

円環の強度

(一軸対称面内荷重をうける曲りはりとしての計算)

佐々木三郎

(昭和39年12月23日受理)

1. はしがき

従来薄肉円環に関する研究は多数発表され、種々の荷重に対する断面力・直径の変化は例えば、Roark⁽¹⁾, Pippard⁽²⁾等の著書に詳しい。何れも曲げエネルギーのみから導いている——勿論実用上充分満足できるものではある——が、厚肉になる程また荷重の種類によっては軸力・せん断のエネルギーを無視することができないことは周知の通りである。Larard⁽³⁾は円環に等間かくの集中荷重が作用した場合、以上のエネルギーを考えて変形を計算し実際の試験片について一對の集中荷重が作用したときの直径の変化を測定し理論と対比している。その後集中荷重・モーメントが作用した場合、曲げ・軸力・せん断のエネルギーを考えた計算が発表されていて、何等つけ加えるべき余地がないように思われるが、筆者は外荷重をフーリエ級数で与えた場合の断面力・変位を求める必要が生じたので、次の方針の下に計算を試みた。すなわち

厚肉円環に一軸対称の一般荷重をフーリエ級数の形で表わした場合に、断面力・変位・直径の変化を曲りはりの立場から、ひずみエネルギーをせん断の項まで考え、Castiglianoの定理を利用して一般解を導いたもので、特別の場合として薄肉円環・二軸対称荷重の場合の解を誘導し、さらに数例に適用した。終りにひずみエネルギーの各項が及ぼす断面力・変形の影響を、具体的な数値例により明らかにしたものである。

2. 記号 (第1図)

R_0, R_i, ρ	円環の外周, 内周, 中心線の半径 (mm)
$b, 2h$	円環の軸方向, 半径方向厚さ (mm)
A, I	円環の断面積 (mm^2), 断面二次モーメント (mm^4)
P, w	外周に作用する集中荷重 (kg), 分布荷重 (kg/mm)
p_r, p_θ, m	外周に作用する外力の法線・接線成分 (kg) およびモーメント荷重 (kg·mm)
$\alpha_0, \alpha_n, \alpha_n, \gamma_n$	一般荷重のフーリエ係数 (kg)
N_0, M_0	断面Aに生ずる軸力 (kg), 曲げモーメント (kg·mm)
N, V, M	任意断面の軸力・せん断力 (kg) 曲げモーメント (kg·mm) 正の向きを第1図のようにとる
U	円環に貯えられるひずみエネルギー (kg·mm)

- E, G 縦および横弾性係数 (kg/mm²)
- φ, θ, α x 軸よりの角座標 (rad.)
- $\delta_r', \delta_\theta'$ 断面 B を固定した場合の内周上の点の変位 (mm)
- δ_r, δ_θ 原点固定の場合の内周上の点の変位 (mm)
- D_x, D_y 水平 (x 軸) 及垂直 (y 軸) 直径の増加 (mm)
- $e_0 = R_0/\rho, e_i = R_i/\rho$
- $\kappa = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\rho + \eta} dA$ 曲りはりの断面係数 (η は外向きを正にとる)
- $\zeta = \frac{kE}{G}$ せん断係数 (長方形断面では $k = \frac{3}{2}, \dots$)
- \sum' $n = 2, 4, 6, \dots$ の偶数についての和を表わす

3. 外力の表示

外周にそって作用する x 軸に対称な外力の法線・接線成分およびモーメントを次のフーリエ級数で表わす。

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta, & p_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta. \\ m &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$x \text{ 方向の外力のつりあいより } 2 \int_0^\pi \{ p_r \cos \theta - p_\theta \sin \theta \} d\theta = 0.$$

$$(1) \text{ を代入して次の関係を得る } \alpha_1 = \beta_1. \quad (2)$$

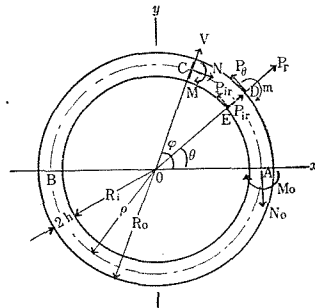
(y 方向の合力および合モーメントは当然 0 である)

4. 断面力

第1図において断面 A における軸力・曲げモーメントを $N_0 \cdot M_0$ とすれば、任意の断面 C に生ずる軸力 (N)・せん断力 (V)・曲げモーメント (M) は

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \varphi + P_1(\varphi) \\ V &= -N_0 \sin \varphi + P_2(\varphi) \\ M &= M_0 + \rho \{ N_0(1 - \cos \varphi) - P_3(\varphi) + P_4(\varphi) \} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに



第1図 円環

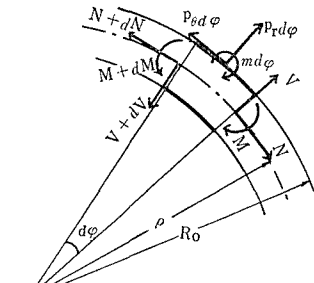
$$\begin{aligned}
 P_1(\varphi) &= \int_0^\varphi \{ p_r \sin(\varphi - \theta) - p_\theta \cos(\varphi - \theta) \} d\theta, \\
 P_2(\varphi) &= \int_0^\varphi \{ p_r \cos(\varphi - \theta) + p_\theta \sin(\varphi - \theta) \} d\theta, \\
 P_3(\varphi) &= \int_0^\varphi \{ p_r \sin(\varphi - \theta) + p_\theta (e_0 - \cos(\varphi - \theta)) \} d\theta, \\
 P_4(\varphi) &= \int_0^\varphi m d\theta.
 \end{aligned} \tag{4}$$

(1)を代入し上式を計算すれば (2)により α_1 の代りに β_1 を用いる

$$\begin{aligned}
 P_1(\varphi) &= \alpha_0 - \left\{ \alpha_0 - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \right\} \cos \varphi - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \cos n\varphi, \\
 P_2(\varphi) &= \left\{ \alpha_0 + \beta_1 - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \right\} \sin \varphi + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\varphi, \\
 P_3(\varphi) &= \alpha_0 + e_0\beta_1 + e_0 \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n} \beta_n - \left\{ \alpha_0 + e_0 \beta_1 - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \right\} \cos \varphi \\
 &\quad - \sum_{n=2}^\infty \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n \right\} \cos n\varphi, \\
 P_4(\varphi) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \gamma_n - \gamma_1 \cos \varphi - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n} \gamma_n \cos n\varphi.
 \end{aligned} \tag{5}$$

なお(3)~(5)が円環要素のつりあい方程式(6)を満足することは容易に証明される。(証明は略す)

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{d\varphi} &= V - p_\theta, & \frac{dV}{d\varphi} &= -N + p_r, \\
 \frac{dM}{d\varphi} &= -\rho \{ V + (e_0 - 1) p_\theta \} + m.
 \end{aligned} \tag{6}$$



不静定量 $N_0 \cdot M_0$ および断面力 $N \cdot V \cdot M$ の計算

$N_0 \cdot M_0$ は断面Bに対する断面Aの N_0, M_0 方向の変位, 回転が0であることから Castigliano の定理を用いて計算する。円環に貯えられるひずみエネルギー U を次のようにとる。

$$U = \frac{2}{AE} \left[\frac{1 + \kappa}{2\kappa\rho} \int_0^\pi M^2 d\varphi + \frac{\rho}{2} \int_0^\pi N^2 d\varphi + \int_0^\pi MN d\varphi + \frac{\zeta\rho}{2} \int_0^\pi V^2 d\varphi \right] \tag{7}$$

ここに

第1・2項は曲げモーメント・軸力によるもの、第3項は円環であるための軸力と曲げモーメントの連成項で微小のため普通は省略されている、第4項はせん断力による項である。 $N_0 \cdot M_0$ は

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial N_0} = 0$$

の連立方程式を解いて求める。すなわち

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\kappa}{\kappa\rho} M + N \right) \frac{\partial M}{\partial M_0} d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi \left\{ \left(\frac{1+\kappa}{\kappa\rho} M + N \right) \frac{\partial M}{\partial N_0} + (M + \rho N) \frac{\partial N}{\partial N_0} + \zeta\rho V \frac{\partial V}{\partial N_0} \right\} d\varphi = 0.$$

(3) および $\partial M/\partial M_0 = 1$, $\partial M/\partial N_0 = \rho(1 - \cos\varphi)$ 等を代入して

$$\frac{M_0}{\rho} + N_0 = \frac{\kappa}{\pi(1+\kappa)} A, \quad \frac{M_0}{\rho} + \lambda N_0 = \frac{\kappa}{\pi(1+\kappa)} (A - B), \quad (8)$$

$$\text{ここに} \left\{ \begin{array}{l} A = \int_0^\pi \left\{ \frac{1+\kappa}{\kappa} (P_3 - P_4) - P_1 \right\} d\varphi, \quad B = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{\kappa} (P_3 - P_4) \cos\varphi - \zeta P_2 \sin\varphi \right\} d\varphi, \\ \lambda = 1 + \frac{1+\kappa\zeta}{2(1+\kappa)}. \quad P_1, \dots \text{は } P_1(\varphi), \dots \text{を略したもの, 以下同じ.} \end{array} \right.$$

A, B に(5)を代入し(8)を解くと結局

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \alpha_0 + \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ (e_0 + \kappa\zeta) \beta_1 - \gamma_1 \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n), \\ \frac{M_0}{\rho} &= -\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa\zeta}{1+\kappa\zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \gamma_1 \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n}{n^2 - 1} + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n + \frac{\gamma_n}{n} \right\}. \end{aligned} \right\} (9)$$

(3)の N_0, M_0 に(9)を、 $P_1(\varphi), \dots$ に(5)を代入し、 φ の代りに θ を使用すれば、任意の断面 θ における断面力は次のフーリエ級数で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 + \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ (e_0 + \kappa\zeta) \beta_1 - \gamma_1 \right\} \cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \cos n\theta, \\ V &= -\frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \gamma_1 \right\} \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta, \\ M &= \rho \left[-\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa\zeta}{1+\kappa\zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \gamma_1 \right\} \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n - \frac{1}{n} \gamma_n \right\} \cos n\theta \right]. \end{aligned} \right\} (10)$$

註 (10)は外力が外周にそうて作用した場合の断面力であるが、外力が中心線に作用するときは e_0 の代りに 1, 内周にそうて作用するときは e_0 の代りに e_i とおけばよい。

5. 変位

内周上の点 E における変位 δ' ($\delta r'$, $\delta \theta'$) を求める。第 1 図 E に仮想荷重 P_i (P_{ir} $P_{i\theta}$) を作用させ Castigliano の定理により

$$\delta' = \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \right)_{P_i \rightarrow 0} \tag{11}$$

ここに δ' は断面 B を固定したときの原点に関する変位である。

断面 φ に生ずる断面力は

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} N_{Pi} = N_0 \cos \varphi + P_1(\varphi) + P_{ir} \sin(\varphi - \theta) - P_{i\theta} \cos(\varphi - \theta), \\ V_{Pi} = -N_0 \sin \varphi + P_2(\varphi) + P_{ir} \cos(\varphi - \theta) + P_{i\theta} \sin(\varphi - \theta), \\ M_{Pi} = M_0 + \rho \left\{ N_0(1 - \cos \varphi) - P_3(\varphi) + P_4(\varphi) - P_{ir} \sin(\varphi - \theta) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - P_{i\theta}(e_i - \cos(\varphi - \theta)) \right\}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\varphi < \theta) \\ (\varphi > \theta) \end{array} \tag{12}$$

(7) (11) (12) より

$$AE \delta' = \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{1 + \kappa}{\kappa \rho} M + N \right) \frac{\partial M_{Pi}}{\partial P_i} + (\rho N + M) \frac{\partial N_{Pi}}{\partial P_i} + \zeta \rho V \frac{\partial V_{Pi}}{\partial P_i} \right\} d\varphi. \tag{13}$$

(12) より $\partial M_{Pi} / \partial P_{ir} = -\rho \sin(\varphi - \theta), \dots$ を求め (13) と共に (11) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\rho} \left\{ \frac{\delta r'}{\delta \theta'} \right\} &= \int_0^\pi \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa} Z - \frac{1}{\kappa} N_0 \cos \varphi - \left\{ \frac{1 + \kappa}{\kappa} (P_3 - P_4) - P_1 \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\varphi - \theta) \\ \cos(\varphi - \theta) - e_i \end{array} \right\} d\varphi \\ &+ \int_0^\pi \left\{ Z - (P_3 - P_4 - P_1) \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi - \theta) \\ -\cos(\varphi - \theta) \end{array} \right\} d\varphi \\ &+ \zeta \int_0^\pi (-N_0 \sin \varphi + P_2) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi - \theta) \\ \sin(\varphi - \theta) \end{array} \right\} d\varphi. \end{aligned} \tag{14}$$

ここに $Z = \frac{M_0}{\rho} + N_0.$

かきかえると

$$\begin{aligned}
 \frac{AE}{\rho} \delta_{r'} &= -\frac{1}{\kappa} ZS + N_0 \left(\frac{1}{\kappa} S_c - \zeta C_s \right) + \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{\kappa} (P_3 - P_4) \sin(\varphi - \theta) \right. \\
 &\quad \left. + \zeta P_2 \cos(\varphi - \theta) \right\} d\varphi, \\
 \frac{AE}{\rho} \delta_{\theta'} &= \frac{1}{\kappa} ZC - N_0 \left(\frac{1}{\kappa} C_c + \zeta S_s \right) - \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{\kappa} (P_3 - P_4) \cos(\varphi - \theta) \right. \\
 &\quad \left. - \zeta P_2 \sin(\varphi - \theta) \right\} d\varphi + e_i \int_0^\pi \left[-\frac{1+\kappa}{\kappa} Z + \frac{1}{\kappa} N_0 \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1+\kappa}{\kappa} (P_3 - P_4) - P_1 \right\} \right] d\varphi.
 \end{aligned} \tag{15}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\pi \sin(\varphi - \theta) d\varphi = 1 + \cos \theta, & C &= \int_0^\pi \cos(\varphi - \theta) d\varphi = \sin \theta, \\
 S_c &= \int_0^\pi \cos \varphi \sin(\varphi - \theta) d\varphi = -\frac{1}{2} (\pi - \theta) \sin \theta, \\
 C_s &= \int_0^\pi \sin \varphi \cos(\varphi - \theta) d\varphi = \frac{1}{2} (\pi - \theta) \sin \theta, \\
 S_s &= \int_0^\pi \sin \varphi \sin(\varphi - \theta) d\varphi = \frac{1}{2} (\pi - \theta) \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta, \\
 C_c &= \int_0^\pi \cos \varphi \cos(\varphi - \theta) d\varphi = \frac{1}{2} (\pi - \theta) \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{16}$$

(15)に含まれる $N_0 \cdot M_0 \cdot Z$ に(9)を, $P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$ に(5)を, 更に $n \geq 2$ に対する次式

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos n\varphi \sin(\varphi - \theta) d\varphi &= -\frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (-1)^n \cos \theta + \cos n\theta \right\}, \\
 \int_0^\pi \sin n\varphi \sin(\varphi - \theta) d\varphi &= -\frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (-1)^n n \sin \theta + \sin n\theta \right\}, \\
 \int_0^\pi \sin n\varphi \cos(\varphi - \theta) d\varphi &= \frac{n}{n^2 - 1} \left\{ (-1)^n \cos \theta + \cos n\theta \right\}, \\
 \int_0^\pi \cos n\varphi \cos(\varphi - \theta) d\varphi &= -\frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (-1)^n \sin \theta + n \sin n\theta \right\}.
 \end{aligned} \tag{16'}$$

を用い, せいとんすれば, 内周上の点 (R_i, θ) における変位 $(\delta_{r'}, \delta_{\theta'})$ を表わす解は次のフーリエ級数で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \delta r' &= \frac{\rho}{AE} \left[\frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (K_1(n)\alpha_n + K_{20}(n)\beta_n + K_4(n)\gamma_n) \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (K_1(n)\alpha_n + K_{20}(n)\beta_n + K_4(n)\gamma_n) \cos n\theta \right], \\
 \delta \theta' &= \frac{\rho}{AE} \left[-\left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + K_\beta \beta_1 + K_\gamma \gamma_1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (K_1(n)\alpha_n + K_{20}(n)\beta_n + K_4(n)\gamma_n) \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (K_{2i}(n)\alpha_n + K_3(n)\beta_n + K_5(n)\gamma_n) \sin n\theta \right].
 \end{aligned} \tag{17}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 K_\beta &= \frac{(e_0-1)(1-e_i)\zeta}{1+\kappa\zeta} - e_0 e_i, & K_\gamma &= -\frac{(1-e_i)\zeta}{1+\kappa\zeta} + e_i, & K_1(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2-1)^2} + \frac{\zeta n^2}{(n^2-1)^2}, \\
 K_{20}(n), K_{2i}(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2-1)} \left(\frac{e_0 e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) - \frac{\zeta n}{(n^2-1)^2}, \\
 K_3(n) &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \left(\frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) + \frac{e_0 e_i}{n^2} + \frac{\zeta}{(n^2-1)^2}, \\
 K_4(n) &= -\frac{1}{\kappa n(n^2-1)}, & K_5(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2-1)} \left(1 - \frac{(1+\kappa)e_i}{n^2} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

註 (17)は内周上の点Dの変位であるが、中心線上の変位は e_i の代りに1、外周上の点E (R_0, θ) の変位は e_i の代りに e_0 とおけばよい。

水平および垂直方向の直径の増加を D_x, D_y とおけば(17)より

$$\begin{aligned}
 D_x &= \left[\delta r' \right]_{\theta=0} = \frac{2\rho}{AE} \left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \sum' (K_1(n)\alpha_n + K_{20}(n)\beta_n + K_4(n)\gamma_n) \right\}, \\
 D_y &= 2 \left[\delta r' \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\rho}{AE} \left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \sum' (-1)^{\frac{n}{2}} (K_1(n)\alpha_n + K_{20}(n)\beta_n + K_4(n)\gamma_n) \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

6. 薄肉円環の公式

薄肉円環 (半径方向の厚さ $2h$ が半径 ρ に比べて非常に小さい場合) は近似的に次のようにおくことができる。

$$\kappa = \frac{I}{A\rho^2}, \quad \frac{1}{\kappa} \gg \frac{1}{1+\kappa}, \quad \frac{\kappa}{1+\kappa}, \quad \kappa, \quad 1, \quad \zeta, \quad e_0 = e_i = 1. \tag{20}$$

(a) 断面力……(10)より

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 + (\beta_1 - \gamma_1) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta) \cos n\theta, \\ V &= \gamma_1 \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta, \\ M &= \rho \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \beta_n - \frac{1}{n} \gamma_n \right\} \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(b) 変位……(17)(18)より

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{r'} &= \frac{\rho^3}{EI} \left[\alpha_0 + \left\{ \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_1(n) \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} L_1(n) \cos n\theta \right], \\ \delta_{\theta'} &= \frac{\rho^3}{EI} \left[-\left\{ \alpha_0 - \beta_1 + \gamma_1 + \sum_{n=2}^{\infty} L_1(n) \right\} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} L_2(n) \sin n\theta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} L_1(n) &= \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \beta_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \gamma_n, \\ L_2(n) &= \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n^2(n^2 - 1)^2} \beta_n + \frac{1}{n^2} \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(c) 水平・垂直直径の増加……(19)より

$$D_x = \frac{2\rho}{AE} \alpha_0 + \frac{2\rho^3}{EI} \sum' L_1(n), \quad D_y = \frac{2\rho}{AE} \alpha_0 + \frac{2\rho^3}{EI} \sum' (-1)^{\frac{n}{2}} L_1(n). \quad (24)$$

7. 外力が二軸対称の場合

外力, モーメントが x , y 軸に関して対称な場合は, 断面力・変位等は一層簡単な形に書き直すことができる。外周にそうて作用する外力, モーメントは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \alpha_0 + \sum' \alpha_n \cos n\theta, \quad p_\theta = \sum' \beta_n \sin n\theta \\ m &= \rho \sum' \gamma_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

($\alpha_1 = \beta_1 = 0$ であるから外力の釣合は当然満足されている)

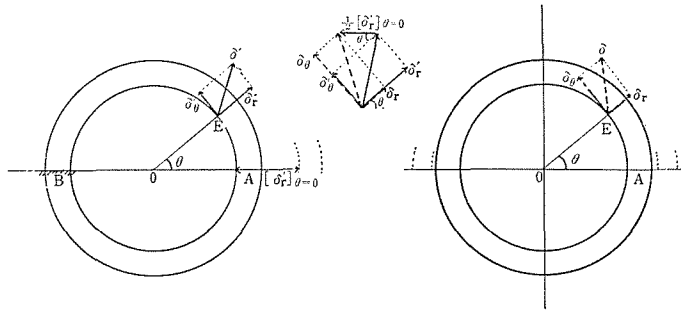
7.1 厚肉円環の場合

(a) 断面力……(10)より

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 - \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \cos n\theta, & V &= \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta, \\ M &= \rho \left[-\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum' \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n - \frac{1}{n} \gamma_n \right\} \cos n\theta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(b) 変位

(17)において $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, $\sum_{n=2}^{\infty}$ の代りに \sum' とおけば断面Bを固定したときの変位 ($\delta r'$, $\delta \theta'$) が求まるが, この場合, 変形も二軸対称であるから, 原点を固定した場合の変位 (δr , $\delta \theta$) の方が分り易くしかも簡単な形になる. 変換式は第3図より明かなように



第3図 変位の変換

$$\delta r = \delta r' - \frac{1}{2} \left[\delta r' \right]_{\theta=0} \cos \theta, \quad \delta \theta = \delta \theta' + \frac{1}{2} \left[\delta r' \right]_{\theta=0} \sin \theta. \quad (27)$$

結局, 原点固定の場合の内周上の点 (R_i , θ) の変位は

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{\rho}{AE} \left[\frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum' \left\{ K_1(n) \alpha_n + K_{20}(n) \beta_n + K_4(n) \gamma_n \right\} \cos n\theta \right], \\ \delta \theta &= \frac{\rho}{AE} \sum' \left\{ K_{2i}(n) \alpha_n + K_3(n) \beta_n + K_5(n) \gamma_n \right\} \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また水平・垂直直径の増加は

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{2\rho}{AE} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum' \left(K_1(n) \alpha_n + K_{20}(n) \beta_n + K_4(n) \gamma_n \right) \right\}, \\ D_y &= \frac{2\rho}{AE} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum' (-1)^{\frac{n}{2}} (K_1(n) \alpha_n + K_{20}(n) \beta_n + K_4(n) \gamma_n) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに $K_1(n), \dots, K_5(n)$ は (18) で与えられる。

7.2 薄肉円環の場合

(a) 断面力

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 - \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \cos n\theta, & V &= \sum' \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta, \\ M &= \rho \sum' \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \beta_n - \frac{1}{n} \gamma_n \right\} \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(b) 変位, 水平・垂直直径の増加

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \frac{\rho^3}{EI} \sum' \left\{ \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \beta_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \gamma_n \right\} \cos n\theta, \\ \delta_\theta &= -\frac{\rho^3}{EI} \sum' \left\{ \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n^2(n^2 - 1)^2} \beta_n + \frac{1}{n^2} \gamma_n \right\} \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{2\rho}{AE} \alpha_0 + \frac{\rho^3}{EI} \sum' \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \beta_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \gamma_n, \\ D_y &= \frac{2\rho}{AE} \alpha_0 + \frac{2\rho^3}{EI} \sum' (-1)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \alpha_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} \beta_n - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \gamma_n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

8. 計 算 例

以上の結果を若干の例題に適用してみよう。外力をフーリエ級数 (1) (25) で与えたため断面力・変位等もフーリエ級数で得られたのであるが、これを既知の関数に書直すには頻度の多い $\sin\theta, \cos\theta, \theta\cos\theta$ 等のフーリエ級数を必要な変域で展開した公式を利用するが、⁽⁶⁾ 一般に変位は断面力に比べて複雑でこれを既知関数に書き直すのも面倒である、幸い変位式は収束性がよいので数値計算にはそのままの方が都合のよいこともある。以下の諸例では外荷重のフーリエ係数の計算、計算式の誘導および公式の引用はすべて省略した。簡単のため次のカッコ記号を用いる。

- (a) 外荷重のフーリエ係数, (b) 断面力 (c) 変位 (内周の変位).
(d) 水平・垂直直径の増加

8.1 m個の等しい法線集中荷重 (第4図)

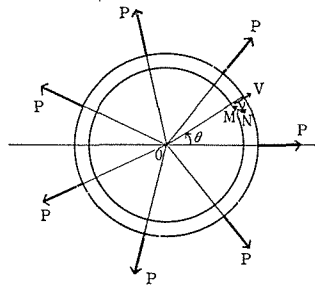
$$(a) \quad \alpha_0 = \frac{mP}{2\pi}, \quad \alpha_{im} = \frac{mP}{\pi} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad \beta_n = \gamma_n = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad N &= \frac{P}{\pi} m \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 m^2 - 1} \cos im \theta \right\} \\
 &= \frac{P}{2} \left(\sin \theta + \cot \frac{\pi}{m} \cos \theta \right), \\
 V &= \frac{P}{\pi} m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{im}{i^2 m^2 - 1} \sin im \theta \\
 &= \frac{P}{2} \left(\cos \theta - \cot \frac{\pi}{m} \sin \theta \right), \\
 M &= \frac{\rho P}{\pi} m \left\{ -\frac{\kappa}{2(1+\kappa)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 m^2 - 1} \cos im \theta \right\} \\
 &= \frac{\rho P}{2} \left\{ \frac{m}{\pi(1+\kappa)} - \left(\sin \theta + \cot \frac{\pi}{m} \cos \theta \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

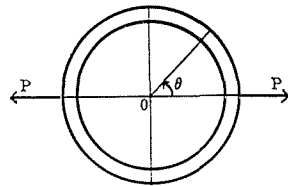
(c) m が奇数のときは (17) (22), 偶数のときは (28) (31)を用いる。例えば m 偶数薄肉の場合は (31) より

$$\delta_r = \frac{\rho^3}{EI} \frac{P}{\pi} m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i^2 m^2 - 1)^2} \cos im \theta, \quad \delta_\theta = -\frac{\rho^3}{EI} \frac{P}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i^2 m^2 - 1)^2} \sin im \theta. \tag{34}$$

$m \rightarrow \infty$, 2 のとき法線等分布荷重, 一对の集中荷重の場合になる。



第4図 法線集中荷重 ($m=7$)



第5図 一对の集中荷重

8.1.1 法線等分布荷重

外周にそって w (kg/mm) の一様な法線等分布荷重が作用した場合

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad &\alpha_0 = R_0 w, \quad \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0 \\
 \text{(b)} \quad &N = R_0 w, \quad V = 0, \quad M = -\frac{\kappa}{1+\kappa} \rho R_0 w. \\
 \text{(c)} \quad &\delta_r = \frac{\rho}{AE} \frac{1}{1+\kappa} R_0 w, \quad \delta_\theta = 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

8.1.2 一對の集中荷重 (第5図)

$$(a) \quad \alpha_0 = \frac{P}{\pi}, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \frac{2P}{\pi}, \quad \beta_n = \gamma_n = 0.$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} N &= \frac{P}{2} \sin \theta, \quad V = \frac{P}{2} \cos \theta, \\ M &= \rho P \left\{ \frac{1}{\pi(1+\kappa)} - \frac{1}{2} \sin \theta \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(c) (外周上の点の変位)

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\delta}{AE} \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{1}{1+\kappa} + 2 \sum' \left(\frac{1}{\kappa(n^2-1)^2} + \frac{\zeta n^2}{(n^2-1)^2} \right) \cos n\theta \right\} \\ &= \frac{\rho P}{AE} \left\{ -\frac{1}{\pi\kappa(1+\kappa)} + \frac{1}{4\kappa} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{4} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \theta \cos \theta - \sin \theta \right) \right\}, \\ \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE} \frac{2P}{\pi} \sum' \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e_0}{n(n^2-1)} - \frac{n}{(n^2-1)^2} \right) - \frac{\zeta n}{(n^2-1)^2} \right\} \sin n\theta \\ &= \frac{\rho P}{AE} \left[\frac{1}{4\kappa} \left\{ 2e_0 \left(-1 + \frac{2}{\pi} \theta + \cos \theta \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta \right\} - \frac{\zeta}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

註. 中心線上および内周上の点の変位は上式の e_0 の代りに 1, e_i を代入すればよい。

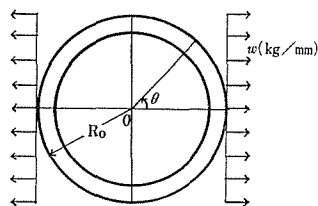
$$(d) \quad \left. \begin{aligned} D_x &= 2 \left(\delta_r \right)_{\theta=0} = \frac{\rho P}{AE} \left\{ -\frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa)} + \frac{\pi}{4\kappa} + \zeta \frac{\pi}{4} \right\}, \\ D_y &= 2 \left(\delta_r \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho P}{AE} \left\{ -\frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa)} + \frac{1}{2\kappa} - \zeta \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

8.2 横方向一様荷重 (第6図)

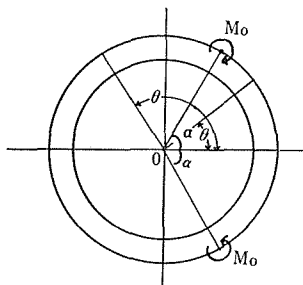
$$(a) \quad \alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{2} R_0 w, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} R_0 w, \quad \text{他は} 0.$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 - \frac{1}{3} (\alpha_2 - 2\beta_2) \cos 2\theta = R_0 w \sin^2 \theta, \\ V &= \frac{1}{3} (2\alpha_2 - \beta_2) \sin 2\theta = R_0 w \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 M &= \rho \left\{ -\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0 + \left\{ \frac{1}{3} \alpha_2 + \left(\frac{e_0}{2} - \frac{2}{3} \right) \beta_2 \right\} \cos 2\theta \right\} \\
 &= \left\{ -\frac{\kappa}{2(1+\kappa)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{e_0}{4} \right) \cos 2\theta \right\} \rho R_0 w. \\
 \text{(c)} \quad \delta_r &= \frac{\rho}{2AE} R_0 w \left\{ \frac{1}{1+\kappa} + \left(\frac{2-e_0}{6\kappa} + \frac{2\zeta}{3} \right) \cos 2\theta \right\}, \\
 \delta_\theta &= -\frac{\rho}{2AE} R_0 w \left\{ \frac{3e_0^2 - 8e_0 - 2e_i + 8}{12\kappa} + \frac{e_0 e_i}{4} + \frac{\zeta}{3} \right\} \sin 2\theta.
 \end{aligned}$$



第6図 横方向一様荷重



第7図 一對のモーメント荷重

8.3 一對のモーメント荷重 (第7図)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \gamma_n &= \frac{M_0}{\rho} \frac{2}{\pi} \sin n\alpha, \quad \alpha_n = \beta_n = 0 \\
 \text{(b)} \quad N &= -\frac{1}{1+\kappa_\zeta} \frac{M_0}{\rho} \frac{2}{\pi} \sin \alpha \cos \theta, \quad V = \frac{1}{1+\kappa_\zeta} \frac{M_0}{\rho} \frac{2}{\pi} \sin \alpha \sin \theta, \\
 M &= \rho \left\{ \frac{1}{1+\kappa_\zeta} \frac{M_0}{\rho} \frac{2}{\pi} \sin \alpha \cos \theta - \frac{M_0}{\rho} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\alpha \cos n\theta \right\} \\
 &= \frac{M_0}{\pi} \left[\frac{2}{1+\kappa_\zeta} \sin \alpha \cos \theta + \left\{ \begin{matrix} \alpha - \pi \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right] \quad \left. \begin{matrix} (\theta < \alpha) \\ (\theta > \alpha) \end{matrix} \right\} \quad (41) \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\alpha \cos n\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin n(\alpha + \theta) \pm \begin{cases} \sin n(\alpha - \theta) \\ \sin n(\theta - \alpha) \end{cases} \right) = \begin{cases} 2(\pi - \alpha) & (\theta < \alpha) \\ -2\alpha & (\theta > \alpha). \end{cases}
 \end{aligned}$$

(c) (薄肉の場合) …(22)より, { }の上式は $\theta < \alpha$, 下式は $\theta > \alpha$ に対し用いる。

$$\begin{aligned}
 \delta_r' &= -\frac{M_0 \rho^2}{EI} \left[\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} \cos \theta + \frac{\theta}{\pi} \sin \alpha \sin \theta + \left\{ \begin{matrix} \cos \alpha \cos \theta - 1 \\ -\sin \alpha \sin \theta \end{matrix} \right\} \right], \\
 \delta_\theta' &= -\frac{M_0 \rho^2}{EI} \frac{1}{\pi} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right) \sin \theta + \frac{1}{\pi} \alpha \theta - \left\{ \frac{\theta}{\alpha} \right\}.
 \end{aligned} \quad (42)$$

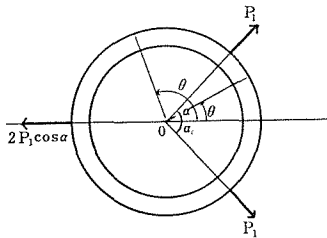
$$\begin{aligned}
 (d) \quad D_x &= \left[\delta_{r'} \right]_{\theta=0} = - \frac{M_0 \rho^2}{EI} \left(\frac{2}{\pi} \alpha + \cos \alpha - 1 \right), \\
 D_y &= 2 \left[\delta_{r'} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = - \frac{M_0 \rho^2}{EI} \left(\frac{2}{\pi} \alpha - \sin \alpha \right).
 \end{aligned} \quad (43)$$

8.4 その他

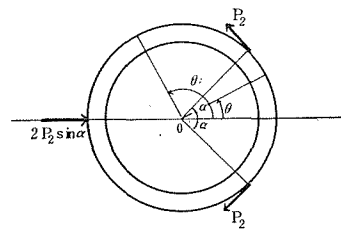
[1] 第8図, [2] 第9図の荷重に対する結果を示す。{ } の上式は $\theta < \alpha$, 下式は $\theta > \alpha$ なる θ に対して適用する。(c)変位は省略した。

[1] (第8図)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \alpha_0 &= \frac{P_1}{\pi} (1 + \cos \alpha), \quad \alpha_n = \frac{2P_1}{\pi} \left\{ (-1)^n \cos \alpha + \cos n\alpha \right\}, \quad \beta_n = \gamma_n = 0. \\
 (b) \quad N &= \frac{P_1}{\pi} \left[-\alpha \sin \alpha \cos \theta + \begin{cases} \pi \sin \alpha \cos \theta \\ \pi \cos \alpha \sin \theta \end{cases} \right], \\
 V &= \frac{P_1}{\pi} \left[\alpha \sin \alpha \sin \theta + \begin{cases} -\pi \sin \alpha \sin \theta \\ \pi \cos \alpha \cos \theta \end{cases} \right], \\
 M &= \frac{\rho P_1}{\pi} \left[\frac{1}{1 + \kappa} (1 + \cos \alpha) + \alpha \sin \alpha \cos \theta - \begin{cases} \pi \sin \alpha \cos \theta \\ \pi \cos \alpha \sin \theta \end{cases} \right]. \\
 (d) \quad D_x &= \frac{\rho P_1}{AE} \left[-\frac{2}{\pi \kappa (1 + \kappa)} (1 + \cos \alpha) + \frac{1}{2\kappa} (\pi \cos \alpha + \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta}{2} (\pi \cos \alpha - \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \right], \\
 D_y &= \frac{\rho P_1}{AE} \left[-\frac{2}{\pi \kappa (1 + \kappa)} (1 + \cos \alpha) + \frac{1}{\kappa} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha \right) \right. \\
 &\quad \left. - \zeta \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha \right) \right].
 \end{aligned} \quad (44)$$



第8図 三方向集中荷重〔1〕



第9図 三方向集中荷重〔2〕

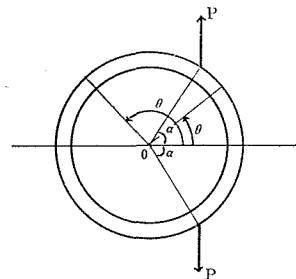
[2] (第9図)

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \alpha_0 = -\frac{P_2}{\pi} \sin \alpha, \quad \alpha_n = \frac{2P_2}{\pi} (-1)^{n+1} \sin \alpha, \quad \beta_n = \frac{2P_2}{\pi} \sin n\alpha. \\
 \text{(b)} \quad & N = \frac{P_2}{\pi} \left[(K \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \cos \theta + \left\{ \begin{array}{l} \pi \cos \alpha \cos \theta \\ -\pi \sin \alpha \sin \theta \end{array} \right\} \right], \\
 & V = -\frac{P_2}{\pi} \left[(K \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \sin \theta + \left\{ \begin{array}{l} \pi \cos \alpha \sin \theta \\ \pi \sin \alpha \cos \theta \end{array} \right\} \right], \\
 & M = \frac{\rho P_2}{\pi} \left[-\frac{1}{1+\kappa} \sin \alpha + (-K \sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \cos \theta - e_0 \alpha \right. \\
 & \quad \left. + \left\{ \begin{array}{l} \pi(e_0 - \cos \alpha \cos \theta) \\ \pi \sin \alpha \cos \theta \end{array} \right\} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ここに $K = (2e_0 - 1 + \kappa \zeta) / (1 + \kappa \zeta)$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & D_x = \frac{\rho P_2}{AE} \left[\frac{2}{\pi \kappa (1 + \kappa)} \sin \alpha + \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \pi) \sin \alpha + e_0 \left(-1 + \frac{2}{\pi} \alpha + \cos \alpha \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\zeta}{2} (\alpha - \pi) \sin \alpha \right], \\
 & D_y = \frac{\rho P_2}{AE} \left[\frac{2}{\pi \kappa (1 + \kappa)} \sin \alpha + \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + e_0 \left(\frac{2}{\pi} \alpha - \sin \alpha \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\zeta}{2} (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

[1] [2] を適当に組合せることによって一軸対称の任意の外力系に適用できることは非常に興味深いことである。例えば [1] に $\alpha = 0$ 、 $P_1 = P/2$ とおけば一対の集中荷重 (第5図)、 α について $0 \sim \pi$ まで積分すれば法線等分布荷重となる。また [1] に $P_1 = P \sin \alpha$ 、[2] に $P_2 = P \cos \alpha$ とおいて加えるときは第10図の解となる。すなわち



第10図 一対の偏り集中荷重

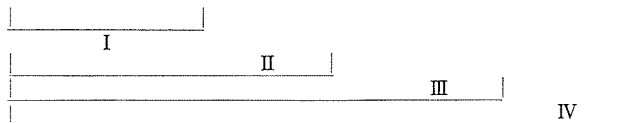
$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad N &= \frac{P}{\pi} \left[K \sin \alpha \cos \alpha - \alpha + \left\{ \frac{\pi}{0} \right\} \right] \cos \theta, \\
 V &= -\frac{P}{\pi} \left[K \sin \alpha \cos \alpha - \alpha + \left\{ \frac{\pi}{0} \right\} \right] \sin \theta, \\
 M &= \frac{\rho P}{\pi} \left[\frac{1}{1+\kappa} \sin \alpha + \left\{ \frac{\pi e_0 \cos \alpha}{0} \right\} - (K \sin \alpha \cos \alpha \right. \\
 &\quad \left. + (e_0 - 1) \alpha + \left\{ \frac{\pi}{0} \right\}) \cos \theta \right].
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad D_x &= \frac{\rho P}{AE} \left[-\frac{2}{\pi \kappa (1+\kappa)} \sin \alpha + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2\kappa} \left(\sin^2 \alpha + 2e_0 \cos^2 \alpha - 2e_0 \cos \alpha + \frac{4}{\pi} e_0 \alpha \cos \alpha \right) - \frac{\zeta}{2} \sin^2 \alpha \right], \\
 D_y &= \frac{\rho P}{AE} \left[-\frac{2}{\pi \kappa (1+\kappa)} \sin \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\kappa} \left(\alpha - (2e_0 - 1) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{4}{\pi} e_0 \alpha \cos \alpha \right) + \frac{\zeta}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right].
 \end{aligned} \tag{49}$$

9. 断面力・変位に及ぼす ひずみエネルギーの項について

本論で断面力・変位を求めるために用いた ひずみエネルギー式は(7)であった。普通第1項もしくは第1・2項のみを用い第3・4項を省略するのが普通である。厚肉円環の場合、また外力の種類によっては無視することができないので、この点について検討してみた。簡単のため次の記号を用いる。

$$U = \frac{2}{AE} \left[\frac{1+\kappa}{2\kappa\rho} \int_0^\pi M^2 d\varphi + \frac{\rho}{2} \int_0^\pi N^2 d\varphi + \int_0^\pi MN d\varphi + \frac{\zeta\rho}{2} \int_0^\pi V^2 d\varphi \right]. \tag{7}$$



- すなわち
- I …… 曲げエネルギーのみを考えた場合
 - II …… 曲げ・軸力のエネルギーを考えた場合
 - III …… 曲げ・軸力および連成項を考えた場合
 - IV …… さらにせん断エネルギーを加えた場合

9.1 断面力・変位

ひずみエネルギー I~IVの各々に対する断面力・変位を求め、その差異を比較するわけであるが、特に次の二例について計算結果をかかげて検討することにする。

(イ) 外力が一軸対称の場合 (外周荷重)

任意断面の断面力は $\theta = 0$ における $N_0 \cdot M_0$ によって(3)式を用い計算されるものであるから、 $N_0 \cdot M_0$ の差異が問題である。各エネルギーに対するその値は

表-1

	N_0	M_0/ρ
I	$\alpha_0 + e_0\beta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n$	$\sum_{n=2}^{\infty} B_n$
II	$\alpha_0 + \frac{1+\kappa}{1+2\kappa} e_0\beta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n$	$\frac{\kappa}{1+2\kappa} e_0\beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n$
III	$\alpha_0 + e_0\beta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n$	$-\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n$
IV	$\alpha_0 + \frac{e_0 + \kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} \beta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n$	$-\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0 + \frac{(e_0 - 1)\kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} \beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n$

ここに $A_n = \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n)$, $B_n = \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1}\right) \beta_n$.

一般に κ は 1 に比べて非常に小さく、かつ $e_0 \approx 1$ と考えられる場合 N_0 は殆んど相等しく、 M_0 は I・II および III・IV ではわずかに $-\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0$ のみ異なることが分る。変位 (δ_r' , δ_θ') は複雑になるので省略した。

(ロ) 外力が二軸対称の場合 (外周荷重・外周変位)

表-2

	N_0	M_0/ρ	$\delta_r / \frac{\rho}{AE}$	$\delta_\theta / \frac{\rho}{AE}$
I	$\alpha_0 - \sum' A_n$	$\sum' B_n$	$\frac{1+\kappa}{\kappa} \sum' \frac{1}{n^2 - 1} B_n \cos n\theta$	$\frac{1+\kappa}{\kappa} \sum' \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1}\right) B_n \sin n\theta$
II			(上式) $+ \alpha_0 + \sum' \frac{1}{n^2 - 1} A_n \cos n\theta$	(上式) $- \sum' \frac{1}{n^2 - 1} A_n \sin n\theta$
III		$-\frac{\kappa}{1+\kappa} \alpha_0$	$\frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \frac{1}{\kappa} \sum' \frac{1}{n^2 - 1} B_n \cos n\theta$	$\frac{1}{\kappa} \sum' \left\{ \left(\frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1}\right) B_n + \frac{\kappa e_0^2}{n^2} \beta_n \right\} \sin n\theta$
IV		$+\sum' B_n$	(上式) $+ \zeta \sum' \frac{n}{(n^2 - 1)^2} (n\alpha_n - \beta_n) \cos n\theta$	(上式) $- \zeta \sum' \frac{1}{(n^2 - 1)^2} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta$

上表より軸力は I~IV に対し同一になるが、曲げモーメントは、外力が α_0 のみ圧倒

的に大きい場合（法線等分布荷重に近い）はⅢ・Ⅳをとらなければならない。換言すれば外力が上述以外の時は断面力の算出にⅠのみ，すなわけ曲げエネルギーのみで充分であることが分る。このことは円環に貯えられるひずみエネルギーは曲げモーメントによるものが大部分であることを示している。

変形に関しては，上の表から簡単に結論を導くことは困難であるため，次項に具体的な例について計算し，その傾向をしらべることにする。

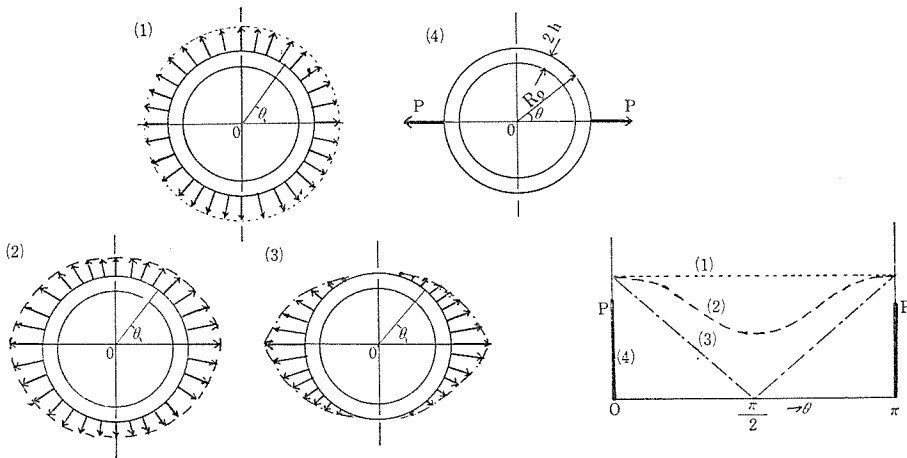
9.2 計算例

円環に貯えられるひずみエネルギーの配分ならびに変位（直径の変化）えの影響を知るために具体的に次のような試験片の形状，荷重の種類について計算した。

試験片の形状（鋼製円環，二種(a)(b)の長方形断面）

外半径 (R_0) 80mm 軸方向厚さ 10mm
 半径方向厚さ ($2h$) 10mm (a) 20mm (b)
 縦弾性係数 (E) 2.1×10^4 kg/mm²
 断面係数 (κ) 0.0014855 (a) 0.0068872 (b)

荷重の種類（次の4種類(1)~(4)の法線荷重について）



第11図 4種の法線荷重(1)~(4)

(イ) ひずみエネルギーの配分

各荷重に対する断面力を(26)より求め，(7)の各項を計算した。その配分は次表に示す。

表-3 (%)

ひずみエネルギーの区分	(1) 法線等分布荷重		(2) 余弦荷重		(3) 三角形法線荷重		(4) 集中荷重	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
曲げ	0.15	0.69	79.29	45.79	94.15	77.86	95.85	83.41
軸力	100.15	100.69	19.17	50.67	3.97	15.10	1.50	6.02
曲げと軸力の連成	-0.30	-1.38	-0.29	-1.31	-0.29	-1.26	-0.27	-1.17
せんだん	0	0	1.83	4.85	2.17	8.30	2.92	11.74

上表より、荷重が法線等分布荷重(1)より偏るにつれて曲げエネルギーは圧倒的に大きくなり、肉厚(2h)が大きくなるに従って軸力・せん断のエネルギーが大となること
 が分る。曲げと軸力の連成エネルギーは負で他に比べて小さいので初めから除外して差
 支えない。しかし本論文のように一般荷重(1),(2)で扱う場合にはかえって解が簡単な
 形で求められる利点がある。

(r) ひずみエネルギーによる、 $N_0 \cdot M_0 \cdot$ 変位(特に直径の変化)えの影響

上記試験片(a)(b)、4種荷重(1)~(4)について表-2より $N_0 \cdot M_0 \cdot$ 直径の変化を、ま
 た比較のため外力はx方向合力を100kgとしたときの N_0 (kg) M_0 (kg, mm) $D_x \cdot D_y$
 (mm)を表に示した(煩雑になるので(2)の場合を省略し、代りに(4)の場合を詳述した。)

(1) 法線等分布荷重

表-4

	(a)			(b)		
	N_0	M_0	$D_x = D_y$	N_0	M_0	$D_x = D_y$
I	50	0	0	50	0	0
II			0.00357			0.00167
III		5.56	0.00356		23.94	0.00166
IV						
(弾)	50		(0.00346)	(50)		(0.00158)

最下らんの(弾)は弾性論による厳密解による値である。

(3) 三角形法線荷重 $\left\{ \alpha_0 = \frac{1}{2} R_0 w. \alpha_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left\{ 1 - (-1)^{\frac{n}{2}} \right\} R_0 w. \beta_n = 0 \right\}$

表-5

	(a)				(b)			
	N_0	M_0	D_x	D_y	N_0	M_0	D_x	D_y
(薄肉)	28.54	804.74	.0853	-.0853	28.54	751.08	.0087	-.0087
I			.0852	-.0852			.0086	-.0086
II			.0868	-.0839			.0093	-.0080
III			.0865	-.0837			.0092	-.0079
IV		.0885	-.0857	.0101		-.0088		
		804.68				750.82		

(4) 集中荷重

表-6

	N_0	N	V	M_0	M	$D_x/\frac{\rho P}{AE}$	$D_y/\frac{\rho P}{AE}$
(薄肉)						$\left[\frac{P\rho^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)\right]$	$\left[\frac{P\rho^3}{EI}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\right)\right]$
I				$\frac{1}{\pi}\rho P$	$\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\rho P$	$\frac{1+\kappa}{\kappa}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{1+\kappa}{\kappa}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\right)$
II	0	$\frac{P}{2}\sin\theta$	$\frac{P}{2}\cos\theta$			$\frac{1+\kappa}{\kappa}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{\pi}{4}$	$\frac{1+\kappa}{\kappa}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{2}$
III				$\frac{1}{\pi(1+\kappa)}P\rho$	$\left(\frac{1}{\pi(1+\kappa)}-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\rho P$	$-\frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa)}+\frac{\pi}{4\kappa}$	$-\frac{2}{\pi\kappa(1+\pi)}+\frac{1}{2\kappa}$
IV						$-\frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa)}+\frac{\pi}{4\kappa}$ $+\zeta\frac{\pi}{4}$	$-\frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa)}+\frac{1}{2\kappa}$ $-\zeta\frac{1}{2}$

	(a)				(b)			
	N_0	M_0	D_x	D_y	N_0	M_0	D_x	D_y
(薄肉)			.3586	-.3294			.0364	-.0334
I		2387.4	.3582	-.3290		2228.2	.0360	-.0332
II	0		.3610	-.3272	0		.0374	-.0322
III		2383.8	.3600	-.3262		2213.2	.0370	-.0320
IV			.3710	-.3332			.0422	-.0352

表4~6の結果を比較することにより、法線等分布荷重もしくはそれに近い荷重以外ではIすなわち曲げエネルギーのみより計算して差支えないこと。変位については当然なことながらIVの方がIより大きく計算され、 D_x が D_y に比べその差は大きくなり、厚肉になる程((a)より(b)の方が)せん断の影響を無視することができないことが知れる。

10 む す び

以上の結果をまとめると

(1) 厚肉円環に一軸対称の外力・モーメントがフーリエ級数(1)で与えられた場合生ずる断面力・変位・直径の変化をそれぞれ(10)(17)(19)のフーリエ級数で与えることができた。

(2) 薄肉円環については上記の解に(20)のおきかえを行って求めることができた。

(第6項)

(3) 二軸対称荷重の場合は上の特別な場合としてさらに簡単な形で導かれた。

(第7項)

(4) 上記の結果を多数の例に適用し、フーリエ級数で与えられた断面力等を簡単なも

のは既知函数で表わした。(20)により薄肉の場合に書き直したものは既に発表されている解と一致することがたしかめられた。

(5) ひずみエネルギーのとり方による断面力・変位・直径の変化に及ぼす影響を二種の形状の試験片，4種の荷重に対して具体的数値例により示し，特別の場合を除いては曲げによるエネルギーが圧倒的に大きく，厚肉になる程せん断エネルギーが無視できなくなることを明らかにした。

本理論は曲りはりの仮定をもとにした計算であるため厚肉になる程仮定の矛盾が表われて誤差が著しくなることは否定できない。弾性論による円輪の厳密解は計算が大変面倒なため資料は充分でないようである，従って曲りはりとしての厚肉円環と弾性論による円輪との比較およびその適用範囲について，さらに深い検討が必要と思われるのである。なお上記計算に対する実験の裏付けも又非常に重要なことであるが後日を期することにした。

終りに本計算に当って終始御熱心に討論され激励された本学工学部宮入武夫教授に深く感謝の意を表します。

文 献

- (1) R. J. Roark, "Formulas for Stress and Strain". 3rd ed. P. 156. 1954.
- (2) J. Pippard. "Studies in Elastic Structures." 1st ed. 1952
- (3) C. E. Larard, "The Elastic Ring acted upon by Equal Radial Forces." Phil. Mag. S. 7. Vol. 12. No. 75. July 1931.
C. E. Larard, "The Elastic Ring. A Comparison of Strains Determined Experimentally with the Strains Calculated from the Elastic Ring Theory." Phil. Mag. Vol. 12. No. 81. Dec. 1931.
- (4) 例えば
倉西正嗣 "一般構造力学" 応用学力講座 共立出版 PP. 53-56. 1958.
- (5) チモシェンコ著 "材料力学" 上巻 東京図書. P. 371. 1961.
鵜戸口・国尾訳
- (6) 森口・宇田川・一松. "数学公式Ⅱ" 岩波全書 1962.
- (7) S. Timoshenko and J. N. Goodier. "Theory of Elasticity." 2nd ed. P. 121. 1951.

Summary

Strength Calculation of a Circular Ring.

(As a curved beam under the action of a uni-symmetrical load)

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

This report presents the calculations of the sectional forces and the displacements of a thick circular ring under the action of a general symmetrical load about an axis.

In this calculations, we expressed the load by the Fourier's series and used the Castigliano's theorem in which the strain energy consists of the bending moment, axial force and shearing force. Applications to the thin circular ring and double-symmetrical load, in particular cases, are discussed and applied some examples.

The effect of the individual factors of the expressions of strained energy on the sectional forces and the displacements were discussed with numerical examples.