

はり問題におけるたわみ曲線の 一元化による解法

関川 三男*

(昭和39年12月22日受理)

1. ま え が き

はり問題には多くの不連続性がともなう。これがために理論や計算上に繁雑さがおこるのがつねである。従来この不連続性をのぞくために、Clebsch¹⁾、Föppl²⁾、Macauley³⁾、Brock⁴⁾、Newton⁴⁾、Weissenburger⁵⁾、などによって多くの研究がなされて現在にいたっている。筆者はこれらとはべつの立場から三角級数をもちいて曲げモーメントの連続表示を行いこの問題に対する一つの解法をこころみた。この適用はきわめて平易な考えで理解され計算も数値表や図表をもちいて組織的、能率的に進めることができる。なお不静定問題の解法や移動荷重による反力の影響線の算定には特に有効的にもちいられる。

2. 単純はりの計算



第1図

第1図の単純はりに集中荷重が一つある場合その曲げモーメントをフーリエの sine の級数に展開する。

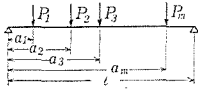
$$M = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{ここで } A_n = \frac{2Pl}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi a}{l}.$$

したがって $EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M$, に代入し $x = 0$, $x = l$ で, $y = 0$, の条件から曲げモーメント (M), かたむき (θ), たわみ (y), を計算すると

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ EI\theta &= \frac{2Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}, \\ EIy &= \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

(1)式から任意の点の曲げモーメント, かたむき, たわみが連続的に表わされ移動荷重による影響線もきまる。

* 機械工学教室, 助手



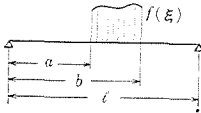
第2図

第2図の単純はりに集中荷重が m 個ある場合は重ねあわせの方法で(1)式を m 個くわえて計算できる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^m \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} P_m \sin \frac{n\pi a_m}{l}, \\ EI\theta &= \frac{2l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^m \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{l} P_m \sin \frac{n\pi a_m}{l}, \\ EIy &= \frac{2l^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^m \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} P_m \sin \frac{n\pi a_m}{l}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

荷重が多くなると複雑のように見えるが収束性がよくなり能率的に計算できる。

第3図の一般の分布荷重では(2)式と同じように(1)式を使用して計算する。



第3図

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2l}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_a^b f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \\ EI\theta &= \frac{2l^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{l} \int_a^b f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \\ EIy &= \frac{2l^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_a^b f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$



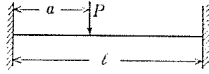
第4図

第4図の単純はりの中間に偶力のある場合も曲げモーメントをフーリエの sine の級数に展開する。境界条件などを集中荷重の場合と同じように考えて計算すると(4)式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{2Ma}{\pi} \sum \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ EI\theta &= -\frac{2Mal}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}, \\ EIy &= -\frac{2Mal^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

偶力が m 個ある場合は集中荷重の場合と同じように重ねあわせて行なう。

3. 不静定はりの計算



第5図

第5図の不静定はりでは不静定のモーメントを $Ax + B$ とし単純はりで求めた曲げモーメントに加えて計算する。

$$M = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + Ax + B,$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M, \text{ に代入し境界条件より } A, B \text{ をきめる。}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{2Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{A}{2} x^2 - Bx + C_1,$$

$$EIy = \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{A}{6} x^3 - \frac{B}{2} x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{matrix} \right), \left. \begin{matrix} x=l \\ \frac{dy}{dx}=0 \end{matrix} \right), \left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right), \left. \begin{matrix} x=l \\ y=0 \end{matrix} \right), \text{ より}$$

$$A = \frac{12P}{\pi^3} \sum \frac{\{1 + (-1)^n\}}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l},$$

$$B = -\frac{4Pl}{\pi^3} \sum \frac{\{2 + (-1)^n\}}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l},$$

$$C_1 = -\frac{2Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l},$$

$$C_2 = 0,$$

したがって不静定モーメントの $Ax + B$ は

$$\frac{4P}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \left[3x\{1 + (-1)^n\} - l\{2 + (-1)^n\} \right]. \dots\dots\dots(5)$$

(5)式から $x = 0, x = l$, 点の不静定モーメントは

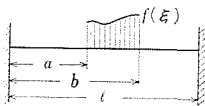
$$M_{(x=0)} = \frac{4P}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \left[-l\{2 + (-1)^n\} \right],$$

$$M_{(x=l)} = \frac{4P}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \left[l\{1 + 2(-1)^n\} \right].$$

で任意の点の曲げモーメント，かたむき，たわみは

$$\left. \begin{aligned}
 M &= \frac{2P}{\pi^2} \left[l \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} [l\{2+(-1)^n\} \right. \\
 &\quad \left. - 3x\{1+(-1)^n\}] \right], \\
 EI\theta &= \frac{2P}{\pi^3} \left[\sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} [l^2 \cos \frac{n\pi x}{l} + 2lx\{2+(-1)^n\} \right. \\
 &\quad \left. - 3x^2\{1+(-1)^n\} - l^2] \right], \\
 EIy &= \frac{2P}{\pi^3} \left[\frac{l^3}{\pi} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} [lx^2\{2+(-1)^n\} \right. \\
 &\quad \left. - x^3\{1+(-1)^n\} - l^2x] \right].
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

となり集中荷重が m 個ある場合は重ねあわせる。

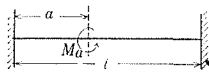


第6図

第6図の分布荷重の場合の不静定モーメントは，

$$\frac{4}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \left[3x\{1+(-1)^n\} - l\{2+(-1)^n\} \right] \int_a^b f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, \quad \dots\dots(7)$$

となり



第7図

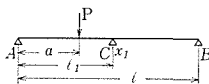
第7図の偶力がある場合の不静定モーメントは

$$- \frac{4M_a}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi a}{l} \left[\frac{3x}{l} \{1+(-1)^n\} - \{2+(-1)^n\} \right], \quad \dots\dots\dots(8)$$

となる

4. 連続はりの計算

連続はりでは単純はりのたわみの式を使って Wilson の方法から各支点の反力が容易に求められる。



第8図

第8図で反力 x_1 の大きさをきめるため支点 C がないものとして荷重 P による C 点のたわみを求め，つぎに荷重 P がないものとして反力 x_1 による C 点のたわみを求めて等しいとおく。

荷重 P による C 点のたわみは，

$$EIy_1 = \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi l_1}{l},$$

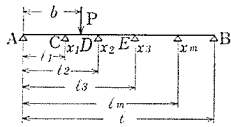
反力 x_1 , による C 点のたわみは,

$$EIy'_1 = - \frac{2x_1 l^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_1}{l} \right),$$

となり $y_1 = y'_1$, より

$$x_1 = - \frac{\sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi l_1}{l}}{\sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_1}{l} \right)} \cdot P. \dots\dots\dots(9)$$

なお $x_1 = f(a)$, の関係から移動荷重による反力 x_1 の影響線もきまる



第9図

第9図のように一般に m 個の支点がある場合は荷重 P による $C, D, E, \dots\dots\dots$ のたわみと各反力 $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots$ による $C, D, E, \dots\dots\dots$ のたわみをそれぞれ等しいとおき連立方程式をつくるとその根が反力 $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots$ の値になる。

①各支点がないものとして荷重 P による C 点のたわみと荷重 P がないものとして各反力 $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots$ による C 点のたわみを等しいとおく。

$$\begin{aligned} & \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \\ &= - \frac{2l^3}{\pi^4} \left\{ x_1 \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_1}{l} \right) + x_2 \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_2}{l} + \dots\dots\dots \right. \\ & \quad \left. + x_m \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} \right\}. \end{aligned}$$

② D 点についても①のように行う。

$$\begin{aligned} & \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_2}{l} \\ &= - \frac{2l^3}{\pi^4} \left\{ x_1 \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_2}{l} + x_2 \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_2}{l} \right) + \dots\dots\dots \right. \\ & \quad \left. + x_m \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_2}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} \right\}. \end{aligned}$$

③ $E, F, \dots\dots\dots$ 点も同じように行い最後の支点の方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} \\ &= -\frac{2l^3}{\pi^4} \left\{ x_1 \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} + x_2 \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_2}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} + \dots \right. \\ & \left. + x_m \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_m}{l} \right) \right\}. \end{aligned}$$

となりこの m 元連立方程式の根が各支点の反力で、式は複雑のようであるが収束性がよく数値表や図表をもちいると容易に計算できる。

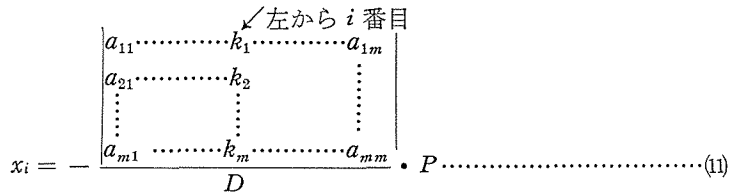
第5項までで十分実用に適するので $n = 5$ 、までの各項の値をつぎのようにおいて計算する。

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_1}{l} &= k_1, & \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_1}{l} \right) &= a_{11}, \\ \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_2}{l} &= k_2, & \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_2}{l} \right) &= a_{22}, \\ & \vdots & & \vdots \\ \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} &= k_m, & \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi l_m}{l} \right) &= a_{mm}, \\ \\ \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_2}{l} &= a_{12}, \\ \\ \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{n\pi l_m}{l} &= a_{1m}, \\ \\ \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi l_m}{l} \sin \frac{n\pi l_1}{l} &= a_{m1}, \end{aligned}$$

とおいて $k_1, k_2, \dots, a_{11}, a_{12}, \dots$ などの記号で表わすと

$$x_1 = - \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ k_2 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}} \cdot P \dots \dots \dots (10)$$

左から i 番目の反力を x_i 、とし分母の行列を D で表わすと



となって各支点の反力が求められる。

つぎに各支点間が等間隔のときは

$$k_i = \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi b}{l} \sin \frac{in\pi}{m+1}$$

$$a_{1m} = a_{m1} = \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{ln\pi}{m+1} \sin \frac{mn\pi}{m+1}$$

となり計算上いっそう容易になる。集中荷重が多数ある場合や分布荷重のように荷重条件がかわっても k_1, k_2, k_3, \dots の値がかわるだけである。また $x_i = f(b)$ の関係から移動荷重による各反力の影響線もきまる。

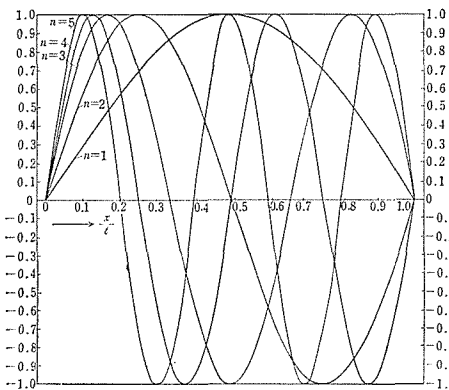
5. 数 値 計 算

数値計算は第 1 表と図表 1, 2 と三角関数表を使う。

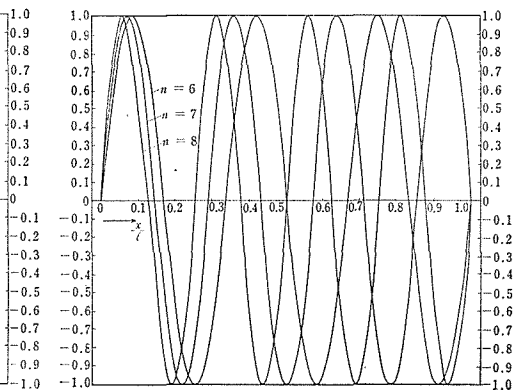
第 1 表

n	1/n	1/n ²	1/n ³	1/n ⁴	1/n ⁵	πについて
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	π = 3.141593
2	0.500000	0.250000	0.125000	0.062500	0.031250	π ² = 9.869604
3	0.333333	0.111111	0.037037	0.012346	0.004115	π ³ = 31.006280
4	0.250000	0.062500	0.015625	0.003906	0.000977	1/π = 0.318310
5	0.200000	0.040000	0.008000	0.001600	0.000320	1/π ² = 0.101321
6	0.166667	0.027778	0.004629	0.000772	0.000129	1/π ³ = 0.032252
7	0.142857	0.020408	0.002916	0.000416	0.000059	1/π ⁴ = 0.010266
8	0.125000	0.015625	0.001953	0.000244	0.000031	1/π ⁵ = 0.003268
9	0.111111	0.012346	0.001372	0.000152	0.000017	
10	0.100000	0.010000	0.001000	0.000100	0.000010	

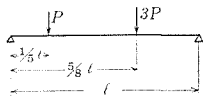
1 図 表



2 図 表



図表 1, 2 は横座標は x/l , の値で l は, はりの全長で x は左端よりの位置を示している。 n は第 n 項を示し第 5 項まで必要なら $n = 1, 2, 3, 4, 5$ までの値をよみとる。簡単な計算例をつぎに示してみる。



第10図

第10図のように荷重のあるはりで中央点の曲げモーメントとたわみ, 左端のかたむきを求める。(2)式より

$$M_{(x=l/2)} = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{5} + 3 \sin \frac{5n\pi}{8} \right\},$$

$$EI\theta_{(x=0)} = \frac{2Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \left\{ \sin \frac{n\pi}{5} + 3 \sin \frac{5n\pi}{8} \right\},$$

$$EIy_{(x=l/2)} = \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{5} + 3 \sin \frac{5n\pi}{8} \right\}.$$

第 1 表より $1/\pi^2, 1/\pi^3, 1/\pi^4, 1/n^2, 1/n^3, 1/n^4$, を求め図表 1, 2 より $\sin \frac{n\pi}{2}$ は 0.5 の点で $\sin \frac{n\pi}{5}$ は 0.2 の点で $\sin \frac{5n\pi}{8}$ は 0.625 の点で $n = 1$ から $n = 5$, までよみとつて計算する。

第 5 項までの値を従来の計算とくらべてみる。

() 内の値が従来の計算方法の値である。

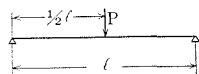
$$M_{(x=l/2)} = 0.6583Pl \quad (0.6625Pl)$$

$$EI\theta_{(x=0)} = 0.2090Pl^2 \quad (0.2091Pl^2)$$

$$EIy_{(x=l/2)} = 0.0692Pl^3 \quad (0.0689Pl^3)$$

この計算例から本方法は計算が簡単であって値は従来の方法とほとんどかわらないことがわかる。

精度について従来の計算との誤差を 2, 3 の例でくらべてみる。



第11図

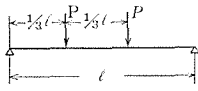
第11図で $M_{(x=l/2)} = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right)$, では第 3 項で 6.6%,

第 5 項で 3.2% の誤差があり, $EI\theta_{(x=0)} = \frac{2Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2}$,

では第 3 項で 0.32%, 第 5 項で 0.09% の誤差があり,

$EIy_{(x=l/2)} = \frac{2Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right)$, では第 3 項で 0.07%, 第 5 項で 0.01%, の誤差で

ある。

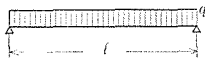


第12図

第12図は、 $M_{(x=l/2)} = \frac{4Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{6}$ 、では第3項で0.9%、第5項で0.8%、の誤差があり、

$$EI\theta_{(x=0)} = \frac{4Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{6}$$

では第3項で、0.18%、第5項で0.09%、の誤差があり、 $EIy_{(x=l/2)} = \frac{4Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{6}$ 、では第3項で0.04%、第5項で0.005%、の誤差がある。



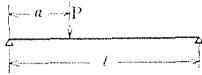
第13図

第13図で、 $M_{(x=l/2)} = \frac{2ql^2}{\pi^3} \sum \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2}$ 、では第1項で3.2%、第2項で0.56%、の誤差があり、

$$EI\theta_{(x=0)} = \frac{2ql^3}{\pi^4} \sum \frac{[1 - (-1)^n]}{n^4}$$

では第2項で0.2%、 $EIy_{(x=l/2)} = \frac{2ql^4}{\pi^5} \sum \frac{[1 - (-1)^n]}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2}$ 、でも第2項で0.15%、の誤差があるだけである。

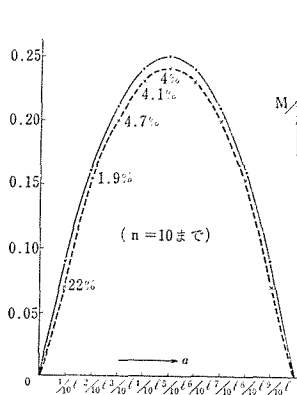
以上の計算例からわかるように荷重条件では荷重が多くなり複雑になるほど精度はよくなり、同じ状態では曲げモーメント、かたむき、たわみの順序で精度がよくなるのがわかる。



第14図

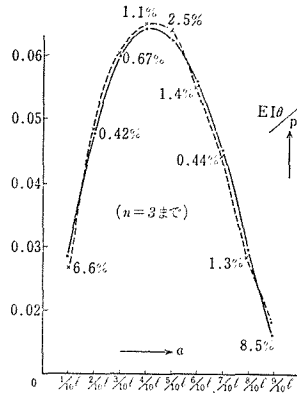
つぎに第14図の移動荷重による精度をしらべてみる。第14図でPは移動荷重とし、図表3から7までにおいて実線は従来の計算方法のもので破線が本研究のものであり、各点に示されている%、は従来の計算との誤差である。

荷重位置とその点の曲げモーメント



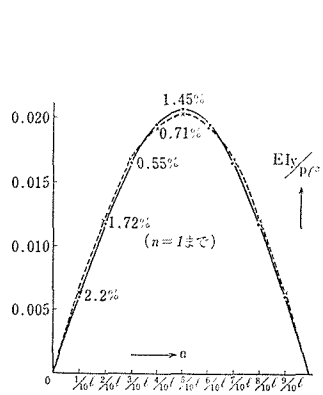
図表 3

荷重位置と左端(x=0)のかたむき



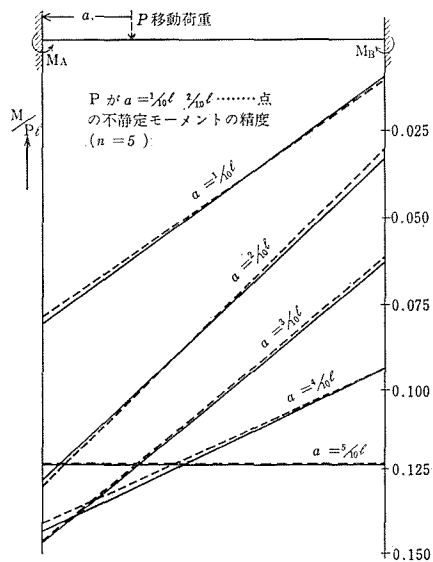
図表 4

荷重位置と中央点(x=l/2)のたわみ

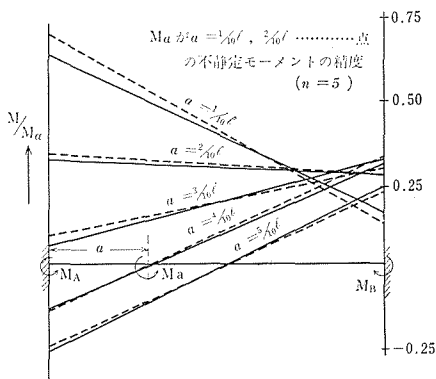


図表 5

つぎに不静定はりの不静定モーメントの精度をしらべてみる。

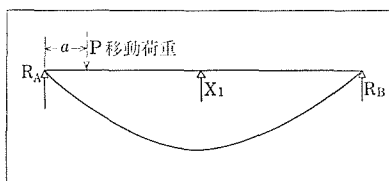


図表 6

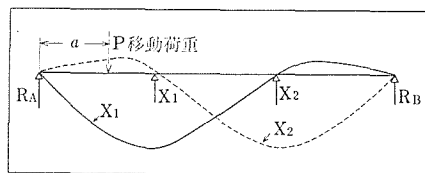


図表 7

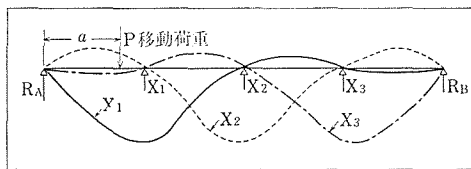
また等間隔の支点をもつはりで移動荷重による反力の影響線を本研究のもので計算すると図表 8 から 11 までのようになる。



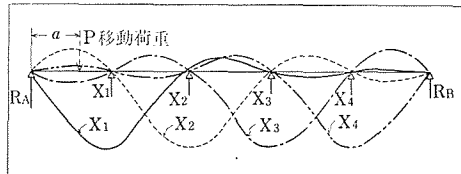
図表 8



図表 9

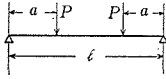


図表 10



図表 11

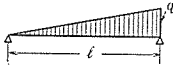
6. 計算式のおもな例



$$M = \frac{4Pl}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$EI\theta = \frac{4Pl^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$EIy = \frac{4Pl^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



$$M = \frac{2ql^2}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$EI\theta = \frac{2ql^3}{\pi^4} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

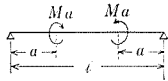
$$EIy = \frac{2ql^4}{\pi^5} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



$$M = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$EI\theta = \frac{4ql^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

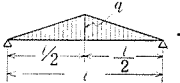
$$EIy = \frac{4ql^4}{\pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



$$M = \frac{4Ma}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$EI\theta = \frac{4Ma l}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$EIy = \frac{4Ma l^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(l-2a)n\pi}{2l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



$$M = \frac{8ql^2}{\pi^4} \sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$EI\theta = \frac{8ql^3}{\pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$EIy = \frac{8ql^4}{\pi^6} \sum \frac{1}{n^6} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

7. む す び

本研究は静定，不静定問題をとわず一般的な荷重状態のもとに，最小限の周辺条件の導入によりきわめて理解しやすい考察によって解を求めることができる。また数値表や図表を使うと計算上の繁雑さもなく，精度も数項で十分実用に適することがみとめられた。

変断面のあるはり，支点に沈下のあるはり，フレームにも利用され，さらに複雑な構造物など広いはんいまでの解析に発展が期待できる。

おわりに本研究に貴重な御示唆と適切な御指導をいただいた本工学部機械工学教室宮入武夫教授に厚く感謝しあわせて御協力して下さった岡谷工高白川昇教諭に感謝いたします。

文 献

- 1) Clebsch, A., *Theorie Der Elastizität Fester Körper* (B.G. Teubner, Leipzig, 1862), Vol. 87, p. 462.
- 2) Föppl, A., *Vorlesungen über Technische Mechanik* (B.G. Teubner, Leipzig, 1914), Vol. 111, p. 124.
- 3) Macauley, W.H., "A note on the deflection of beam," *Messenger Math* 48, 129 (1918).
- 4) Brock, J.E. and Newton, R. E., "A method of pedagogical value in elementary bending theory," *Civil Eng. Bull. ASEE* 17, 10—12 (February 1952).
- 5) Weissenburger, *Integration of Discontinuous Expressions Arising in Beam Theory. AIAA* 106—107 (1964.)

Summary

A Simple Solution of the Beam Deflection Problems.

MITSUO SEKIKAWA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering.)

There are many discontinuous expressions in beam problems, and, therefore, much complexity usually arises in theorizing and calculating them. By this time lots of studies to eliminate these discontinuous expressions have been made by many contributors, i. e, Clebsch, Föppl, Macauley, Brock, Newton, and Weissenburger. From a different standpoint, I tried to find out a solution of these problems concerning continuous expressions of bending moment by means of trigonometrical series. This application can be easily understood and we can also calculate it with the numerical value table systematically and efficiently. Moreover, in this method the accuracy gained by employing a few clause proved to be enough to be put to practical use.