力・変位をつぎに要約する。その誘導は省略する⁽⁴⁾

(軸対称荷重)

- (1) 孔縁に作用する外応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} (2)$$



図—1 無限円孔板(軸対称)

- (2) $\varphi(z)$, $\psi(z)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{1+\nu}{8}(a_1 - b_1)\frac{R_0}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(a_n - b_n)\frac{R_0^n}{z^n}, \\ \psi''(z) &= -\frac{3-\nu}{8}(a_1 - b_1)\frac{R_0}{z} - a_0\frac{R_0^2}{z^2} - \frac{1}{4}\{(1-\nu)a_1 + (3+\nu)b_1\}\frac{R_0^3}{z^3} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\{na_n - (n+2)b_n\}\frac{R_0^{n+2}}{z^{n+2}}. \end{aligned} \right\} (3)$$

- (3) 応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 A^2 + (\Psi_1 a_1 - \Psi_2 b_1)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(\Psi_n^{n+2} a_n - \Psi_{n+2}^{n+2} b_n)\cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\Psi_3 a_1 - \Psi_4 b_1)\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(\Psi_n^n a_n - \Psi_{n+2}^n b_n)\sin n\theta, \\ \sigma_\theta &= -a_0 A^2 - (\Psi_5 a_1 - \Psi_6 b_1)\cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty}(\Psi_n^{n-2} a_n - \Psi_{n+2}^{n-2} b_n)\cos n\theta. \end{aligned} \right\} (4)$$

ただし $A = R_0/r$, Ψ_1, \dots, Ψ_6 および Ψ^i_j は(附1)式参照

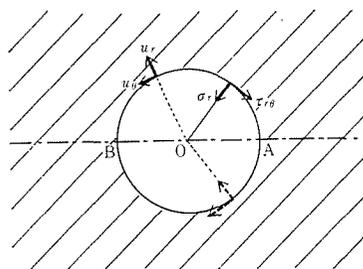
- (4) 変位——B点を固定したときの内周の変位

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{R_0}{E}\left[-(1+\nu)a_0 - \left\{(1+\nu)a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n A_n\right\}\cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta\right], \\ u_\theta &= \frac{R_0}{E}\left[\left\{(1+\nu)a_0 - \frac{1+\nu}{2}(a_1 + b_1) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n A_n\right\}\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta\right], \\ \text{ただし } A_n &= \frac{1}{n^2 - 1}\{(2n+1-\nu)a_n - (n-n\nu+2)b_n\}, \\ B_n &= \frac{1}{n^2 - 1}\{(n-n\nu+2)a_n - (2n+1-\nu)b_n\}. \end{aligned} \right\} (5)$$

(逆対称荷重)

(1) 孔縁に作用する外応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta. \end{aligned} \right\} (6)$$



図一 無限円孔板(逆対称)

(2) $\phi(z)$, $\psi(z)$

$$\left. \begin{aligned} \phi'(z) &= i \left[\frac{1+\nu}{8} (d_1 + c_1) \frac{R_0}{z} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (d_n + c_n) \frac{R_0^n}{z^n} \right], \\ \phi''(z) &= i \left[\frac{3-\nu}{8} (d_1 + c_1) \frac{R_0}{z} + c_0 \frac{R_0^2}{z^2} - \frac{1}{4} \left\{ (1-\nu)d_1 - (3+\nu)c_1 \right\} \frac{R_0^3}{z^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ nd_n + (n+2)c_n \right\} \frac{R_0^{n+2}}{z^{n+2}} \right]. \end{aligned} \right\} (7)$$

(3) 応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (\Psi_1 d_1 + \Psi_2 c_1) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (\Psi_n^{n+2} d_n + \Psi_{n+2}^{n+2} c_n) \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= c_0 d^2 - (\Psi_3 d_1 + \Psi_4 c_1) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} (\Psi_n^n d_n + \Psi_{n+2}^n c_n) \cos n\theta, \\ \sigma_\theta &= -(\Psi_5 d_1 + \Psi_6 c_1) \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} (\Psi_n^{n-2} d_n + \Psi_{n+2}^{n-2} c_n) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} (8)$$

ただし $d = R_0/r$, Ψ_1, \dots, Ψ_6 および Ψ^i_j は(附1)式参照.

(4) 変位—A, B点を固定したときの内周の変位

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{R_0}{E} \left[\left\{ -\frac{1}{2} (1+\nu)(d_1 - c_1) + \sum_{\text{odd}}^n D_n \right\} \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} C_n \sin n\theta \right], \\ u_\theta &= \frac{R_0}{E} \left[\sum_{\text{ev}}^n D_n + \sum_{\text{odd}}^n D_n \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} D_n \cos n\theta \right], \\ \text{ただし } C_n &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (2n+1-\nu)d_n + (n-n\nu+2)c_n \right\}, \\ D_n &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (n-n\nu+2)d_n + (2n+1-\nu)c_n \right\}. \end{aligned} \right\} (9)$$

2.2 円環の断面力と変位

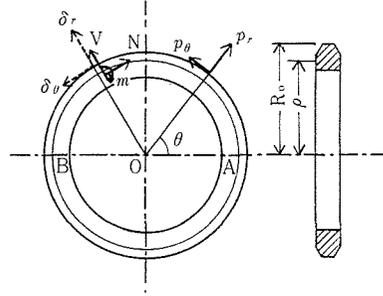
図一三に示す円環の内・外周に作用する任意の荷重をつぎのフーリエ級数で表わす。

内周：(図一四. 参照)

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \delta_n \sin n\theta), \\ p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \\ m &= \rho \left\{ \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \cos n\theta + \nu_n \sin n\theta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

外周：(図一三. p_r, p_θ は p'_r, p'_θ に相当する)

$$\left. \begin{aligned} p'_r &= \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha'_n \cos n\theta + \delta'_n \sin n\theta), \\ p'_\theta &= \gamma'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



図一三 円環

補強環に貯えられる ひずみエネルギー を

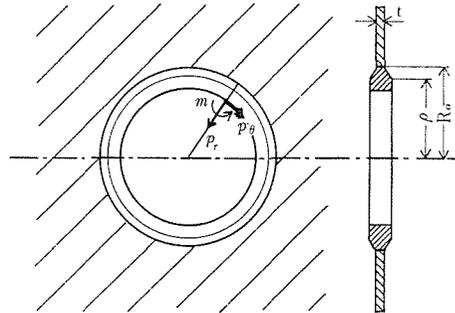
$$U = \frac{2}{AE} \left[\frac{1 + \kappa}{2\kappa\rho} \int_0^\pi M^2 d\varphi + \frac{\rho}{2} \int_0^\pi N^2 d\varphi + \int_0^\pi MN d\varphi + \frac{\zeta\rho}{2} \int_0^\pi V^2 d\varphi \right]$$

にとり Castigliano の定理を用いて断面力, 変位を計算した。計算は前論文⁽³⁾で詳述したので結果を要約して附録Ⅱにかかげる。

2.3 孔縁を補強した円孔無限板

図一三の円環を図一, 2の無限円孔板に挿入し接合したものが図一四である。内周に作用する面内荷重を(10)式, 接合部に生ずる力・応力を(11)式および(2), (6)式とすれば

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{R_0 t} \alpha'_0, \quad a_n = \frac{1}{R_0 t} \alpha'_n, \dots, \\ c_n &= \frac{1}{R_0 t} \gamma_n, \quad b_n = \frac{1}{R_0 t} \beta_n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



図一四 補強環のある無限円孔板

つりあいの条件は(附5)式より

$$\left. \begin{aligned} a_1 - b_1 &= \frac{1}{R_0 t} (\alpha_1 - \beta_1), & c_0 &= \frac{1}{R_0 t} \frac{1}{e_0} (e_i \gamma_0 - \mu_0), \\ d_1 + c_1 &= \frac{1}{R_0 t} (\delta_1 + \gamma_1). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

接合部の連続条件は

$$u_r = \bar{\delta}_r, \quad u_\theta = \bar{\delta}_\theta \quad (14)$$

(5), (附7) 式および(9), (附8) 式をそれぞれ等しくおき, (13) 式と共に連立方程式を a_0, a_1, \dots, c_n について解けば,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{R_0 t} C_0 \alpha_0, & c_0 &= \frac{1}{R_0 t} \frac{1}{e_0} (e_i \gamma_0 - \mu_0), \\ a_1 &= \frac{1}{R_0 t} [C_1 \alpha_1 - C_3 \beta_1 + C_5 \nu_1], & d_1 &= \frac{1}{R_0 t} [C_1 \delta_1 + C_3 \gamma_1 + C_5 \mu_1], \\ b_1 &= \frac{1}{R_0 t} [-C_2 \alpha_1 + C_4 \beta_1 + C_5 \nu_1], & c_1 &= \frac{1}{R_0 t} [C_2 \delta_1 + C_4 \gamma_1 + C_5 \mu_1], \\ a_n &= \frac{1}{R_0 t} [D_1 \alpha_n + D_3 \beta_n + D_5 \nu_n], & d_n &= \frac{1}{R_0 t} [D_1 \delta_n - D_3 \gamma_n - D_5 \mu_n], \\ b_n &= \frac{1}{R_0 t} [D_2 \alpha_n + D_4 \beta_n + D_6 \nu_n], & c_n &= \frac{1}{R_0 t} [-D_2 \delta_n + D_4 \gamma_n + D_6 \mu_n]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし

$$\xi = \frac{A}{\rho t} \frac{E_r}{E},$$

$$g = 2\{\xi(1 + \nu) + K_{00}\},$$

$$C_0 = \frac{1}{\xi(1 + \nu)(1 + \kappa) + 1},$$

$n \geq 2$ に対し

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \\ C_5 & \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g & K_{00} \\ g & K_{00} - 2K_{i0} \\ K_0 & K_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \xi(2n + 1 - \nu) + (n^2 - 1)K_1(n),$$

$$L_2 = \xi(n - n\nu + 2) - (n^2 - 1)K_{20}(n),$$

$$L_3 = \xi(2n + 1 - \nu) + (n^2 - 1)K_{300}(n),$$

$$G = L_1 L_3 - L_2^2,$$

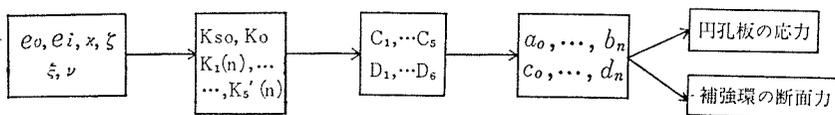
$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \\ D_5 & D_6 \end{pmatrix} = \frac{n^2 - 1}{G_n} \begin{pmatrix} K_1(n) & K_{20}(n) \\ K_{2i}(n) & K_{3i0}(n) \\ K_4(n) & K_5(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3 & L_2 \\ L_2 & L_1 \end{pmatrix}.$$

(16)

(記号, $K_{00}, K_{i0}, K_0, K_1(n), \dots, K_5(n)$ は(附2) 式参照)

接合部の応力を定めるフーリエ係数 a_0, \dots, c_n が求まれば, 無限円孔板の応力は(4), (8) 式, 補強環の断面力は(附6) 式によつて求めることができる。

円孔板・補強環の形状材質および荷重(10) 式を与えて, それらの応力・断面力を計算する順序を図式的に表せば



特別な場合

(R) 補強環の剛性が無限大で剛体環とみなされる場合 ($\xi = \infty$)……(15)(16)式より

$$\begin{aligned}
 C_0 = C_5 = 0, \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{1}{2}, \quad D_1 = D_2 = \dots = D_6 = 0. \\
 \left. \begin{aligned}
 a_1 = -b_1 = \frac{1}{R_0 t} \frac{1}{2} (\alpha_1 - \beta_1), \quad c_0 = \frac{1}{R_0 t} \frac{1}{e_0} (e_i \gamma_0 - \mu_0), \\
 a_0 = a_n = b_n = 0. \quad (n \geq 2) \quad c_1 = d_1 = \frac{1}{R_0 t} \frac{1}{2} (\gamma_1 + \delta_1), \\
 c_n = d_n = 0. \quad (n \geq 2)
 \end{aligned} \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

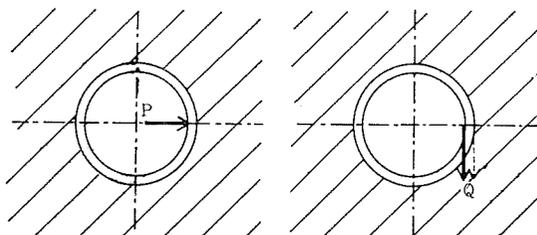
(F) 補強環のない円孔板のみの場合 ($\xi = \infty$)

円孔板の応力は直接(4), (8)式より求めることができる。

2.4 計算例

表一に示す2種の試験片の内周に 法線集中荷重, 接線集中荷重(図一5)が作用した場合を計算した。

これらの記号を(A) (B)とし形状材質による数値を表一にまとめた。

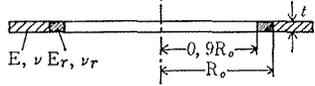
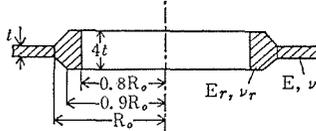


$$\begin{aligned}
 \alpha_0 = -\frac{P}{2\pi}, \quad \gamma_0 = \frac{Q}{2\pi}, \\
 \alpha_n = -\frac{P}{\pi}, \quad \beta_n = 0, \quad \nu_n = 0. \quad \gamma_n = \frac{Q}{\pi}, \quad \delta_n = 0, \quad \mu_0 = \mu_n = 0.
 \end{aligned}$$

(法線集中荷重) (接線集中荷重)

図一5 荷重(計算例)

表一 1 試験片の記号, 形状, 数値

記号	(A) -----	(B) -----
形状	 $\frac{E_r}{E} = 70, \nu_r = \nu = 0.3$	 $E_r = E, \nu_r = \nu = 0.3$
ρ/R_o	0.95	0.8846154
e_o, e_i	1.0526316, 0.9473684	1.1304348, 0.9043478
κ	0.0009251	0.0034368
ζ	3.12	3.12
ξ	7.3684240	0.7347826
K_{o0}, K_{i0}	1.11665 0.98861	1.33040 0.98379
C_0	0.094448	0.510595
C_1	0.552014	0.791037
C_2	0.447799	0.208963

表一 2 は特別な場合—剛体補強環 (R), 円孔無限板 (F)—の応力分布の式である。
 図一 6 ~ 図一 11 は上記 4 試験片の応力分布を法線集中, 接線集中荷重について図示
 したもので目盛は無次元化した $\sigma/\frac{P}{R_o t}, \tau/\frac{P}{R_o t}$ の値である。
 (ただし スペースの関係で目盛の間隔は一定でない)

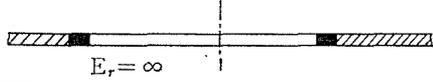
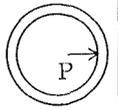
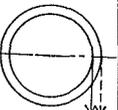
(法線集中荷重)

- 図一 6.1 σ_r の軸分布 ($\theta = 0, \pi/2, \pi$).
- 図一 6.2 σ_r の円周分布
($R_o/r = 1.0, 0.9, 0.75, 0.33$).
- 図一 7.1 σ_θ の軸分布 ($\theta = 0, \pi/2, \pi$).
- 図一 7.2 σ_θ の円周分布を各試験片について表
したものである。
- 図一 8.1 $\tau_{r\theta}$ の軸分布 ($\pi/16, \pi/4, \pi/2$)
($\theta = 0, \pi$ 軸上では $\tau_{r\theta} = 0$).
- 図一 8.2 $\tau_{r\theta}$ の円周分布
($R_o/r = 1.0, 0.75, 0.33$)

(接線集中荷重)

- 図一 9.1 σ_r の軸分布 ($\pi/16, \pi/4, \pi/2$)
($\theta = 0, \pi$ 軸上では $\sigma_r = 0$).
- 図一 9.2 σ_r の円周分布
($R_o/r = 1.0, 0.75, 0.33$).
- 図一 10.1 σ_θ の軸分布 ($\pi/16, \pi/4, \pi/2$)
($\theta = 0, \pi$ 軸上では $\sigma_\theta = 0$).
- 図一 10.2 σ_θ の円周分布
($R_o/r = 1.0, 0.75, 0.33$).
- 図一 11 $\tau_{r\theta}$ の軸分布 ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2$).

表-2 特別な場合の応力式

	剛 体 補 強 環	円 孔 無 限 板
記 号	(R) _____	(F)
	 $E_r = \infty$	
 $\alpha_0 = -\frac{P}{2\pi}$ $\alpha_n = -\frac{P}{\pi}$	$\sigma_r = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left\{ -(3 + \nu)A + (1 - \nu)A^3 \right\} \cos \theta,$ $\tau_{r\theta} = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left\{ (1 - \nu)A + (1 + \nu)A^3 \right\} \sin \theta,$ $\sigma_\theta = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left\{ (1 - \nu)A - (1 + \nu)A^3 \right\} \cos \theta.$	$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3 - \nu}{2} A \cos \theta - \frac{2A(\cos \theta - A)}{D} \right\},$ $\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ -A^2 - \frac{3 - \nu}{2} A^3 \cos \theta + \frac{A(1 - A^2)(2A - (1 + A^2)\cos \theta)}{D^2} \right\},$ $\tau_{r\theta} = \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3 - \nu}{4} - \frac{1 - A^2}{2D^2} \right\} A(1 - A^2) \sin \theta.$
 $\gamma_0 = \frac{Q}{2\pi}$ $\gamma_n = \frac{Q}{\pi}$	$\sigma_r = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left\{ (3 + \nu)A - (1 + \nu)A^3 \right\} \sin \theta,$ $\tau_{r\theta} = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left[2 \frac{R_i}{R_0} A^2 + \left\{ (1 - \nu)A + (1 + \nu)A^3 \right\} \cos \theta \right],$ $\sigma_\theta = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{4\pi} \left\{ -(1 - \nu)A + (1 + \nu)A^3 \right\} \sin \theta.$	$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{3 - \nu}{2} A + \frac{2A}{D} \right\} \sin \theta,$ $\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3 - \nu}{2} A^3 - \frac{2A^3}{D} - \frac{A(1 - A^2)^2}{D^2} \right\} \sin \theta,$ $\tau_{r\theta} = \frac{Q}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} A^2 + \frac{3 - \nu}{4} A(1 - A^2) \cos \theta - \frac{A^3(A - \cos \theta)}{D} \right.$ $\left. + \frac{A(1 - A^2)(2A - (1 + A^2)\cos \theta)}{2D^2} \right\}.$

$$A = \frac{R_0}{r}, \quad D = 1 - 2A \cos \theta + A^2.$$

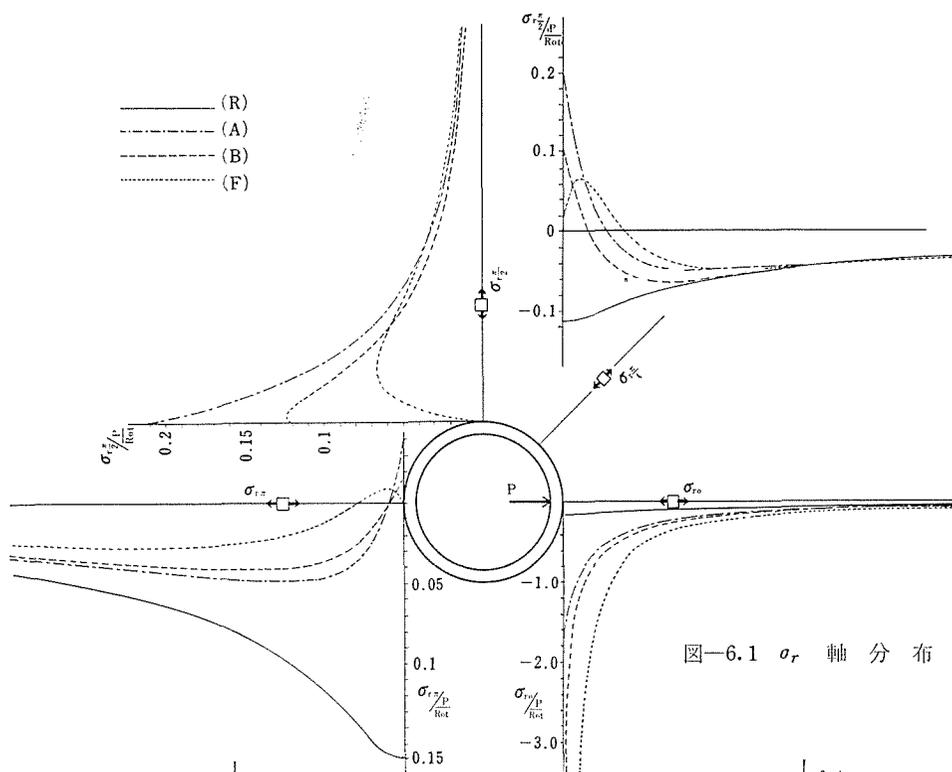


図-6.1 σ_r 軸分布

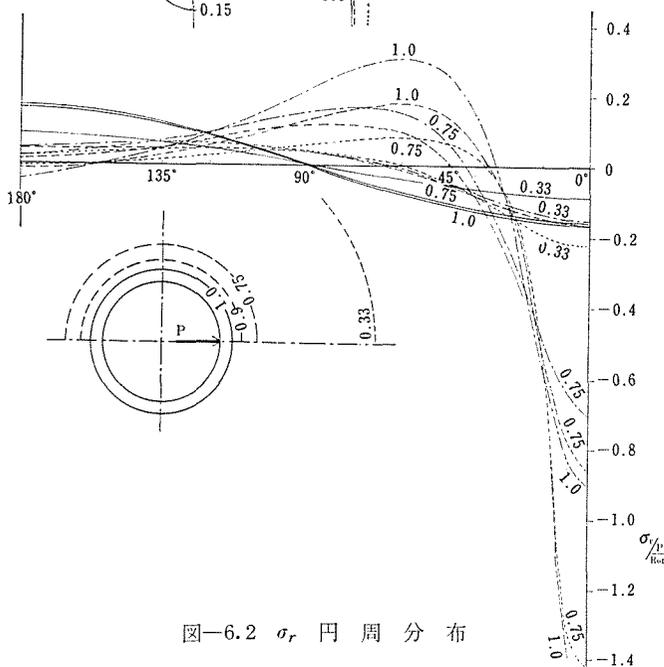


図-6.2 σ_r 円周分布

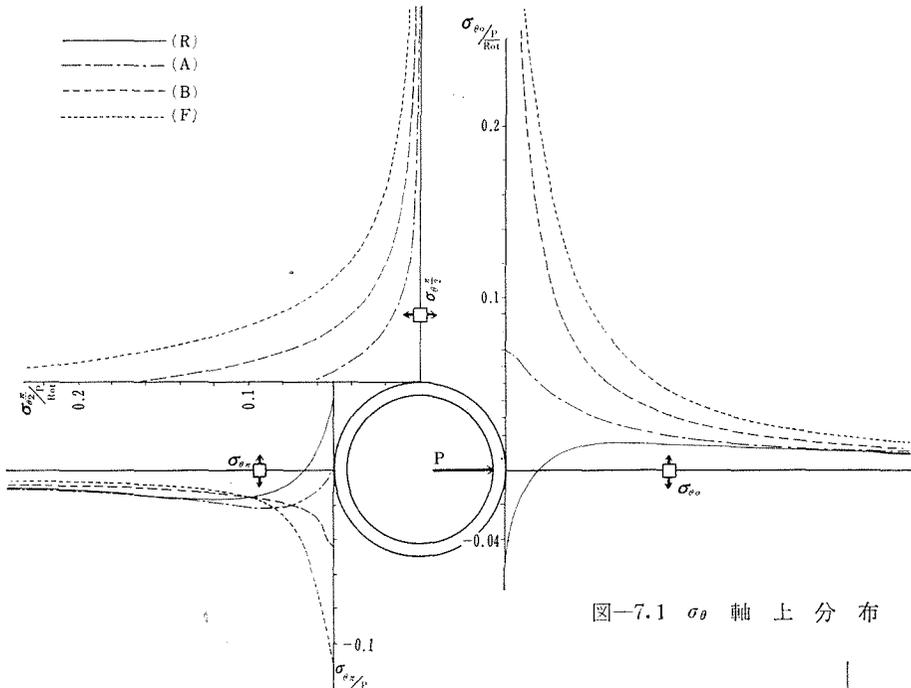


图-7.1 σ_{θ} 軸上分布

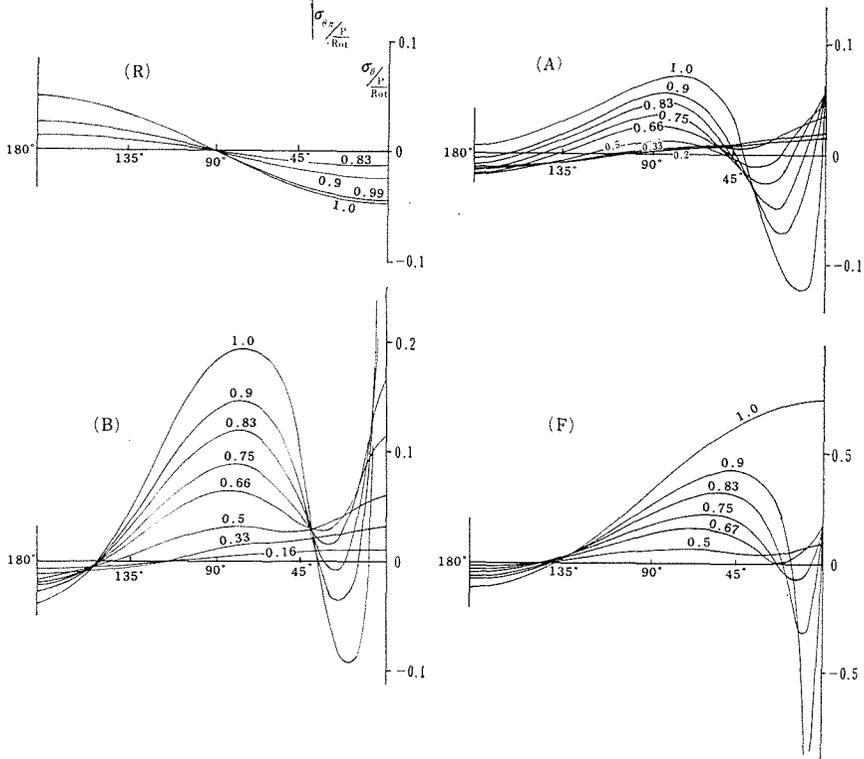
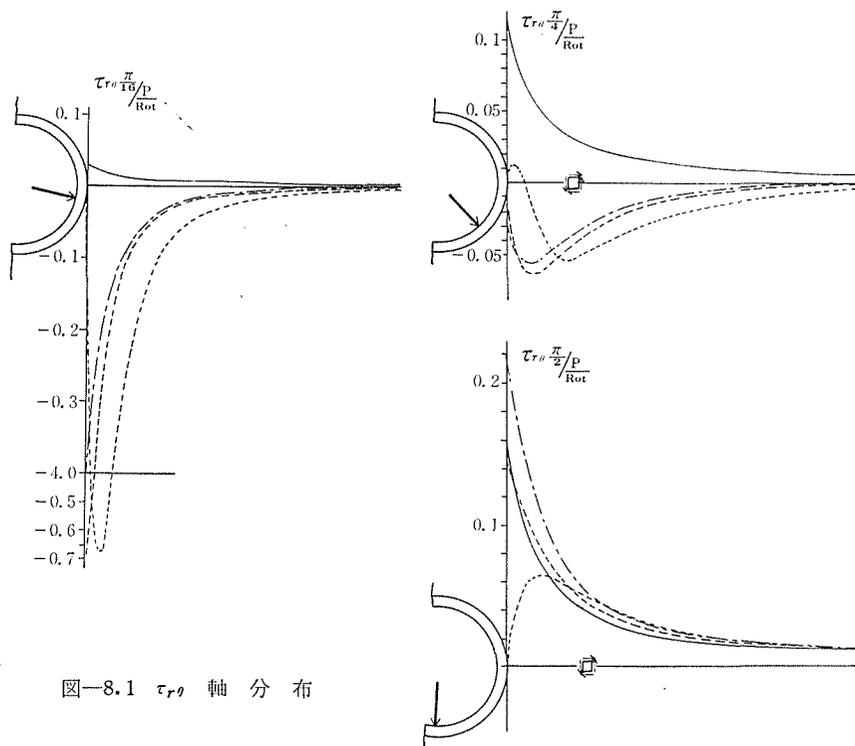
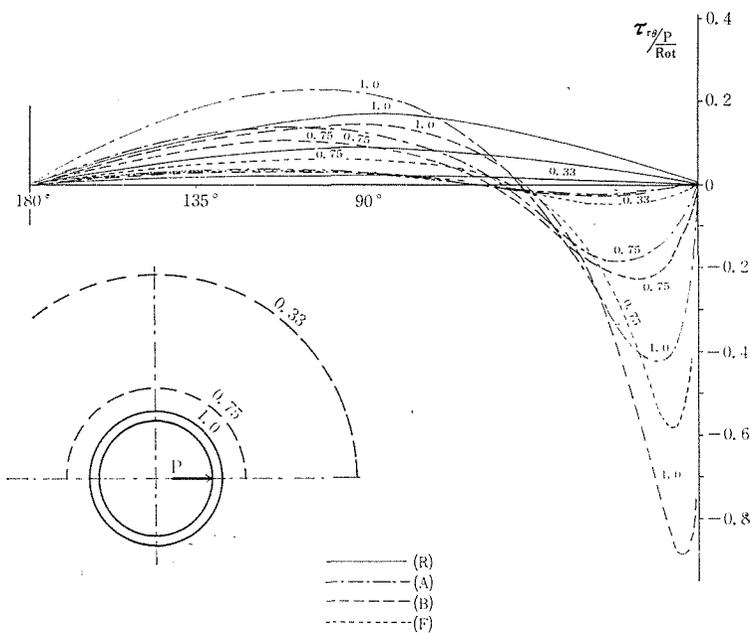


图-7.2 σ_{θ} 円周分布



図—8.1 $\tau_{r\theta}$ 軸分布



図—8.2 $\tau_{r\theta}$ 円周分布

图-9.1 σ_r 轴分布

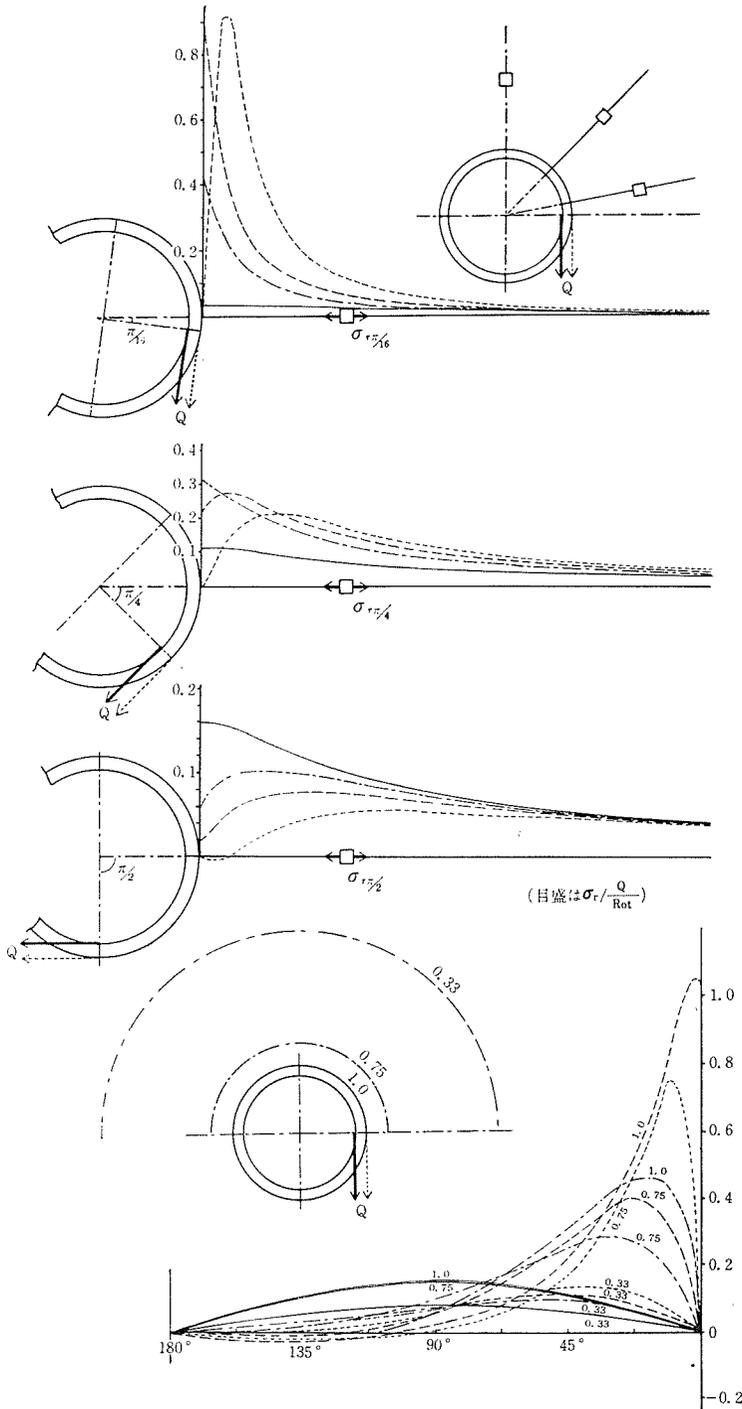
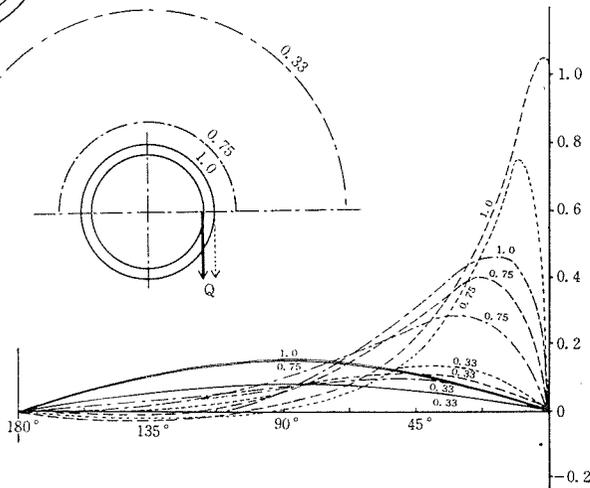


图-9.2 σ_r 円周分布



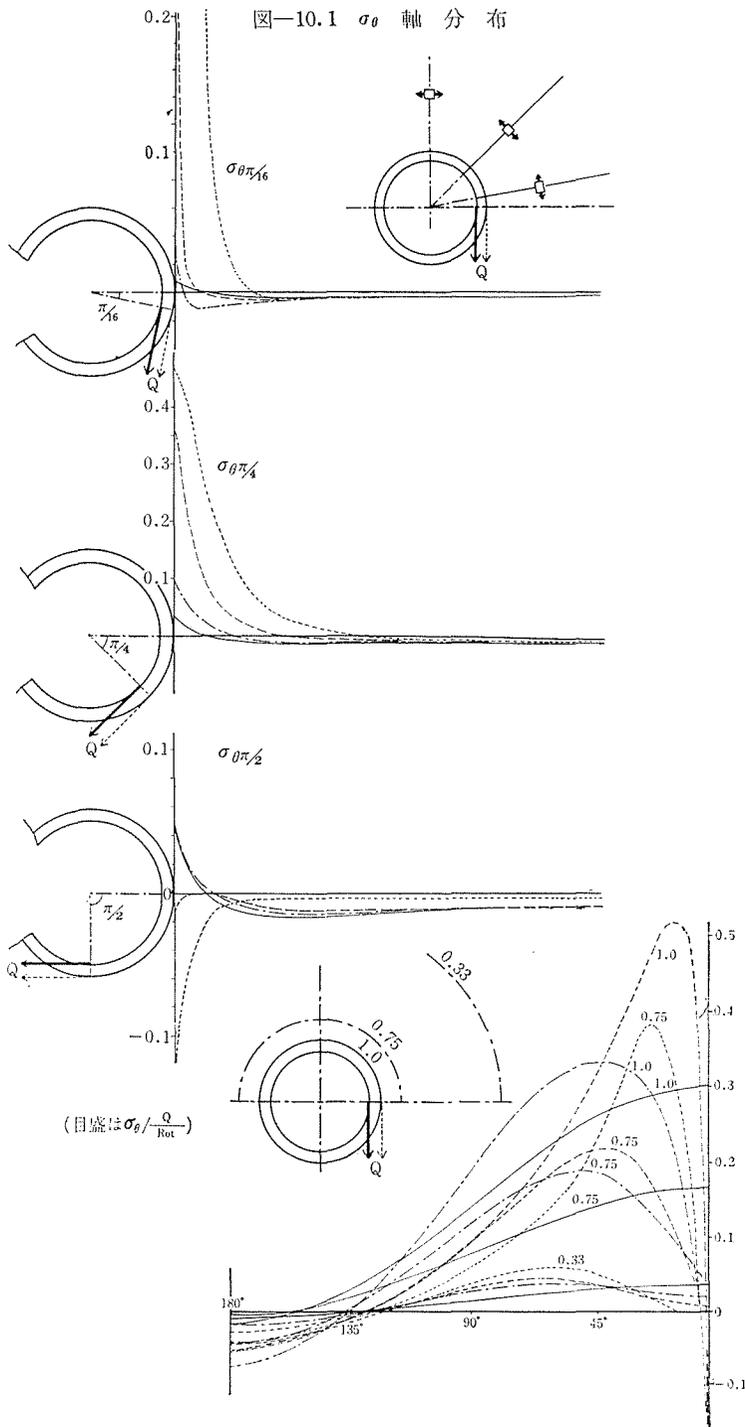
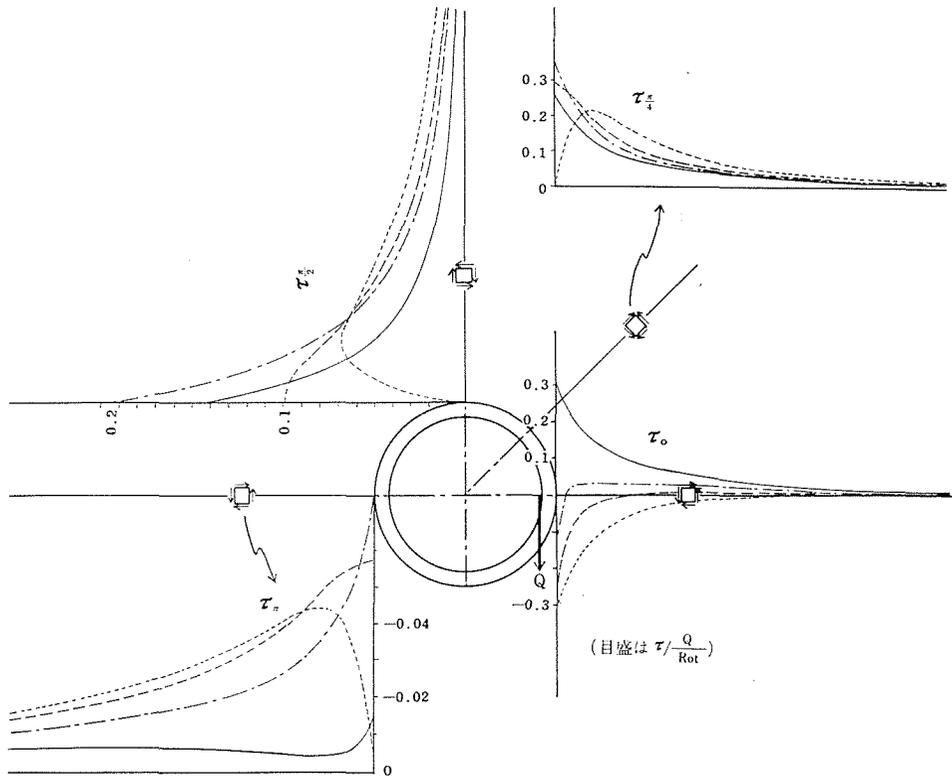


図-10.2 σ_θ 円周分布



图—11 $\tau_{r\theta}$ 軸 分 布

3. 孔縁を補強した円孔無限板の引張り

3.1 接合部の応力

二軸対称の場合であるから接合部の応力をつぎ
 のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p \left\{ a_0 + \sum' a_n \cos n\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= p \sum' b_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし \sum' は $n = 2, 4, 6, \dots$ の和

3.2 円孔無限板の応力函数・応力・変位

y 方向無限遠で引張応力 p 、接合部 $r = R_0$ で
 (18) 式を満足する複素応力函数は

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{a^2}{z^2} + \sum' (a_n - b_n) \frac{a^n}{z^n} \right\}, \\ \psi''(z) &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + (1 - 2a_0) \frac{a^2}{z^2} + \frac{3a^4}{z^4} + \sum' \left(na_n - \overline{n+2} b_n \right) \frac{a^{n+2}}{z^{n+2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(19) 式を (1) 式に代入して 応力、接合部の変位は ($D = R_0/r$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left\{ 1 - (1 - 2a_0)D^2 + (-1 + 4D^2 - 3D^4) \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum' D^n \left\{ (\overline{n+2} - nD^2) a_n - (n+2)(1 - D^2) b_n \right\} \cos n\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p}{2} \left\{ (1 + 2D^2 - 3D^4) \sin 2\theta + \sum' D^n \left\{ n(1 - D^2) a_n - (n - \overline{n+2} D^2) b_n \right\} \sin n\theta \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + (1 - 2a_0)D^2 + (1 + 3D^4) \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. - \sum' D^n \left\{ (\overline{n-2} - nD^2) a_n - (\overline{n+2} - (n+2)D^2) b_n \right\} \cos n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{rR_0} &= \frac{pR_0}{E} \left\{ \left[1 - (1 + \nu)a_0 \right] + \frac{1}{3} \left[-6 - (5 - \nu)a_2 + 2(2 - \nu)b_2 \right] \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum'_{4,6,\dots} \frac{1}{n^2 - 1} \left[-(2n + 1 - \nu)a_n + (n - n\nu + 2)b_n \right] \cos n\theta \right\}, \\ u_{\theta R_0} &= \frac{pR_0}{E} \left\{ \frac{1}{3} \left[6 + 2(2 - \nu)a_2 - (5 - \nu)b_2 \right] \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum'_{4,6,\dots} \frac{1}{n^2 - 1} \left[(n - n\nu + 2)a_n - (2n + 1 - \nu)b_n \right] \sin n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

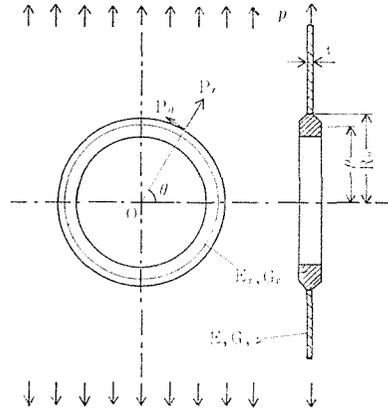


図-12 引張りをうける補強円孔板

3.3 補強環の断面力と変位—附録IIを準用

円環の外周(接合部)にそうて作用する単位角あたりの力を,

$$\left. \begin{aligned} P_r &= R_0 t p (a_0 + \sum' a_n \cos n\theta), \\ P_\theta &= R_0 t p \sum' b_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

断面力 と 外周の変位 (δ_r, δ_θ) は

$$\left. \begin{aligned} \text{軸力} : N &= R_0 t p \left\{ a_0 - \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (a_n - n b_n) \cos n\theta \right\}, \\ \text{せん断力} : V &= R_0 t p \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (n a_n - b_n) \sin n\theta, \\ \text{曲げモーメント} : M &= \rho R_0 t p \left\{ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} a_0 + \sum' \left[\frac{1}{n^2 - 1} a_n + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) b_n \right] \cos n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \frac{\rho}{AE_r} R_0 t p \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} a_0 + \sum' (K_1(n) a_n + K_{20}(n) b_n) \cos n\theta \right\}, \\ \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE_r} R_0 t p \sum' (K_{20}(n) a_n + K_{300}(n) b_n) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

3.4 補強環のある円孔無限板

接合部の連続条件は $u_{rR0} = \delta_r, \quad u_{\theta R0} = \delta_\theta.$ (25)

(21) (24) 式をそれぞれ等しくおき, すべての θ に対して成立つ条件を求めると, a_0, a_n, b_n に関する連立方程式となり, 結局接合部の応力を表わすフーリエ係数は

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{\xi(1 + \kappa)}{1 + \xi(1 + \nu)(1 + \kappa)}, \\ a_2 &= -\frac{6\xi(K_2 + K_3)}{K_1 K_3 - K_2^2}, & b_2 &= \frac{6\xi(K_1 + K_2)}{K_1 K_3 - K_2^2}, \\ a_n &= b_n = 0. \quad (n \geq 4) \end{aligned}} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad K_1 &= \xi(5 - \nu) + \frac{1}{3\kappa} + \frac{4}{3}\zeta, \\ K_2 &= \xi(2\nu - 4) + \frac{1}{3\kappa} \left(\frac{3}{2} e_0 - 2 \right) - \frac{2}{3}\zeta, \\ K_3 &= \xi(5 - \nu) + \frac{1}{3\kappa} \left(\frac{3}{2} e_0 - 2 \right)^2 + \frac{3}{4} e_0^2 + \frac{1}{3}\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(ξ, κ, ζ, e_0 は附録I参照)

円孔無限板の応力 は(26)式を(20)式に代入して

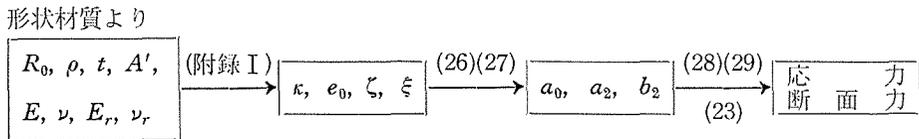
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left\{ 1 - A\Delta^2 + (-1 + 2B\Delta^2 - C\Delta^4)\cos 2\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p}{2} (1 + B\Delta^2 - C\Delta^4)\sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + A\Delta^2 + (1 - C\Delta^4)\cos 2\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ただし $A = 1 - 2a_0, B = 2(1 + a_2 - b_2), C = 3 + 2a_2 - 4b_2.$ (29)

$\Delta = R_0/r.$

補強環の断面力は(26)式を(23)式に代入して計算される。

計算の順序を図式的に示すと

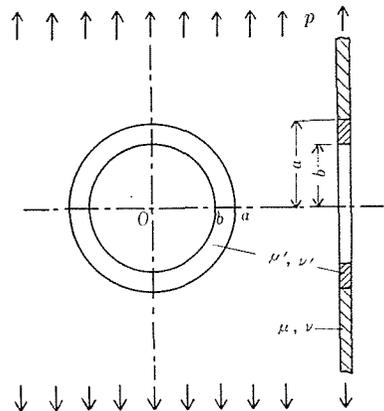


3.5 計算例

(1) 補強環が長方形断面の場合—厳密解との比較

本報告による近似計算の誤差を知るため初めに妹沢・久保氏の論文⁽¹⁾と比較してみる。同論文では計算を簡単にするため $\lambda = \mu, \lambda' = \mu'$ とおき (ポアソン比を0.25とおくことにあたる) $\mu'/\mu, m (=a/(a-b))$ の各々の値に対し(29)の A, B, Cを求め $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ 軸上の $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \sigma_\theta$ を図表にしている。

筆者も同じ $\mu'/\mu, m$ に対する A, B, Cを計算し比較したところ若干のくいちがいを発見したので, G. I. Savin⁽¹⁾の厳密解により計算したところ表一3のようにほとんど一致し, 本方法が実用上差支えないことが分つた。



図一13 補強環が長方形断面の場合

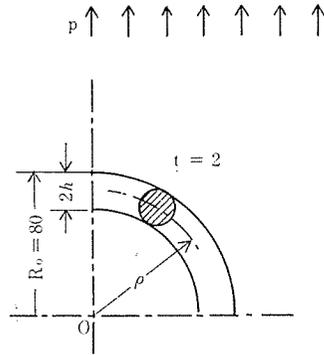
表-3

μ'/μ		m			5	10	15	20
		A	B	C				
8/5	妹沢・久保	A			0.50			
		B			1.11			
		C			0.74			
	(S.S)	A			0.506	0.722	0.806	0.851
		B			1.089	1.479	1.632	1.715
		C			0.760	1.586	1.968	2.187
Sawin	A			0.493	0.716	0.803	0.850	
	B			1.064	1.471	1.628	1.712	
	C			0.705	1.561	1.956	2.179	
5	妹沢・久保	A			0.09	0.37		0.61
		B			0.56	1.06		1.37
		C			-0.43	0.43		1.23
	(S.S)	A			0.068	0.363	0.518	0.612
		B			0.589	1.053	1.257	1.381
		C			-0.405	0.437	0.916	1.236
Sawin	A			0.053	0.356	0.513	0.608	
	B			0.567	1.044	1.251	1.377	
	C			-0.449	0.412	0.900	1.224	
10	妹沢・久保	A				0.11		0.39
		B				0.82		1.21
		C				-0.24		0.60
	(S.S)	A			-0.178	0.091	0.259	0.375
		B			0.354	0.822	1.020	1.146
		C			-0.876	-0.170	0.258	0.565
Sawin	A			-0.186	0.079	0.244	0.356	
	B			0.336	0.816	1.015	1.164	
	C			-0.908	-0.189	0.244	0.618	
15	妹沢・久保	A						
		B						
		C						
	(S.S)	A			-0.291	-0.062	0.098	0.215
		B			0.237	0.716	0.903	1.021
		C			-1.061	-0.442	-0.064	0.211
Sawin	A			-0.301	-0.070	0.091	0.211	
	B			0.221	0.711	0.899	1.016	
	C			-1.086	-0.458	-0.077	0.200	
20	妹沢・久保	A						0.13
		B				-0.12		0.97
		C				0.69		0.09
	(S.S)	A			-0.357	-0.160	-0.013	0.101
		B			0.159	0.652	0.833	0.943
		C			-1.157	-0.597	-0.256	-0.008
Sawin	A			-0.365	-0.167	-0.019	0.096	
	B			0.144	0.648	0.829	0.939	
	C			-1.179	-0.610	-0.267	-0.017	

(S.S) は筆者の近似計算による数値.

(2) 補強環が円形断面の場合

図一14のように $R_0 = 80\text{mm}$, $t = 2\text{mm}$ の円孔無限板の孔縁に直径 $2h = 5, 10, 15, 20\text{mm}$ の補強環 (同材質 $E_r = E$, $\nu_r = \nu = 0.3$) がある場合を計算した. κ , ξ , ζ , e_0 は次式より求め, (26) (28) 式よりの a_0, a_2, b_2, \dots A, B, C の数値を特別な場合 (剛体環, 円孔板) と共に表一4に示した.



図一14 補強環が円形断面の場合

$$\kappa = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{\rho} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{h}{\rho} \right)^6 + \dots,$$

$$\xi = \frac{A E_r}{\rho t E} = \frac{\pi h^2}{\rho t},$$

$$\zeta = k \frac{E_r}{G_r} = 2k(1 + \nu_r) = 0.666 \quad (k = 1.11), \quad e_0 = \frac{R_0}{\rho}.$$

表一4

2h	5	10	15	20	剛体環	円孔板
記号	(a)	(b)	(c)	(d)	-----
κ	0.0002603	0.0011136	0.0025320	0.0051548		
ξ	0.1266771	0.5235987	1.2187210	2.2439942		
e_0	1.0322591	1.0666667	1.1034483	1.1428571		
a_0	0.10879	0.31175	0.47204	0.57361	0.76923	0
a_2	0.16488	0.31514	0.32375	0.22475	-0.74074	0
b_2	0.36615	0.80522	1.02764	1.10518	0.74074	0
A	0.78242	0.37651	0.05592	-0.14722	-0.53846	1
B	1.59745	1.01985	0.59222	0.23913	-0.96296	2
C	1.86515	0.40941	-0.46307	-0.97123	-1.44444	3

図一15: 表一4の数値を(28)式に代入し, $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ 軸上の応力 $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \sigma_\theta$ を図表にしたもので, 特に σ_θ が補強環の剛性の増加と共に緩和される様子が知られる.

図一16: 孔縁(接合部)における σ_θ, σ_r の分布を示したもの.

図一17: 補強環の断面力 ((23)式) および外周(接合部)と内周の hoopstress $\sigma_{\theta 0}, \sigma_{\theta i}$ を近似的に直線則から計算し図表にしたもの.

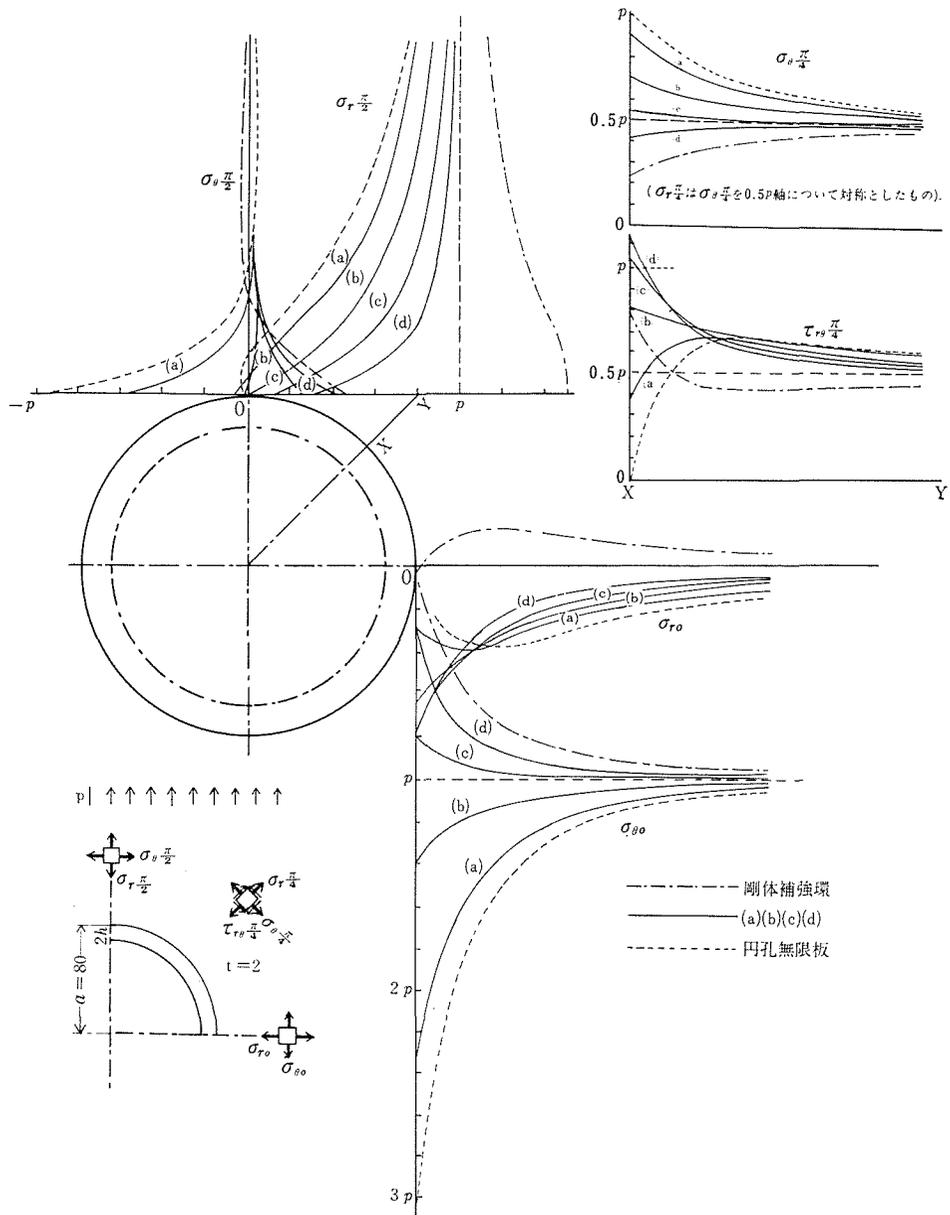


図-15 円孔板の応力分布

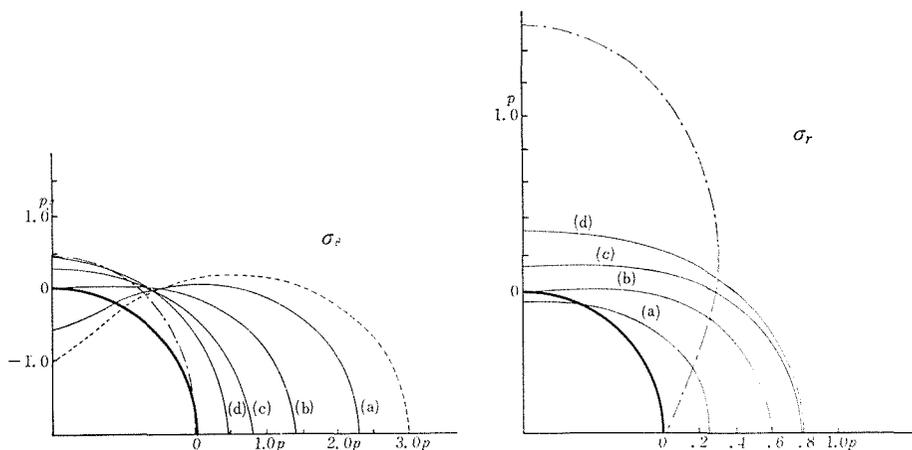


図-16 接合部の応力分布

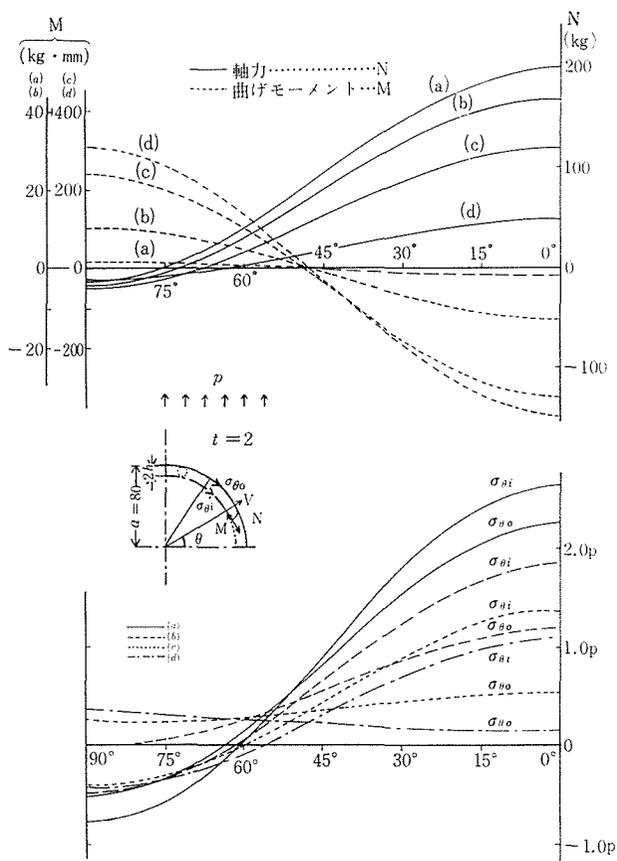


図-17 補強環の断面力 ($p = 1\text{kg}/\text{mm}^2$) と hoopstress

4. あとがき

(1) 孔縁を補強した円孔無限板の内周に任意の面内荷重が働くとき、接合部の応力を定めるフーリエ係数 a_0, a_n, \dots, c_n を(15)式により定めることができた。これを用いて円孔板の応力は(4)(8)式より、補強環の断面力は(附6)式より求めることができる。

(15)式から分るように外荷重が第 m 項で与えられれば接合部の応力係数も第 m 項でまわり、したがって外荷重が有限項で与えられれば円孔板の応力等も有限項で表される。

(2) 2種の断面形をもつ補強環に集中(法線, 接線)荷重が作用したときの円孔板の応力を計算し、特別な場合(剛体補強環つき円孔板と補強環のない円孔板)と比較して応力分布を図6～図11に表した。

応力分布に及ぼす補強環の効果は着力点付近で顕著であるが、はなれるにしたがつて応力は小さくなりその影響も複雑となる。

(3) 補強環つき円孔無限板を無限遠で引張つたとき、接合部の応力を定めるフーリエ係数 a_0, a_2, b_2 は(26)式により求められ、円孔板の応力は(28)(29)式より補強環の断面力は(23)式より計算される。この方法は2次元弾性論による厳密解と比較して誤差が極めて少ないことが分つた。

(4) 数種の円形断面をもつ補強環のある円孔無限板に適用し、その大きさが円孔板および補強環の応力等に及ぼす影響を知ることができた(図15～図17)。

任意の断面形(中央面に対称な)をもつ補強環にたいし曲り梁理論を適用して補強円孔板応力の解析を行うことは、いささか木に竹をつく感なきにしもあらずであるが3次元的に厳密に解くことの困難さを思えば、本論文の方法は少々近似的であつても比較的計算が容易であるという点で種々の場合に利用しうるものと信ずる。

終りに、常に好意ある御意見を寄せられる本学工学部宮入武夫教授に、また電子計算機の使用について協力された大学院学生小林修君に謝意を表す。

附録 I 記号の説明

R_0, R_i, ρ 補強円環の外周, 内周, 重心をとる中心線の半径 (mm)

A, t 円環の断面積 (mm^2), 円孔板の厚さ (mm)

E_r, ν_r, E, ν 円環, 円孔板の縦弾性係数 (kg/mm^2) およびポアソン比

$e_0 = R_0/\rho, e_i = R_i/\rho,$

$\kappa = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\rho + \eta} dA$: 補強円環を曲り梁としたときの断面係数

$\zeta = k \frac{E_r}{G_r} = 2k(1 + \nu_r)$: // せん断係数 $\begin{cases} k = 1.20 \dots \dots \text{長方形, } \triangle \text{断面} \\ = 1.11 \dots \dots \text{円形断面} \end{cases}$

$\hat{\zeta} = \frac{A}{\rho t} \frac{E_r}{E}$: 補強円環と円孔板の相当剛性比

(4) (8) 式の記号

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{R_0}{r}, & \Psi_1 &= \frac{1}{4} \{ (3 + \nu) \Delta + (1 - \nu) \Delta^3 \}, & \Psi_2 &= \frac{1}{4} (3 + \nu) (\Delta - \Delta^3), \\
 & & \Psi_3 &= -\frac{1}{4} (1 - \nu) (\Delta - \Delta^3), & \Psi_4 &= -\frac{1}{4} \{ (1 - \nu) \Delta + (3 + \nu) \Delta^3 \}, \\
 & & \Psi_5 &= \frac{1}{4} (1 - \nu) (\Delta + \Delta^3), & \Psi_6 &= \frac{1}{4} \{ (1 - \nu) \Delta - (3 + \nu) \Delta^3 \}, \\
 & & \Psi_j^i &= \frac{1}{2} (i \Delta^n - j \Delta^{n+2}).
 \end{aligned}
 \tag{附 1}$$

(16) 式の記号 (e_s は e_o , e_i のいずれかを表はす)

$$\begin{aligned}
 K_{s0} &= \frac{\zeta(1 - e_s)(1 - e_0)}{1 + \kappa\zeta} + e_s e_0, & K_0 &= \frac{\zeta(1 - e_0)}{1 + \kappa\zeta} - e_0, \\
 K_1(n) &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ \left(\frac{1}{\kappa} + \zeta \right) \frac{1}{n^2 - 1} + \zeta \right\}, & & \text{(以下 } n \geq 2 \text{ に対して)} \\
 K_{2s}(n) &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ \frac{e_s}{\kappa} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{\kappa} + \zeta \right) \frac{n}{n^2 - 1} \right\}, \\
 K_{3s0}(n) &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ \left(\frac{1}{\kappa} + \zeta \right) \frac{1}{n^2 - 1} - \left(\frac{1}{\kappa} + 1 \right) e_s e_0 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\kappa} (1 - e_s)(1 - e_0) + e_s e_0 \right\}, \\
 K_4(n) &= -\frac{1}{n(n^2 - 1)} \frac{1}{\kappa}, \\
 K_5(n) &= \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ \left(\frac{1}{\kappa} + 1 \right) e_0 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\kappa} (1 - e_0) - e_0 \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{附 2}$$

附録Ⅱ. 補強環の断面力・変位⁽³⁾—図—3

円環の内・外周に作用する荷重を

$$\begin{aligned}
 p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \delta_n \sin n\theta), \\
 p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \\
 m &= \rho \left\{ \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \cos n\theta + \nu_n \sin n\theta) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{附 3}$$

$$\begin{aligned}
 p'_r &= \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha'_n \cos n\theta + \delta'_n \sin n\theta), \\
 p'_\theta &= \gamma'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta).
 \end{aligned}
 \tag{附 4}$$

つりあいの条件

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha'_1 - \beta'_1, \quad \delta_1 + \gamma_1 = \delta'_1 + \gamma'_1, \quad e_i \gamma_0 - \mu_0 = e_o \gamma'^0.
 \tag{附 5}$$

(1) 断面力

$$\begin{aligned}
 \text{軸力: } N &= \left[\alpha_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \overline{e_s + \kappa \zeta} \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \theta - \overline{e_s + \kappa \zeta} \gamma_1 - \mu_1 \right] \sin \theta \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (\alpha_n - n \beta_n) \cos n\theta + (\delta_n + n \gamma_n) \sin n\theta \right\}_i^0, \\
 \text{せん断力: } V &= \left[\gamma_0 - \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \overline{e_s - 1} \beta_1 - \nu_1 \right\} \sin \theta + \overline{e_s - 1} \gamma_1 - \mu_1 \right] \cos \theta \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (n \alpha_n - \beta_n) \sin n\theta - (n \delta_n + \gamma_n) \cos n\theta \right\}_i^0, \\
 \text{曲げモーメント: } M &= \rho \left[-\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \overline{e_s - 1} \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \theta - \overline{e_s - 1} \gamma_1 - \mu_1 \right] \sin \theta \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \beta_n - \frac{1}{n} \nu_n \right) \cos n\theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n^2 - 1} \delta_n - \frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \gamma_n + \frac{1}{n} \mu_n \right) \sin n\theta \right]_i^0.
 \end{aligned} \tag{附6}$$

(2) 変位

(2.1) 軸対称荷重の場合——(附3)(附4)式実線アンダーラインの項

 B 断面を固定したときの外周の変位 (δ_r, δ_θ) は

$$\begin{aligned}
 \delta_r &= \frac{\rho}{AE_r} \left[\frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_{ns}(n) \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} X_{ns}(n) \cos n\theta \right]_i^0, \\
 \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-\left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 - K_{s0} \beta_1 - K_0 \nu_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_{ns}(n) \right\} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Y_{ns}(n) \sin n\theta \right]_i^0, \tag{附7}
 \end{aligned}$$

ただし $X_{ns}(n) = K_1(n) \alpha_n + K_2(n) \beta_n + K_4(n) \nu_n$, $Y_{ns}(n) = K_{20}(n) \alpha_n + K_{3s0}(n) \beta_n + K_5(n) \nu_n$.

(2.2) 逆対称荷重の場合——(附3)(附4)式点線アンダーラインの項

 A, B 断面を固定したときの外周の変位

$$\begin{aligned}
 \delta_r &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-\left\{ K_{s0} \gamma_1 + K_0 \mu_1 + \sum_{od}'' Z_{ns}(n) \right\} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} W_{ns}(n) \sin n\theta \right]_i^0, \\
 \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-\sum_{ev}' Z_{ns}(n) - \sum_{od}'' Z_{ns}(n) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Z_{ns}(n) \cos n\theta \right]_i^0, \tag{附8}
 \end{aligned}$$

ただし $Z_{ns}(n) = -K_{20}(n) \delta_n + K_{3s0}(n) \gamma_n + K_5(n) \mu_n$, $W_{ns}(n) = K_1(n) \delta_n - K_2(n) \gamma_n - K_4(n) \mu_n$. \sum_{ev}' は $n = 2, 4, 6, \dots$ \sum_{od}'' は $n = 3, 5, 7, \dots$ についての和を表わす

(註) (附6)(附7)(附8)式の $\left[\right]_i^0$ は $\left[\right]$ 内の $[\alpha_n, \beta_n, \dots, \mu_n, e_s, K_{s0}, \dots, K_{2s}(n), \dots]$ の項に外周の値 $[\alpha'_n, \beta'_n, \dots, 0, e_0, K_{00}, \dots, K_{20}(n), \dots]$ とおいた式から内周の値 $[\alpha_n, \beta_n, \dots, \mu_n, e_i, K_{i0}, \dots, K_{2i}(n), \dots]$ とおいた式を減ずることを意味する。

