

回転系における乱流の特性 (I)

土屋 良明*

(昭和43年6月29日受理)

1. 緒 言

回転系における乱流の研究は、回転流体機械に伴う種々の乱流現象を解明する基礎となるものであり、同時に天体物理学または地球物理学の立場からも興味深い重要な問題である。しかし、乱流そのものが極めて複雑な現象であるために、従来の乱流理論^{1)~4)}をこのような場合に拡張する組織的な試みはまだ十分に発展していないように思われる。

例えば、さきに Lehnert⁵⁾ は電磁乱流に対し外部磁場とコリオリ力の組合せによる効果を取扱ったが、物理的に興味の有るエネルギー・スペクトル・テンソルへの影響にはふれていない。そこで、ここでは、事柄を通常流体に限り、コリオリ力の下で異なる方向成分間に起るエネルギーの伝達を考察することとしたい。

ただし、簡単のため乱れは十分弱くて非線形減衰機構は作用しないものと仮定し、かつコリオリ力に比べて遠心力の影響は無視する。すなわち、乱れの尺度は遠心力によって生ずる非一様性が問題となる程大きくないとみなすのである。これらの仮定は Lehnert⁵⁾ の場合と同一であって、現実には必ずしも両立しないけれども、線形理論の範囲内で、定性的な傾向の一面をうかがうことは出来るであろう。

以下、第2節ではコリオリ力項のある Navier-Stokes 方程式を Fourier 変換して波数空間での基礎方程式をみちびき、第3節では角速度を $\Omega = (0, 0, \Omega)$ として Fourier 係数に対する具体的な解を与える。第4節では、Fourier 係数の共分散からエネルギー・スペクトル・テンソルとその積分を評価し、第5節ではいくつかの簡単な初期条件に対して数値計算例を示す。

2. 基礎方程式

速度の空間分布の、時間についての変化を支配する、Navier-Stokes 方程式は、一定角速度 Ω がある非圧縮性流体においては、次式で表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1)$$

ここに \mathbf{u} は速度ベクトル、 p は圧力、 ν は流体の動粘性係数、 ρ は流体の密度および \mathbf{x} は位置ベクトルであり、座標系は回転座標系をとる。 ∇ はナブラ演算子である。

(1)式の左辺は第一項から順に加速度項、慣性力項、コリオリ力項、遠心力項であり、右

* 機械工学科、助手

辺は第一項が圧力項，第二項が粘性力項であって，ここでは他の外力は無いものとする。

ここで次の三つの仮定をする。

- i) 乱れが弱く，いわゆる減衰の終期と呼ばれる状態に相当して，慣性力が無視できる。
- ii) 回転が関係する項において，遠心力の影響は，コリオリ力の影響に比べて小さく，無視できる。
- iii) 乱れは一様であり，また(1)式ですでに用いたように，流体は非圧縮性である。

仮定i)およびii)によって(1)式は，慣性力項および遠心力項が省略できて単純化され，各方向成分に添字を付けて表わせれば，次式のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + 2\varepsilon_{ikl}\Omega_k u_l = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 u_i. \quad (2)$$

ここに ε_{ikl} は数列 (ikl) が順列(123)の偶置換のとき+1，奇置換のとき-1，他の場合には0をとる単位テンソルである。また繰り返された添字は1，2，3と和をとるものとする。

明らかに示されていないが， u_i および p は時間 t と座標 x_i の関数である。

非圧縮性流体の連続方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

ここで，解析の容易のために，速度場に Fourier 変換を行ない波数空間 (κ -空間) に移す。

Fourier 変換が存在するためには，一般に，

$$\int |\mathbf{u}| d\mathbf{x} < \infty$$

が存在しなければならないが，仮定iii)によって乱れが一様であるから $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で $|\mathbf{u}|$ は0にならず，積分は発散する。しかし， \mathbf{u} が位置の定常偶然関数でその平均値が0である場合には，次の様にすればよいことが知られている²⁾。

いま， $\mathbf{u}(\mathbf{x}, X)$ なる関数が

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, X) &= \mathbf{u} & -X \leq |\mathbf{x}| \leq X, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, X) &= 0 & X < |\mathbf{x}| \end{aligned}$$

であるとき，対応する波数 κ のベクトル Fourier 係数 $\mathbf{A}(\kappa, X)$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{A}(\kappa, X) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-X}^X \mathbf{u} e^{-i\kappa \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

$X \rightarrow \infty$ とするとき， $\mathbf{A}(\kappa, X)$ は，仮定iii)の一様性のために，発散するけれども， κ におけるものではなく $d\kappa$ なる巾の波数を考えて，

$$\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, X) = \int_{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{\kappa} + d\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, X) d\boldsymbol{\kappa}$$

と置くと, $X \rightarrow \infty$ において $\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, X)$ の極限が存在する。これを $d\mathbf{Z}$ とすれば,

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z} &= \lim_{X \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}, X) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{u} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} \frac{e^{-i d\kappa_1 x_1} - 1}{-i x_1} \cdot \frac{e^{-i d\kappa_2 x_2} - 1}{-i x_2} \cdot \frac{e^{-i d\kappa_3 x_3} - 1}{-i x_3} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4)$$

であり, その逆の関係は Fourier-Stieltjes 積分によって次式のように表わされる。

$$\mathbf{u} = \int e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{Z}. \quad (5)$$

(5)式を(4)式の形式的な結果とみなして, $d\mathbf{Z}$ は一般化された Fourier 係数と解釈することが出来る。したがって, (5)式を用いて Fourier 変換を行なう。

(5)式を成分別に添字をつけて表わせば次式となる。

$$u_i = \int e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} dZ_i. \quad (6)$$

圧力 p も同様に Fourier 変換する。 $d\mathbf{Z}$ に対応して dW とすれば, 次式となる。

$$\frac{p}{\rho} = \int e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} dW. \quad (7)$$

(6)式および(7)式を(2)式および(3)式に代入すれば, Fourier 係数 $d\mathbf{Z}$ および dW の満足すべき運動方程式および連続方程式は各々次式で表わせる。

$$\frac{\partial}{\partial t} dZ_i + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k dZ_l = -\alpha_i dW - \nu \kappa^2 dZ_i, \quad (8)$$

$$\kappa_i dZ_i = 0. \quad (9)$$

明らかには示されていないが, u_i および p と同様に, dZ_i および dW は時間 t と波数 $\boldsymbol{\kappa}$ の函数である。

(8)式に κ_i をかければ, 物理空間 (\mathbf{x} -空間) では(2)式の発散をとることに相当して, 連続の条件(9)式とにより, 圧力 Fourier 係数 dW は,

$$dW = -2\varepsilon_{mkl} \Omega_k \frac{\kappa_l}{\kappa^2} dZ_m \quad (10)$$

のように, $d\mathbf{Z}$ で表わされる。

(8)式へ(10)式を代入して dW を消去し, 少し変形すれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) dZ_i = -2\varepsilon_{ikl} \Omega_k dZ_l - 2\varepsilon_{mkl} \Omega_k \frac{\kappa_l \kappa_i}{\kappa^2} dZ_m$$

となり, さらに, 恒等的に成り立つ関係, $\varepsilon_{mkl}\kappa_l dZ_m \equiv -\varepsilon_{mkl}\kappa_m dZ_l$, を考慮すれば, 結局 Fourier 係数 dZ_i の満足すべき次式を得る.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)dZ_i = -2\varepsilon_{mkl}\Omega_k A_{im} dZ_l. \quad (11)$$

ただし,

$$A_{im} = \delta_{im} - \frac{\kappa_i\kappa_m}{\kappa^2} \quad (12)$$

であり, δ_{im} はクロネッカーのデルタで, $i = m$ で 1, その他のときは 0 をとる.

結局, Fourier 変換の結果, \mathbf{x} -空間における連続方程式(3)式は(9)式, 運動方程式(2)式は(11)式の形でそれぞれ表わされる.

3. Fourier 係数の一般解

前節において, Fourier 係数 dZ_i の満足すべき連続方程式および運動方程式を(9)式および(11)式として求めたが, 次に, 回転軸を \mathbf{x}_3 軸にえらんで, Fourier 係数 dZ_i の具体的な形を求める.

角速度 Ω を, 添字 3 を省略して,

$$\Omega = (0, 0, \Omega) \quad (13)$$

で表わせば, (11)式は, dZ_i の各成分について, 次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2 - 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa^2}\right)dZ_1 - 2\Omega\left(1 - \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2}\right)dZ_2 &= 0, \\ 2\Omega\left(1 - \frac{\kappa_2^2}{\kappa^2}\right)dZ_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2 + 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa^2}\right)dZ_2 &= 0, \\ -2\Omega\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa^2}dZ_1 + 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa^2}dZ_2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)dZ_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

時間 t を独立変数とする三元の線形連立方程式とみなして, 時間 t に関して e^{mt} なる項をもつ解があるとすれば, m は

$$\begin{vmatrix} m + \nu\kappa^2 - 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa^2} & -2\Omega & 0 \\ 2\Omega\left(1 - \frac{\kappa_2^2}{\kappa^2}\right) & m + \nu\kappa^2 + 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa^2} & 0 \\ -2\Omega\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa^2} & 2\Omega\frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa^2} & m + \nu\kappa^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

を満足しなければならない.

すなわち, m は三次方程式,

$$(m + \nu\kappa^2)(m^2 + 2\nu\kappa^2 m + \nu^2\kappa^4 + 4\Omega^2 \frac{\kappa_3^2}{\kappa^2}) = 0 \quad (16)$$

の根であり、三つの根に添字 1, 2, 3 を付けて表わせば、

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -\nu\kappa^2 \\ m_2 &= -\nu\kappa^2 \pm i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} \text{ (複号同順)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。

したがって、(13)式の解は次式のようなになる。

以下において、表現の便利のために、 $e^{mt} = \exp(mt)$ と置く。

$$\left. \begin{aligned} dZ_1 &= \alpha_1 da \exp(m_1 t) + \beta_1 d\beta \exp(m_2 t) + \gamma_1 d\gamma \exp(m_3 t), \\ dZ_2 &= \alpha_2 da \exp(m_1 t) + \beta_2 d\beta \exp(m_2 t) + \gamma_2 d\gamma \exp(m_3 t), \\ dZ_3 &= \alpha_3 da \exp(m_1 t) + \beta_3 d\beta \exp(m_2 t) + \gamma_3 d\gamma \exp(m_3 t). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 $\alpha_1 da$, $\beta_1 d\beta$, $\gamma_1 d\gamma$ 等は、 t には関係しない、 κ の関数である係数を表わす。これらの係数間の比を求めるために、(13)式に m_1 , m_2 および m_3 に対応する解を代入し、さらに、連続方程式、(9)式を考慮して、結局、係数間に次のような関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 &= \kappa^2 - \kappa_1^2 : -\kappa_1 \kappa_2 + i \kappa \kappa_3 : \kappa_1 \kappa_3 - i \kappa \kappa_2, \\ \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 &= \kappa^2 - \kappa_1^2 : -\kappa_1 \kappa_2 - i \kappa \kappa_3 : \kappa_1 \kappa_3 + i \kappa \kappa_2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この係数間の関係と、(17)式で与えられる m_1 , m_2 および m_3 を(18)式に代入すれば、Fourier 係数 dZ の各成分は次の形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} dZ_1 &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) d\beta + \exp(-i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) d\gamma \right\}, \\ dZ_2 &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1 \kappa_2 + i \kappa \kappa_3) d\beta \right. \\ &\quad \left. + \exp(-i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1 \kappa_3 - i \kappa \kappa_2) d\gamma \right\}, \\ dZ_3 &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1 \kappa_3 - i \kappa \kappa_2) d\beta \right. \\ &\quad \left. + \exp(-i 2 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1 \kappa_3 + i \kappa \kappa_2) d\gamma \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(20)式で κ の代りに $-\kappa$ としたものに “*” を付けて示せば、速度が実数であることを考慮して、 dZ_i^* は dZ_i の複素共役数になり、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 dZ_1^* &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) d\gamma^* + \exp(2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) d\beta^* \right\}, \\
 dZ_2^* &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1\kappa_3 + i\kappa\kappa_1) d\gamma^* \right. \\
 &\quad \left. + \exp(-i2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1\kappa_2 - i\kappa\kappa_3) d\beta^* \right\}, \\
 dZ_3^* &= \exp(-\nu\kappa^2 t) \left\{ \exp(i2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1\kappa_3 - i\kappa\kappa_2) d\gamma^* \right. \\
 &\quad \left. + \exp(-i2\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) (-\kappa_1\kappa_3 + i\kappa\kappa_2) d\beta^* \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、定角速度 $\Omega = (0, 0, \Omega)$ がある場合における Fourier 係数 $d\mathbf{Z}$ とその複素共役数 $d\mathbf{Z}^*$ を(20)式および(21)式のように得た。

4. スペクトル・テンソル $\overline{\Phi_{ij}}$ およびエネルギー・テンソル $\overline{u_i u_j}$

前節において Fourier 係数とその複素共役数を求めたが、ここでは、乱れのエネルギーの各成分 $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ および $\overline{u_3^2}$ を求めるために、Fourier 係数 $d\mathbf{Z}$ の共分散とスペクトル・テンソル $\overline{\Phi_{ij}}$ およびエネルギー・テンソル $\overline{u_i u_j}$ の間のよく知られた関係を用いる²⁾。以下において時間平均値に「—」を付けて示す。

ここで、簡単にこれらの間の関係を述べておく。

空間ベクトル \mathbf{r} だけ離れた二点における相度相関 $R_{ij}(\mathbf{r})$ は

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad (22)$$

で実義されるが、いま、 $R_{ij}(\mathbf{r})$ で一様な乱れを記述するテンソルを表わすものとすれば、次の形で表わすことが出来る。

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int \overline{\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})} \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (23)$$

ただし、 $\overline{\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})}$ は次の二つの条件を満たす複素テンソルである。

- i) $\int |\overline{\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})}| d\boldsymbol{\kappa} < \infty$
- ii) $\overline{\Phi_{ij}} = X_i X_j^* \overline{\Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa})}$ が負でない二次形式である。

一方、(20)式および(21)式で与えられる Fourier 係数 $d\mathbf{Z}$ の成分の共分散 $\overline{dZ_i^* dZ_j}$ をとり、 $d\boldsymbol{\kappa}$ で除して $d\boldsymbol{\kappa} \rightarrow 0$ の極限をとれば、(4)式および(23)式を考慮して、結局、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \lim_{d\boldsymbol{\kappa} \rightarrow 0} \frac{\overline{dZ_i^* dZ_j}}{d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})} \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
 &= \overline{\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})}
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{r} = 0$ と置けば、(22)式および $d\mathbf{Z}$ が $\boldsymbol{\kappa}$ に関して統計的に独立であることを考慮して、(24)式は、エネルギー・ランソル $\overline{u_i u_j}$ に寄与する波数空間における密度を表わして

いる。この意味で、スペクトル・テンソル Φ_{ij} はエネルギー・スペクトル・テンソルとも呼ばれる。

(24)式と逆の関係において、 $\mathbf{r} = 0$ とすれば、エネルギー・テンソル $\overline{u_i u_j}$ とスペクトル・テンソル $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ の間に、

$$\overline{u_i u_j} = \int \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \quad (25)$$

という関係が得られる。すなわち、スペクトル・テンソルの積分がエネルギー・テンソルを表わしている。

以下において簡単のために、 $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \Phi_{ij}$ と表わす。また、明らかに示さないが、 $\overline{u_i u_j}$ は \mathbf{r} と t の函数、 Φ_{ij} は $\boldsymbol{\kappa}$ と t の函数である。

結局、(24)式より Fourier 係数 $d\mathbf{Z}$ の共分散とスペクトル・テンソル Φ_{ij} の関係が得られ、(25)式に示すように、 Φ_{ij} を $\boldsymbol{\kappa}$ —空間で積分してエネルギー・テンソル $\overline{u_i u_j}$ を求めることが出来る。

したがって、エネルギーの各成分は、添字 $i = j$ を 1, 2, 3 として求め得る。

まず、(20)式と(21)式より共分散 $\overline{dZ_1^* dZ_1}$, $\overline{dZ_2^* dZ_2}$ および $\overline{dZ_3^* dZ_3}$ は、次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{dZ_1^* dZ_1} &= \exp(-2\nu\kappa^2 t) \\ &\times \left\{ 2\cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \overline{Red\beta d\gamma^*} - 2\sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \overline{Imd\beta d\gamma^*} + \overline{d\beta d\beta^*} + \overline{d\gamma d\gamma^*} \right\}, \\ \overline{dZ_2^* dZ_2} &= \exp(-2\nu\kappa^2 t) \\ &\times \left\{ \left[\kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa^2 \kappa_3^2 \right] 2\cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) + 4\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \right\} \overline{Red\beta d\gamma^*} \\ &+ \left\{ -(\kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa\kappa_3^2) 2\sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) + 4\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \right\} \overline{Imd\beta d\gamma^*} \\ &+ (\kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa^2 \kappa_3^2) (\overline{d\beta d\beta^*} + \overline{d\gamma d\gamma^*}), \\ \overline{dZ_3^* dZ_3} &= \exp(-2\nu\kappa^2 t) \\ &\times \left\{ \left[(\kappa_1^2 \kappa_3^2 - \kappa^2 \kappa_2^2) 2\cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) - 4\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \right] \overline{Red\beta d\gamma^*} \right. \\ &+ \left. \left\{ -(\kappa_1^2 \kappa_3^2 - \kappa^2 \kappa_2^2) 2\sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) - 4\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) \right\} \overline{Imd\beta d\gamma^*} \right. \\ &+ \left. (\kappa_1^2 \kappa_3^2 + \kappa^2 \kappa_2^2) (\overline{d\beta d\beta^*} + \overline{d\gamma d\gamma^*}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここに、 $\overline{Red\beta d\gamma^*}$ および $\overline{Imd\beta d\gamma^*}$ は、各々、 $\overline{d\beta d\gamma^*}$ の実数部および虚数部を表わす。(24)式を用いて、スペクトル・テンソル Φ_{11} , Φ_{22} , および Φ_{33} を求めれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11} &= \exp(-2\nu\kappa^2 t) (\kappa^2 - \kappa_1^2)^2 \left\{ 2\cos\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) X - 2\sin\left(4\Omega\frac{\kappa_3}{\kappa}t\right) Y + Z \right\}, \\ \Phi_{22} &= \exp(-2\nu\kappa^2 t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left\{ (\kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa^2 \kappa_3^2) 2 \cos \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) + 4 \kappa \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \sin \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) \right\} X \right. \\
& + \left. \left\{ -(\kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa^2 \kappa_3^2) 2 \sin \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) + 4 \kappa \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \cos \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) \right\} Y \right. \\
& + \left. (\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa^2 - \kappa_2^2) Z \right], \\
\Phi_{33} &= \exp(-2\nu \kappa^2 t) \\
& \times \left[\left\{ (\kappa_1^2 \kappa_3^2 - \kappa^2 \kappa_2^2) 2 \cos \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) - 4 \kappa \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \sin \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) \right\} X \right. \\
& + \left. \left\{ -(\kappa_1^2 \kappa_3^2 - \kappa^2 \kappa_2^2) 2 \sin \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) - 4 \kappa \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \cos \left(4 \Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t \right) \right\} Y \right. \\
& + \left. (\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa^2 - \kappa_3^2) Z \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

ここに X , Y および Z は,

$$\begin{aligned}
X &= \lim_{d\kappa \rightarrow 0} \frac{\text{Re} \overline{d\beta d\gamma}^*}{d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3}, \\
Y &= \lim_{d\kappa \rightarrow 0} \frac{\text{Im} \overline{d\beta d\gamma}^*}{d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3}, \\
Z &= \lim_{d\kappa \rightarrow 0} \frac{d\beta d\beta^* + d\gamma d\gamma^*}{d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3}
\end{aligned} \tag{28}$$

であり, 初期条件, すなわち, 系に弱い乱れが加えられる瞬間 $t = 0$ の初期スペクトル・テンソルより定まる.

初期スペクトル・テンソルを I_{ij} で表わし, (27)式で $t = 0$ と置けば, X , Y および Z は次式になる.

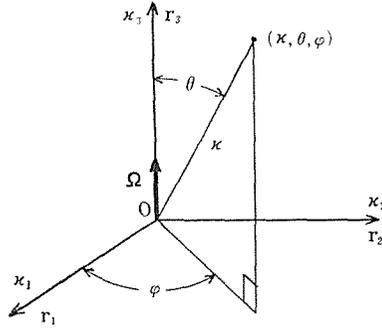
$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4\kappa^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)^2} \left\{ (\kappa_1^2 + \kappa^2) I_{11} - (\kappa^2 - \kappa_1^2)(I_{22} + I_{33}) \right\} \\
Y &= \frac{-1}{4\kappa \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 (\kappa^2 - \kappa_1^2)^2} \left\{ \kappa_1^2 (\kappa_2^2 - \kappa_3^2) I_{11} - \kappa_2^2 (\kappa - \kappa_1^2) I_{22} + \kappa_3^2 (\kappa^2 - \kappa_1^2) I_{33} \right\} \\
Z &= \frac{1}{2\kappa^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)} (I_{11} + I_{22} + I_{33}).
\end{aligned} \tag{29}$$

(27)式のスペクトル・テンソルを(29)式に代入して, κ 一空間で積分すれば, エネルギーの各成分を求めることが出来る.

積分は, 極座標 $(\kappa, \theta, \varphi)$ を第1図に示すように定めて行なう.

座標の各成分は,

$$\left. \begin{aligned}
\kappa_1 &= \kappa \sin \theta \cos \varphi, \\
\kappa_2 &= \kappa \sin \theta \sin \varphi, \\
\kappa_3 &= \kappa \cos \theta
\end{aligned} \right\} \tag{30}$$



第 1 図

であり、また、(25)式の積分は、極座標で表わせば、次式となる。

$$\overline{u_i u_j} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi_{ij} \kappa^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\kappa. \quad (31)$$

ここで、(27)式で与えられるスペクトル・テンソル Φ_{11} 、 Φ_{22} および Φ_{33} の時間依存性を考察する。例えば、 Φ_{11} について、 X 項、 Y 項および Z 項を項別に積分する。

まず、 X 項については、(29)式および(30)式より、次式となる。

$$\begin{aligned} \int \exp(-2\nu\kappa^2 t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) 2\cos(4\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) X d\kappa &= \pi \int \exp(-2\nu\kappa^2 t) \\ &\times \left\{ (\bar{I}_{11} - \bar{I}_{22} - \bar{I}_{33}) \frac{\sin(4\Omega t)}{4\Omega t} + (\bar{I}_{11} + \bar{I}_{22} + \bar{I}_{33}) \left(-2 \frac{\cos(4\Omega t)}{(4\Omega t)^2} + 8 \frac{\sin(4\Omega t)}{(4\Omega t)^3} \right) \right\} d\kappa. \end{aligned} \quad (32)$$

同様に、 Y 項については次式となる。

$$-\int \exp(-2\nu\kappa^2 t) (\kappa^2 - \kappa_1^2) 2\sin(4\Omega \frac{\kappa_3}{\kappa} t) Y d\kappa = 0. \quad (33)$$

Z 項については、次式となる。

$$\int \exp(-2\nu\kappa^2 t) (\kappa^2 - \kappa_1^2)^2 Z d\kappa = \int \exp(-2\nu\kappa^2 t) \frac{4}{3} \pi (\bar{I}_{11} + \bar{I}_{22} + \bar{I}_{33}) d\kappa. \quad (34)$$

ここに、初期スペクトル・テンソル \bar{I}_{ij} は、 I_{ij} の φ および θ に関する適当な平均値を表わす。

したがって、コリオリ力が関係する項は、 t^{-p} ($p \geq 1$) を含むか、または、0 になるから、 t が大きくなると共にコリオリ力の影響は消えて、エネルギーの方向成分比に関係する項は、コリオリ力には関係しない Z 項のみとなる。

Φ_{22} および Φ_{33} の場合も同様にして、 t が大きくなると共に、 Z 項のみがエネルギー成分比に関係する。

結局, t が大きいときエネルギー成分に寄与するスペクトル・テンソルは, 各々, 次式に漸近する.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11} &\longrightarrow \exp(-2\nu\kappa^2 t)(\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa^2 - \kappa_1^2)Z, \\ \Phi_{22} &\longrightarrow \exp(-2\nu\kappa^2 t)(\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa^2 - \kappa_2^2)Z, \\ \Phi_{33} &\longrightarrow \exp(-2\nu\kappa^2 t)(\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa^2 - \kappa_3^2)Z. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

一方, (29)式に示すように, Z は初期スペクトル・テンソル I_{ii} と波数 κ に依存するが, I_{ii} が κ のみの関数ならば,

$$\int \kappa_1^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)Z d\kappa = \int \kappa_1^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)Z d\kappa = \int \kappa_1^2(\kappa^2 - \kappa_3^2)d\kappa \quad (36)$$

が成り立つから, 時間 t の増加と共に, エネルギー成分は等分配化する.

次節では, 若干の初期条件に対して, 数値計算をおこなう.

5. 数値計算例

まず最初に, 時刻 $t = 0$ のとき系に与えられた弱い乱れが等方性である場合について取り扱う.

エネルギー成分および初期スペクトル・テンソルは, 各々,

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}, \quad (37)$$

$$I_{ij} = \Phi\left(\delta_{ij} - \frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}\right) \quad (38)$$

で表わされる. ここに, Φ は κ と t のみに依存する. I_{11} , I_{22} および I_{33} を(29)式へ代入すれば, X , Y および Z は,

$$\left. \begin{aligned} X &= Y = 0, \\ Z &= \frac{\Phi}{\kappa^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

となるが, (27)式との比較から明らかなように, 角速度 Ω に関する X および Y 項は消える. すなわち, 等方性乱れに対しては, コリオリ力は影響しないでそのまま乱れは等方性を保つ.

次に, $t = 0$ で, 回転軸に直角方向成分のみを持つ弱い二次元乱れが加えられた場合について考察する.

エネルギー成分は

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}, \quad \overline{u_3^2} = 0 \quad (40)$$

と与えられるが, ここで簡単のために, 乱れが共通の波長 κ_0 を持つ平面波から成っているとするれば, 弱い乱れにおいてスペクトル・テンソルが κ の二次の程度であることを考慮し

て、初期スペクトル・テンソルは Dirac の δ -関数を用いて表わすことができる。 δ -関数を用いることは、初期スペクトル・テンソルの適当な平均値 \bar{I}_{ij} を定めるときに問題を残すが、実質的には、波数 κ で積分することによって、その困難は除かれる。

初期スペクトル・テンソルが κ のみの函数として、

$$I_{ii} = I_{11} + I_{22} = C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0) \quad (41)$$

で表わせる。ここに、 C は定数である。

連続の条件(9)式より、 I_{ij} は、

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)\frac{\kappa_2^2}{\kappa^2 - \kappa_3^2}, \quad I_{22} = C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)\frac{\kappa_1^2}{\kappa^2 - \kappa_3^2}, \quad I_{33} = 0, \\ I_{12} &= I_{21} = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}I_{11} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

となり、(42)式を(29)式に代入すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)}{4\kappa^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)}(\kappa^2 + \kappa_1^2 - 2\kappa^2\frac{\kappa_1^2}{\kappa^2 - \kappa_3^2}), \\ Y &= -\frac{C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)}{4\kappa\kappa_1\kappa_2\kappa_3(\kappa^2 - \kappa_1^2)^2}\left[\kappa_1^2(\kappa_2^2 - \kappa_3^2) - \left\{\kappa_1^2(\kappa_2^2 - \kappa_3^2) + \kappa_2^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)\right\}\frac{\kappa_1^2}{\kappa^2 - \kappa_3^2}\right], \\ Z &= \frac{C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)}{2\kappa^2(\kappa^2 - \kappa_1^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

これらを(27)式に代入してスペクトル・テンソルを求め、(31)式を用いて積分すれば、乱れのエネルギー成分は、次式のように得られる。

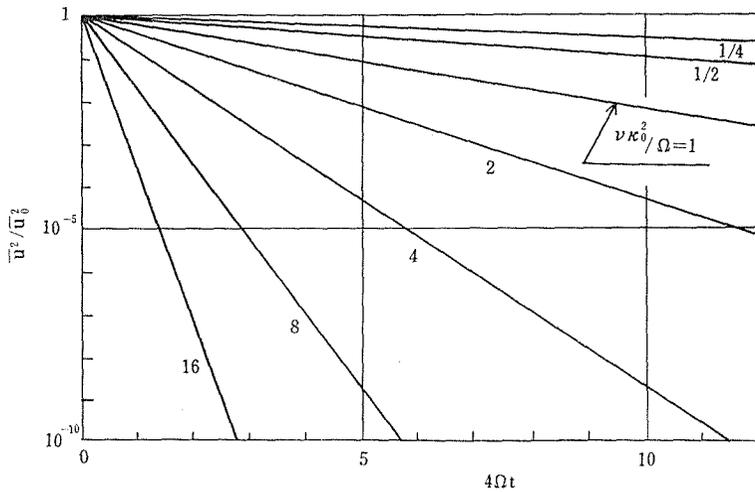
$$\left. \begin{aligned} \overline{u_1^2} &= \pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \left(\frac{4}{3} - 2\frac{\cos \tau}{\tau^2} + 2\frac{\sin \tau}{\tau^3} \right), \\ \overline{u_2^2} &= \overline{u_1^2}, \\ \overline{u_3^2} &= \pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \left(\frac{4}{3} + 4\frac{\cos \tau}{\tau^2} - 4\frac{\sin \tau}{\tau^3} \right), \\ \overline{u^2} &= \overline{u_i u_i} = 4\pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

ここに、 τ は次式である。

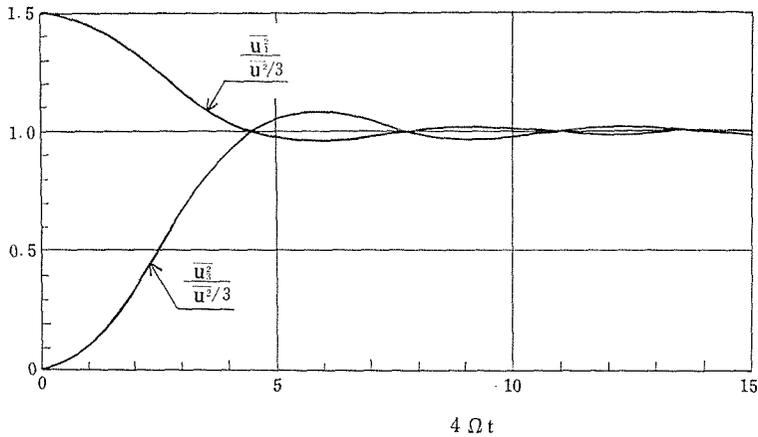
$$\tau = 4\Omega t. \quad (45)$$

乱れの総エネルギー $\overline{u^2}$ は、時間と共に指数函数で減衰する。これはよく知られた減衰終期の t^{-p} ($p > 0$) の法則と合はないが、初めのスペクトルを δ -関数と仮定したことによる結果である。

(44)式の計算結果を第2図および第3図に示す。第2図は、時刻 t における総エネルギー $\overline{u^2}$ と $t = 0$ における乱れの総エネルギー $\overline{u_0^2}$ の比を縦軸に、 $4\Omega t$ を横軸にとり、コリオリ力の影響を示す特性時間 $1/\Omega$ と粘性消散の影響を示す特性時間 $1/\nu\kappa_0^2$ との比 $\nu\kappa_0^2/\Omega$ をパ



第 2 図



第 3 図

ラメーターにして示したものである。

(44)式より、エネルギー成分比は、時間 t と共に変化し、初期スペクトル・テンソル I_{11} 等が κ のみに依存することを考慮すれば、等しい漸近値に近づくことがわかる。つまり、乱れのエネルギーは等分配化し、 t の増加と共に $\bar{u}^2/3$ に近づく。

したがって、第 3 図には、等分配からの偏りの程度を表わすという意味で、回転軸に平行な成分 \bar{u}_3^2 と $\bar{u}^2/3$ との比と、 $\bar{u}_1^2 = \bar{u}_2^2$ であることを考慮して、回転軸に直角方向成分 \bar{u}_1^2 と $\bar{u}^2/3$ の比を縦軸に、 $4\Omega t$ を横軸にとって示した。図から明らかなように、 $t = 0$ から急速に \bar{u}_3^2 成分が増加し、 t の増加と共に各成分は振動しながら等分配化する。

等分配からの偏りが 1% 以内になるのは、

$$4\Omega t \geq 16.2$$

のときである。第2図と第3図から、 $\nu\kappa_0^2/\Omega$ が大きい程乱れの総エネルギーの減衰段階で等分配の度合が著るしくなることがわかる。

結局、初期条件(4)式の下では、コリオリ力は、エネルギーの各成分を振動させて、 t の増加と共に等分配することがわかる。

次に、 $t = 0$ で回転軸方向と軸に直角な一方向の成分をもつ

$$\overline{u_1^2} = 0, \quad \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} \quad (46)$$

で与えられる二次元乱れの場合には、前と同様に、簡単のために I_{ii} は κ のみに依存するとし、かつ、 δ -関数によつて初期スペクトル・テンソルを与えれば、連続の条件(9)式を考慮して、

$$I_{ii} = I_{22} + I_{33} = C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0), \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{11} = 0, \quad I_{22} = C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)\frac{\kappa_3^2}{\kappa^2 - \kappa_1^2}, \quad I_{33} = C\kappa^2\delta(\kappa - \kappa_0)\frac{\kappa_2^2}{\kappa^2 - \kappa_1^2}, \\ I_{32} = I_{23} = -\frac{\kappa_2}{\kappa_3}I_{22} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

と表わされ、(48)式に代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{C\delta(\kappa - \kappa_0)}{4(\kappa^2 - \kappa_1^2)}, \\ Y &= 0, \\ Z &= \frac{C\delta(\kappa - \kappa_0)}{2(\kappa^2 - \kappa_1^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

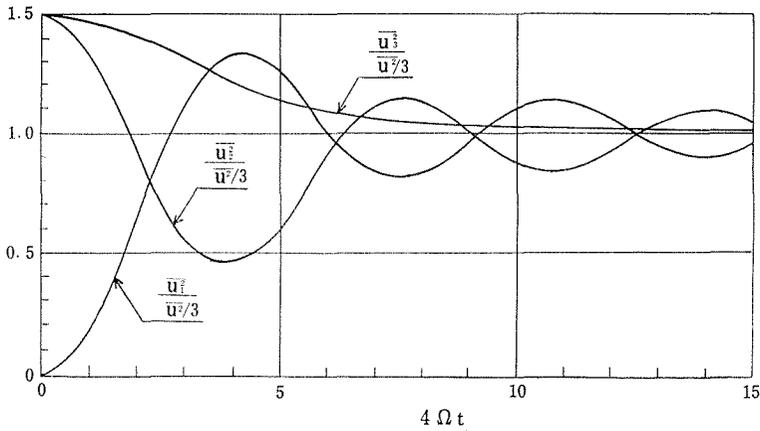
これらの値を用いて、前と同様にして κ -空間で積分すれば、エネルギーの各成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_1^2} &= \pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \left(\frac{4}{3} - 2\frac{\sin \tau}{\tau} + 2\frac{\sin \tau}{\tau^3} - 2\frac{\cos \tau}{\tau^2} \right) \\ \overline{u_2^2} &= \pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{\tau^2} + 2\frac{\sin \tau}{\tau} + 2\frac{\sin \tau}{\tau^3} + 2\frac{\cos \tau}{\tau^2} \right) \\ \overline{u_3^2} &= \pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\tau^2} - 4\frac{\sin \tau}{\tau^3} \right) \\ \overline{u^2} &= 4\pi C \exp(-2\nu\kappa_0^2 t) \kappa_0^4 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ここに、 τ は(45)式で示したものである。

(4)式の初期条件の場合と同様に、乱れの総エネルギーは時間と共に指数関数で減衰するが、これは初期スペクトル・テンソルの δ -関数近似のためである。また、初期スペクトル・テンソルが κ のみに依存することに対応して、各エネルギー成分は時間と共に等分配化する。

$\overline{u^2}$ と $\overline{u_0^2}$ の比を縦軸に、 $4\Omega t$ を横軸にとり、 $\nu\kappa_0^2/\Omega$ をパラメーターにして表わせば、第



第 4 図

2 図と全く同様に示される。

乱れのエネルギーの各成分 $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ および $\overline{u_3^2}$ と $\overline{u^2}/3$ との比を縦軸に, $4\Omega t$ を横軸にして第 4 図に計算結果を示す. 第 3 図と傾向的には同じであり, $\overline{u_1^2}$ 成分が $t=0$ から急速に増加し $\overline{u_2^2}$ 成分が減少し, その後, t の増加にしたがって振動しながら等分配化する. 一方 $\overline{u_3^2}$ 成分は, 単調に減少しながら, 他の二方向成分に比べて早く等分配の漸近値に近づきエネルギーの交換は, 主として, $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_2^2}$ 成分の間で行なわれている.

等分配からの偏りが 1% 以内になるのは,

$$4\Omega t \geq 147$$

のときである.

第 3 図と第 4 図を比較すれば, 第 4 図の場合には, エネルギーの成分間の交換が著しく, 成分の等分配化は, 徐々に進行することがわかる. 第 2 図と第 4 図で等分配化の程度と減衰のそれを比較すれば, 前と同様に, 角速度が大きい程等分配化の程度が大きい.

結局, コリオリ力は, 等方性乱れに作用してもエネルギーの各成分に何ら変化を起さず, また, 等方性でない, 例えば(42)式や(44)式で与えられる, 初期乱れに対しては, 時間と共に各々異なった形でエネルギーの各成分を等分配化することがわかる.

以上の結果は $t=0$ でのスペクトル・テンソルを δ -関数と仮定したときのものであるが, 連続的に分布した場合についても全く同じ傾向をもつ(ただし, 振動は早く消失する)ことは, 強磁場下での電磁乱流についての解析⁷⁾から予想されるところである.

6. 結果および結言

角速度 $\Omega = (0, 0, \Omega)$ で定速度回転する系の中にある弱い一様な乱れに, 遠心力に比べてコリオリ力の影響が支配的に作用する場合について, スペクトル・テンソル Φ_{11} , Φ_{22} および Φ_{33} を(47)式に示すように求めた.

乱れのエネルギーの各方向成分は、(7)式のスペクトル・テンソルを κ - 空間で積分すれば得られるが、時間と共に、コリオリ力の影響の下では、その成分比に変化を受ける。すなわち、エネルギー成分比は、(8)式に示したように、初期スペクトル・テンソル I_{ii} に依存する漸近値に近づき、 I_{ii} が κ のみに依存するときには漸近値は 1、つまり、エネルギー成分は等分配化される。

簡単のために、初期スペクトル・テンソルを κ のみに依存する δ - 関数の形で与えて、二つの初期条件について数値計算を行ない、各エネルギー成分比が時間と共に等分配化することおよび等分配化の度合が角速度 Ω が大きい程著しいことを図と共に示した。

一方、いわゆる減衰の終期と呼ばれる段階において見られる、慣性力を省略できる弱い一様な乱れにおいては、大きな渦、すなわち、スペクトル・テンソルにおいては小さい波数成分、のみが残り、

$$\Phi_{ij} \sim C_{ijlm} \kappa_l \kappa_m \exp(-2\nu\kappa^2 t) \quad (50)$$

で表わされ、また、 C_{ijlm} は初期条件より完全に定まり、 Φ_{ij} の漸近形と共に、終期を通して一定であることが知られている²⁾。したがって、エネルギー成分比もまた減衰の期間を通して変らない、いわゆる大きな渦の永久性が成り立つが、しかし、外力としてコリオリ力が乱れに作用すると、スペクトル・テンソル、したがってエネルギー成分比は時間と共に変わり、初期条件に依存する漸近値に近づく。

しかしながら、等方性乱れにコリオリ力が作用しても(9)式に見るように影響は全くない。

また、等方性からの偏りが最も小さい、いわゆる軸対称乱れにおいては、Ohji⁶⁾によつて、終期においてエネルギー成分比が初期条件から完全に定まり、かつ、終期を通して一定であることが示されているが、対称軸が各々座標軸の 3 および 1 方向である軸対称乱れであるとみなされる二つの初期条件について行つた数値計算例において、コリオリ力の下では、乱れのエネルギー成分比は時間と共に変つて、等分配化し、大きな渦の永久性は成り立たなくなる。

本解析においては、慣性力および遠心力を省略し、また、初期乱れ分布を二次元化し、さらに、スペクトル・テンソルを δ - 関数近似する等の仮定をして事柄を簡単化したが、今後の問題としては、初期条件を実際の分布に近いものとする、さらに慣性力や遠心力とコリオリ力の組合せの下で解析を行なうことであろう。

最後に、本問題を示唆し、解析にあたっては、屢、有益な助言をいただいた信州大学工学部大路通雄教授に感謝いたします。

文 献

- 1) A. A. Townsend : The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge Univ. Press, (1956).
- 2) G. K. Batchelor : The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge Univ. Press (1953) —邦訳:巽友正:乱流理論, 吉岡書店 (1960).
- 3) J.O. Hinze : Turbulence, McGRAW-HILL Book Com. (1959).
- 4) 巽友正:乱流, 槇書店 (1962).
- 5) B. Lehnert : Quart. Appl. Math., Vol. XII, p.321, (1955).
- 6) M. Ohji : Inst. Appl. Mech. KYUSYU Univ., Vol. VI., No. 22 p. 259, (1959).
- 7) M. Ohji : J. of Phy. Soc. of Japan, Vol. 19, No. 8, p. 1430, (1964).

Summary

Characteristics of Turbulence in a Rotating System (I)

Yosiaki TUTIYA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

This paper is to consider the decay of weak homogeneous turbulence in the presence of a constant angular velocity with which the whole system is rotating. In order to find out the first-order effect of the rotation, the centrifugal force may be neglected compared with the Coriolis force.

The result shows that the permanence of big eddies is no longer true but the ratio of energy-partition between three directional components tends to approach a certain asymptotic value depending on the initial conditions. Two simple examples, in which each energy spectrum is given by a δ -function, are shown as an illustration.