

# 縁材のある円板の強度(第1報)

佐々木三郎\*

(昭和39年12月23日受理)

## 1. はしがき

円板の周辺に一定断面の縁材が補強されている構造物の外周に、一軸対称面内荷重が作用した場合、円板および縁材に生ずる応力分布・断面力を計算したものである。

縁材が任意の形状(中央面に対称な)を持つ場合に之を3次元弾性論で解くことは非常に困難が予想され、近似的に等価な弾性率を持つ円環と考へて2次元的に取り扱うのが通例であるが、特別な荷重(例えば法線等分布荷重など)を除いては矢張相当煩しい計算が想像される。半径方向の厚さがそれほど大きくない縁材については、むしろ曲りはりと考へた方が近似的ではあるが有効と考へられ、本報告はこの方針のもとに

縁材を曲りはりと考へ、円板には複素応力区数を使用して変位・応力を求め接合部における変位の連続条件を用いて応力を定める係数を求めたものである。

計算例として、長方形断面の縁材をもつ円板に二軸対称荷重が作用した特別の場合について

- (1) 縁材の形状による円板の応力への影響を、法線等分布および横方向一様荷重について、
- (2) 各種の荷重様式による円板の  $x$ ,  $y$  軸上の応力分布の変化、特に
- (3) 一對の集中荷重について、円板内の応力分布、縁材の断面力・応力等を計算し、実験と比較したものである。

## 2. 縁材の断面力および接合部の変位\*\* (1)

外周に沿う一軸対称外力の法線・接線成分を次のフーリエ級数で与える。

$$p_r = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta, \quad (kg.) \quad p_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta. \quad (kg.) \quad (1)$$

$$x \text{ 軸方向の外力のつりあいより次の関係がある。} \quad \alpha_1 = \beta_1. \quad (2)$$

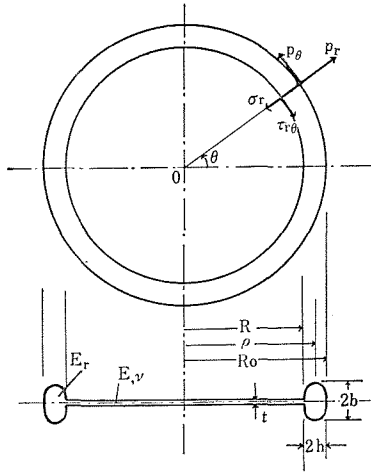
接合部に生ずる(円板が縁材に及ぼす)応力は次のように表わすことができる。

\* 機械工学教室、講師

\*\* 本論文において使用する記号および断面力(5)変位(6)は同著者による“円環の強度”本紀要 No.18. pp53-74. 1965. を参照されたい。

$$\sigma_r = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad (\text{kg/mm}^2) \quad \tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta. \quad (\text{kg/mm}^2) \quad (3)$$

$$(2) \text{ と同様に} \quad a_1 = b_1. \quad (4)$$



第1図 縁材のある円板

(1) (3) による縁材の断面力は

$$\left. \begin{aligned} \text{軸力: } N &= \left\{ \alpha_0 + \frac{e_0 + \kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} \beta_1 \cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n\beta_n) \cos n\theta \right\} \\ &\quad - Rt \left\{ a_0 + \frac{e_i + \kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} b_1 \cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (a_n - nb_n) \cos n\theta \right\}, \\ \text{せん断力: } V &= \left\{ -\frac{e_0 - 1}{1 + \kappa\zeta} \beta_1 \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta \right\} \\ &\quad - Rt \left\{ -\frac{e_i - 1}{1 + \kappa\zeta} b_1 \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (na_n - b_n) \sin n\theta \right\}, \\ \text{曲げモーメント, } M &= \rho \left\{ \left[ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{(e_0 - 1)\kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} \beta_1 \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \beta_n \right) \cos n\theta \right] - Rt \left[ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} a_0 + \frac{(e_i - 1)\kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} b_1 \cos\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} a_n + \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} b_n \right) \cos n\theta \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (5)$$

縁材の断面 ( $\theta = \pi$ ) を固定したときの接合部の変位 (半径方向  $\delta_{r'}$ , 接線方向  $\delta_{\theta'}$ ) は

$$\begin{aligned}
 \delta_{r'} &= \frac{\rho}{AE_r} \left\{ \left[ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} (H_1'(n) \alpha_n + H_{20}'(n) \beta_n) \right\} \cos \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (H_1'(n) \alpha_n + H_{20}'(n) \beta_n) \cos n\theta \right] \right. \\
 -Rt &\left\{ \frac{1}{1+\kappa} a_0 + \left\{ \frac{1}{1+\kappa} a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} (H_1'(n) a_n + H_{2i}'(n) b_n) \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (H_1'(n) a_n + H_{2i}'(n) b_n) \cos n\theta \right\} \right\}, \\
 \delta_{\theta'} &= \frac{\rho}{AE_r} \left\{ \left[ -\left\{ \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 + H'_{oi} \beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} (H_1'(n) \alpha_n + H_{20}'(n) \beta_n) \right\} \sin \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (H_{2i}'(n) \alpha_n + H_{30}'(n) \beta_n) \sin n\theta \right] \right. \\
 -Rt &\left\{ -\left\{ \frac{1}{1+\kappa} a_0 + H'_{ii} b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} (H_1'(n) a_n + H_{2i}'(n) b_n) \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (H_{2i}'(n) a_n + H'_{3i}(n) b_n) \sin n\theta \right\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

こゝに

$$\begin{aligned}
 H'_{oi} H'_{ii} &= -\frac{(e_0-1)(e_i-1)\zeta}{1+\kappa\zeta} - e_0 e_i, & -\frac{(e_i-1)^2 \zeta}{1+\kappa\zeta} - e_i^2, \\
 H_1'(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2-1)} + \frac{\zeta n^2}{n^2-1}, \\
 H_{20}'(n), H_{2i}'(n) &= \frac{1}{\kappa} \left( \frac{e_0, e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \frac{\zeta n}{n^2-1}, \\
 H_{30}'(n), H_{3i}'(n) &= \frac{n^2-1}{\kappa} \left( \frac{e_0, e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \left( \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \\
 &\quad + (e_0, e_i) e_i \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{\zeta}{n^2-1}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

3. 円板の応力, 変位<sup>(2)</sup>

一般に  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  を複素応力函数とすると極座標における応力・変位は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 2Re\left[\varphi'(z)\right] - \left\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\right\}e^{2i\theta}, \\ \sigma_\theta &= 2Re\left[\varphi'(z)\right] + Re\left\{\left(\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\right)e^{2i\theta}\right\}, \\ u_r - iu_\theta &= \frac{1}{E}\left\{(3-\nu)\overline{\varphi(z)} - (1+\nu)\left(\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\right)\right\}e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} (8)$$

$r = R$  の周辺 (接合部) において(3)を満足する  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{a_0}{2}z + \frac{a_1 + b_1 z^2}{4R} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n + b_n z^{n+1}}{2(n+1)R^n}, \\ \psi(z) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{na_n + (n-2)b_n}{2n(n-1)} \frac{z^n}{R^{n-2}}. \end{aligned} \right\} (9)$$

(9)を(8)に代入すると応力, 変位 ( $r=R$ における) は, (2)のもとに

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 + b_1 \Delta \cos \theta - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \overline{(n-2)\Delta^n - n\Delta^{n-2}} a_n \right. \\ &\quad \left. + (n-2)(\Delta^n - \Delta^{n-2}) b_n \right\} \cos n\theta, \\ \sigma_\theta &= a_0 + 3b_1 \Delta \cos \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \overline{(n+2)\Delta^n - n\Delta^{n-2}} a_n \right. \\ &\quad \left. + \overline{(n+2)\Delta^n - n-2\Delta^{n-2}} b_n \right\} \cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= b_1 \Delta \sin \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n(\Delta^n - \Delta^{n-2}) a_n \right. \\ &\quad \left. + (n\Delta^n - \overline{n-2\Delta^{n-2}}) b_n \right\} \sin n\theta. \quad \text{ただし } \Delta = \frac{r}{R} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{R}{E} \left[ (1-\nu)a_0 + \frac{1-3\nu}{2} b_1 \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \left\{ (2n-1+\nu)a_n + (n-2-n\nu)b_n \right\} \cos n\theta \right], \\ u_\theta &= \frac{R}{E} \left[ \frac{5+\nu}{2} b_1 \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \left\{ (n-2-n\nu)a_n + (2n-1+\nu)b_n \right\} \sin n\theta \right]. \end{aligned} \right\} (11)$$

点  $(R, \pi)$  を固定した場合の原点に関する変位を  $(u_r', u_\theta')$  とすれば  $(u_r, u_\theta)$  より  $(u_r', u_\theta')$  への変換式は

$$u_r' = u_r + (u_r)_{\theta=\pi} \cos \theta, \quad u_\theta' = u_\theta - (u_r)_{\theta=\pi} \sin \theta. \quad (12)$$

しかるに

$$(u_r)_{\theta=\pi} = \frac{R}{E} \left[ (1-\nu) a_0 - \frac{1-3\nu}{2} b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \left\{ (2n-1+\nu) a_n + (n-2-n\nu) b_n \right\} \right].$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} u_r' &= \frac{R}{E} \left[ (1-\nu) a_0 + \left\{ (1-\nu) a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \left\{ (2n-1+\nu) a_n + (n-2-n\nu) b_n \right\} \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \left\{ (2n-1+\nu) a_n + (n-2-n\nu) b_n \right\} \cos n\theta \right], \\ u_\theta' &= \frac{R}{E} \left[ - \left[ (1-\nu) a_0 - (3-\nu) b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \left\{ (2n-1+\nu) a_n + (n-2-n\nu) b_n \right\} \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \left\{ (n-2-n\nu) a_n + (2n-1+\nu) b_n \right\} \sin n\theta \right]. \end{aligned} \right\} (13)$$

#### 4. 連続の条件…… $a_0, a_1=b_1, a_n, b_n$ の決定

縁材のある円板においては接合部 ( $r=R$ ) でそれぞれの変位は等しくなければならない。すなわち

$$u_r' = \bar{\delta}_r', \quad u_\theta' = \bar{\delta}_\theta'. \quad (14)$$

(6) および (13) をそれぞれ等しくおく。すべての  $\theta$  の値に対して成立つためには

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{E} (1-\nu) a_0 &= \frac{\rho}{AE_r} \left( \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 - Rt \frac{1}{1+\kappa} a_0 \right), \\ \frac{R}{E} (3-\nu) b_1 &= \frac{\rho}{AE_r} \left( -H_{oi}' \beta_1 + Rt H_{ii}' b_1 \right), \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{R}{E} \left\{ (2n-1+\nu)a_n + (n-2-n\nu)b_n \right\} \\
 & \quad = \frac{\rho}{AE_r} \left\{ H_1'(n)\alpha_n + H_{20}'(n)\beta_n - Rt \left( H_1'(n)a_n + H_{2i}'(n)b_n \right) \right\}, \\
 & \frac{R}{E} \left\{ (n-2-n\nu)a_n + (2n-1+\nu)b_n \right\} \\
 & \quad = \frac{\rho}{AE_r} \left\{ H_{2i}'(n)\alpha_n + H_{30}'(n)\beta_n - Rt \left( H_{2i}'(n)a_n + H_{3i}'(n)b_n \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

(15)を解いて  $(H_1'(n), \dots)$ を簡単のために  $H_1', \dots$ とかく

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{1}{H_0(1+\kappa)} \alpha_0, & a_1 = b_1 &= \frac{1}{Rt} \frac{-H_{0i}'}{\xi(3-\nu) - H_{ii}'} \beta_1, \\
 a_n &= \frac{1}{Rt} \left\{ \frac{(H_1'H_3 - H_{2i}'H_2)\alpha_n + (H_{20}'H_3 - H_{30}'H_2)\beta_n}{H_1H_3 - H_2^2} \right\}, \\
 b_n &= \frac{1}{Rt} \left\{ \frac{(H_{2i}'H_1 - H_1'H_2)\alpha_n + (H_{30}'H_1 - H_{20}'H_2)\beta_n}{H_1H_3 - H_2^2} \right\}. \quad (n \geq 2)
 \end{aligned} \tag{16}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{A}{\rho t} \frac{E_r}{E}, & H_0 &= \xi(1-\nu) + \frac{1}{1+\kappa}, \\
 H_1(n) &= \xi(2n-1+\nu) + H_1'(n), & H_2(n) &= \xi(n-2-n\nu) + H_{2i}'(n), \\
 H_3(n) &= \xi(2n-1+\nu) + H_{3i}'(n). \\
 H_1'(n), \dots, H_{3i}'(n) & \text{は(7)で与えられる。}
 \end{aligned} \tag{17}$$

結局  $H_{0i}'$ ,  $H_{ii}'$ ,  $H_1'(n)$ ,  $\dots$ ,  $H_{3i}'(n)$  は縁材の形状, 材質のみにより計算され,  $H_0$ ,  $H_1(n)$ ,  $H_2(n)$ ,  $H_3(n)$  は縁材と円板の形状, 材質により計算される。外力が(1)によって与えられれば (10) より  $a_0$ ,  $b_1 (= a_1)$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  を定めこれらを (5) (10) (11) に代入して縁材の断面力, 円板の応力, 変位が計算されるのである。

外力が二軸対称の場合 は (1)~(17) において,  $n$  の奇数項は 0 となり偶数項についてのみ計算すればよいので相当簡単になる。次節以下では二軸対称の外力をうける若干の例題について計算した結果をかかげる。

5. 簡単な荷重の場合 (縁材の影響, 厳密解との比較)

円板の応力は荷重の種類, 縁材の形状・材質により影響をうけるのであるが, 本節では荷重のフーリエ係数が, 第1項もしくは第1・2項で表わされる簡単な場合について検討することにする。

5.1 法線等分布荷重 (第2図)

長方形断面をもつ縁材と円板の形状, 弾性係数の記号を第2図のようにとる。外周に作用する外力のフーリエ係数は

$$\alpha_0 = R_0 w, \quad \alpha_n = \beta_n = 0. \tag{18}$$

従って (16) より

$$a_0 = \frac{w}{t} a_0', \quad \text{ここに} \quad a_0' = \frac{R_0}{R} \frac{1}{1 + \xi(1 - \nu)(1 + \kappa)}. \tag{19}$$

円板の応力

$$\sigma_r = \sigma_\theta = a_0 = \frac{w}{t} a_0'. \tag{20}$$

$2h/\rho$  (または  $R/R_0$ ) を横軸に,  $b/t$  をパラメーターとした  $a_0'$  の値を第2図に示す。

比較のため縁材の中  $b$  を円板の厚さ  $t$  に圧縮し (等価係数  $E_r = Eb/t$ ) 2次元弾性論を適用した厳密解は (式の誘導は省略する)

$$a_0' = 2 / \left\{ \frac{b}{t} (1 - \nu)(1 - \lambda^2) + (1 + \nu) + (1 - \nu)\lambda^2 \right\}, \tag{21}$$

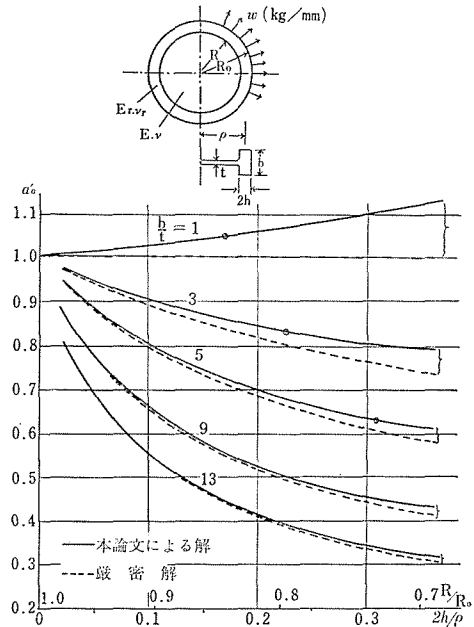
ここに  $\lambda = R/R_0$ .

上式の結果を破線で示す。二つの曲線を比較して次のことが知られる。

(1) 縁材を曲り梁と考えた本理論の値は常に厳密解より高い値を与える。

(2) 縁材の断面積が大きくなるに従い厳密解に接近する。

従って本理論は法線等分布荷重の場合  $b/t$  が小さい程, また  $2h/\rho$  が大なる程誤差が大きくなる欠点がある。これは曲りはりの仮定が示す一つの弱点であろう。しかしながら通常考えられる



第2図 円板の応力 (法線等分布荷重)

縁材の形状に対しては十分な精度を示していることは同図より知られる通りである。参考のために同図に5%誤差を生ずる点を記しておいた。(上述の厳密解は実際の形状を2次元におきかえたものであることを念頭におく必要がある)

### 5.2 横方向一様荷重 (第3図)

前例と同じように長方形断面をもつ縁材に図の如き  $x$  方向に一様な分布荷重  $w$  ( $kg/mm$ ) が作用した場合、円板の応力、縁材の断面力が縁材によってどのように変化するかを計算してみる。外力のフーリエ係数は

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{2} R_0 w, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} R_0 w, \quad (22)$$

(16)より接合部のフーリエ係数は

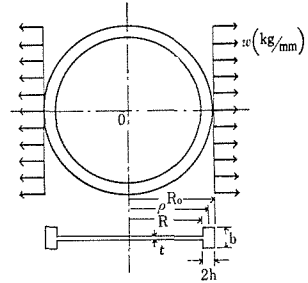
$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{w}{t} \left\{ \frac{1}{2\lambda H_0 (1 + \kappa)} \right\}, \\ a_2 &= \frac{w}{t} \left\{ \frac{H_3(H_1' - H_{20}') - H_2(H_{2i}' - H_{30}')}{2\lambda(H_1 H_3 - H_2^2)} \right\}, \\ b_2 &= \frac{w}{t} \left\{ \frac{H_1(H_{2i}' - H_{30}') - H_2(H_1' - H_{20}')}{2\lambda(H_1 H_3 - H_2^2)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに  $\lambda = R/R_0$ 。  $H_i \dots$  は(7) (17)において  $n = 2$  とおいた値である。上式の  $\{ \}$  内の値をそれぞれ無次元係数  $a_0'$ 、 $a_2'$ 、 $b_2'$  で表わせば、円板の応力は(10)より次式で与えられ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{w}{t} \left\{ a_0' + a_2' \cos 2\theta \right\}, & \sigma_\theta &= \frac{w}{t} \left\{ a_0' + \left\{ 2(a_2' + b_2') \Delta^2 - a_2' \right\} \cos 2\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{w}{t} \left\{ (a_2' + b_2') \Delta^2 - a_2' \right\} \sin 2\theta. & \text{ここに } \Delta &= r/R. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

縁材の断面力は(5)に(22)、(23)を代入し

$$\left. \begin{aligned} \text{軸力.} \quad N &= R_0 w \left[ \left( \frac{1}{2} - \lambda a_0' \right) - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \lambda (a_2' - 2b_2') \right\} \cos 2\theta \right], \\ \text{せん断力.} \quad V &= R_0 w \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \lambda (2a_2' - b_2') \right\} \sin 2\theta, \\ \text{曲げ} \\ \text{モーメント.} \quad M &= \rho R_0 w \left[ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \left( \frac{1}{2} - \lambda a_0' \right) + \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{e_0}{4} \right) \right. \right. \end{aligned} \right] \quad (25)$$



第3図 横方向一様荷重



$$- \lambda \left( \frac{1}{3} a'_2 + \frac{e_i}{2} - \frac{2}{3} b'_2 \right) \cos 2\theta \Bigg]$$

前例と同様に  $2h/\rho$  (または  $R/R_0$ ),  $b/t$  の種々の値に対して上式より円板の応力, 縁材の断面力を求めることができる。一例として  $2h/\rho = 0.1$  ( $R/R_0 = 0.9$ )  $b/t = 1, 5, 13$  の場合の計算結果を示す。

第4図

円板の  $x, y$  軸および  $r=R, 1/2 \cdot R$  の同心円上の応力を無次元の形で表わしたもので, 例えば  $\sigma_r' = \sigma_r / \left( \frac{w}{t} \right), \dots$  である。なお同心円上の応力は複雑のため  $b/t = 5$  の場合を省略した。

$b/t = 1$  すなわち円板のみの場合は弾性論によると

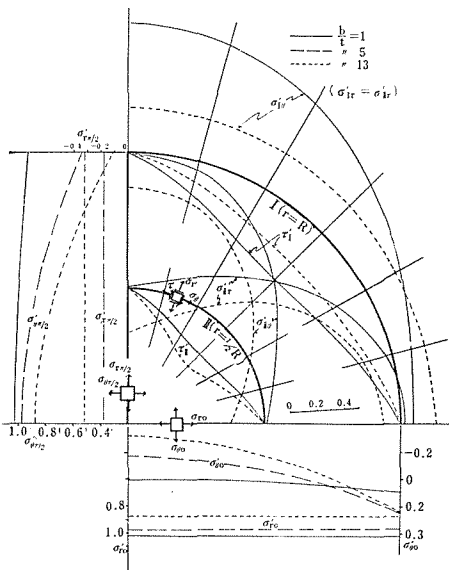
$$\sigma_{r0}' = \sigma_{\theta}' / 2 = 1, \quad \sigma_r' = \sigma_{\theta 0}' / 2 = 0$$

である。縁材を曲りはりとみなした本理論の解は上式と殆んど一致しているが, 接合部附近で  $\sigma_{\theta 0}'$  の誤差が若干めだつ程度で, 一般に  $b$  が大きくなるにつれ誤差は次第に減少する筈である。

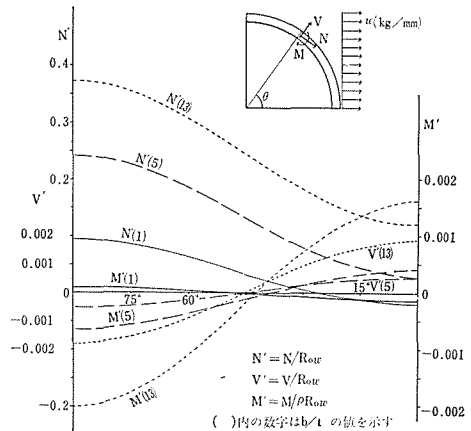
第5図

(5) により計算した縁材の断面力を無次元の形で示した。縁材の断面形が大きくなるにつれ断面力の増加は当然であるが, この際軸力  $N$  に比べてせん断力, 曲げモーメントが極めて小さいことが注目される。

$b/t = 1$  の場合  $\theta = 0$  における軸力は当然 0 でなければならないのに本計算では若干負になっているのは第4図  $\sigma_{\theta 0}'$  の誤差を相殺しているからであろう。



第4図 円板の応力 (横方向一様荷重)



第5図 縁材の断面力 ( // )

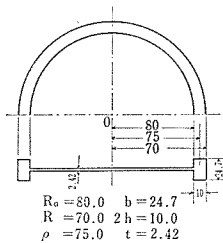
$x$ および $y$ 軸を含む断面における応力と軸力による合力と外力がつり合っていることをたしかめることも容易である。 $V'(1)$ の曲線は殆んど0となるので記していない。

### 6. 荷重様式による円板の応力の変化

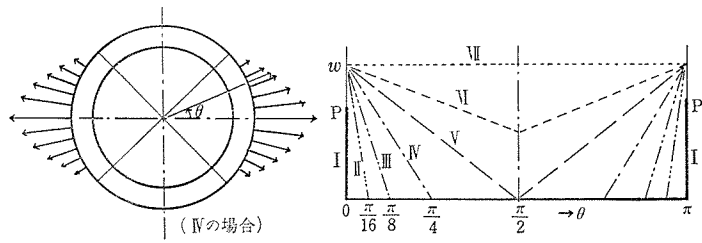
縁材が長方形断面を有する第6図の鋼製試験片に第(7)図(a)の如き集中荷重より $\Delta$ 分布を経て一様分布に至る各種の法線外力に対して $x \cdot y$ 軸上の応力がどのように変化するかをしらべる。

先ず試験片より(長方形断面に対する $k$ を $3/2$ にとり、 $\nu=0.3$ とした)

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.0014855 & \xi &= 1.3608816 \\ \xi &= kE/G = 2k(1 + \nu) = 3.90, \\ e_0 &= R_0/\rho = 1.0\dot{6}, & e_i &= R/\rho = 0.9\dot{3}. \end{aligned}$$



第6図 試験片の形状



第7図(a) 荷重 (I~VII)

(7) (17) より  $n = 0, 2, 4, \dots$  に対する  $H_0, H_1'(n), H_1(n) \dots$  を計算し、荷重様式より外力のフーリエ係数  $\alpha_0, \alpha_n$  を求める。(  $\beta_n = \gamma_n = 0$  )

集中荷重 (I)  $\alpha_0 = P/\pi, \alpha_2 = \alpha_4 = \dots = 2P/\pi.$

$\Delta$  分布 (II~V)  $(0 \leq \theta \leq \pi/m \dots \Delta$  分布,  $\pi/m \leq \theta \leq \pi/2 \dots 0)$

$$\alpha_0 = \frac{1}{m} R_0 w, \alpha_n = \frac{4m}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left( 1 - \cos \frac{n}{m} \pi \right) R_0 w.$$

台形分布 (VI, VII).

$$\alpha_0 = \left( 1 - \frac{m}{4} \right) R_0 w, \alpha_n = \frac{4m}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left\{ 1 - \left( -1 \right)^{\frac{n}{2}} \right\} R_0 w.$$

(26)

(16) より  $a_0, a_n, b_n$  を計算する。

集中荷重 I に対し  $\left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{P}{Rt} \left\{ \begin{matrix} a_n' \\ b_n' \end{matrix} \right\},$  分布荷重 II~VII に対し,  $\left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{w}{t} \left\{ \begin{matrix} a_n' \\ b_n' \end{matrix} \right\}$

と置いた無次元係数  $a_n'$ ,  $b_n'$  を用いる。第7図(a)に対する  $a_n'$ ,  $b_n'$  を表Iにかかげた。

表一I 荷重 (I, III~V) に対する接合部応力のフーリエ係数

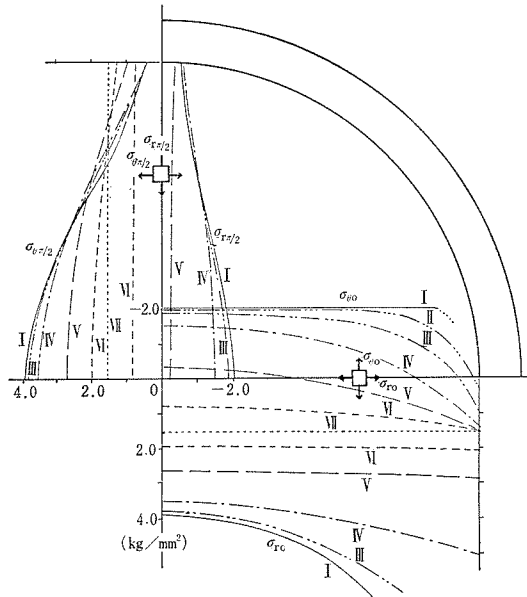
n	I		III		IV		V		VI	
	$a_n'$	$b_n'$	$a_n'$	$b_n'$	$a_n'$	$b_n'$	$a_n'$	$b_n'$	$a_n'$	$b_n'$
0	.16290		.07311		.14622		.29244		.43865	
2	.50599	-.20079	.21702	-.08612	.37047	-.14701	.37047	-.14701	.18524	-.07351
4	.44381	-.22538	.16247	-.08251	.16247	-.08251	0	0	0	0
6	.34057	-.19670	.09459	-.05463	.02771	-.01600	.02771	-.01600	.01385	-.00800
8	.25172	-.15605	.04607	-.02856	0	0	0	0	0	0
10	.18883	-.12142	.01888	-.01214	.00553	-.00356	.00553	-.00356	.00277	-.00178
12	.14632	-.09553	.00595	-.00389	.00595	-.00389	0	0	0	0
14	.11727	-.07672	.00103	-.00067	.00175	-.00115	.00175	-.00115	.00088	-.00057
16	.09682	-.06295	0	0	0	0	0	0	0	0
18	.08196	-.05270	.00043	-.00028	.00074	-.00048	.00074	-.00048	.00037	-.00024
20	.07080	-.04489	.00104	-.00066	.00104	-.00066	0	0	0	0
22	.06219	-.03881	.00128	-.00080	.00038	-.00023	.00038	-.00023	.00019	-.00012
24	.05539	-.03400	.00113	-.00069	0	0	0	0	0	0
26	.04989	-.03012	.00074	-.00045	.00022	-.00013	.00022	-.00013	.00011	-.00007
28	.04537	-.02695	.00034	-.00020	.00034	-.00020	0	0	0	0
30	.04160	-.02431	.00008	-.00005	.00014	-.00008	.00014	-.00008	.00007	-.00004
32	.03840	-.02209	0	0	0	0	0	0	0	0
34	.03566	-.02021	.00005	-.00003	.00009	-.00005	.00009	-.00005	.00005	-.00003
36	.03329	-.01859	.00014	-.00008	.00015	-.00008	0	0	0	0
38	.03121	-.01719	.00022	-.00012	.00006	-.00003	.00006	-.00003	0.0003	-.00002
40	.02938	-.01597	.00022	-.00012	0	0	0	0	0	0
42	.02776	-.01490	.00016	-.00008	.00005	-.00002	.00005	-.00002	.00002	-.00001
44	.02630	-.01395	.00008	-.00004	.00008	-.00004	0	0	0	0
46	.02500	-.01311	.00002	-.00001	.00003	-.00002	.00003	-.00002	.00002	-.00001
48	.02382	-.01236	0	0	0	0	0	0	0	0
50	.02274	-.01168	.00002	-.00001	.00003	-.00001	.00003	-.00001	.00001	-.00001
52	.02177	-.01106	.00006	-.00002	.00005	-.00002	0	0	0	0
54	.02087	-.01051	.00007	-.00004	.00002	-.00001	.00002	-.00001	.00001	-.00001
56	.02004	-.01000	.00007	-.00004	0	0	0	0	0	0
58	.01928	-.00954	.00006	-.00003	.00002	-.00001	.00002	-.00001	.00001	-.00000
60	.01857	-.00912	.00003	-.00001	.00003	-.00001	0	0	0	0
62	.01792	-.00873	.00001	-.00000	.00001	-.00001	.00001	-.00001	.00001	-.00000
64	.01731	-.00837	0	0	0	0	0	0	0	0
66	.01674	-.00803	.00001	-.00000	.00001	-.00001	0.0001	-.00001	.00001	-.00000
68	.01621	-.00773	.00002	-.00001	.00002	-.00001	0	0	0	0
70	.01571	-.00744	.00003	-.00002	.00001	-.00000	.00001	-.00000	.00000	-.00000
72	.01524	-.00717	.00003	-.00002	0	0	0	0	0	0
74	.01480	-.00692	.00003	-.00001	.00001	-.00000	.00001	-.00000	.00000	-.00000
76	.01438	-.00669	.00001	-.00001	.00001	-.00001	0	0	0	0
78	.01399	-.00647	.00000	-.00000	.00001	-.00000	.00001	-.00000	.00000	-.00000
80	.01362	-.00626	0	0	0	0	0	0	0	0

次に  $a_n'$ ,  $b_n'$  を (10) に適用して円板の  $x \cdot y$  軸上の応力分布を示したものが第7図(b)である。ただし比較のため  $x$  方向の合力が 1000kg になるように  $P$ ,  $w$  をきめてある。

周知のように円板 ( $b = t$ ) に集中荷量 I が作用した場合、 $x$  軸上の応力  $\sigma_0$  は一定であることは非常に興味深いことである。 $\sigma_0$  が縁材によってどのように変化するかを知るために、特に集中荷量に近い荷重 II に対する  $\sigma_0$  を (b) に示した。

一般に I の場合円板の荷重点の接合部附近の応力  $\sigma_{r0}$ ,  $\sigma_{\theta 0}$  は非常に収束性が悪くなり

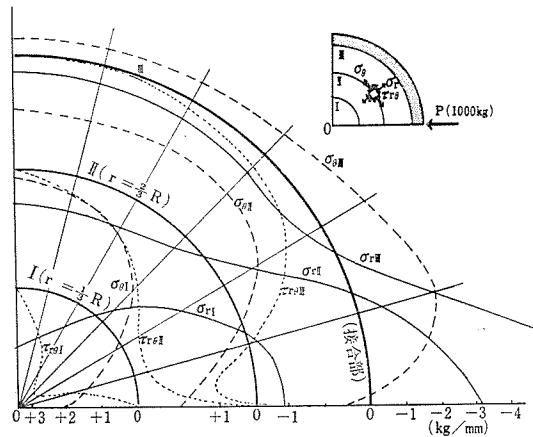
同図にも縁材の応力から推定して点線で示した。この結果縁材があっても  $\sigma_{\theta 0}$  は殆んど一定であるが、接合部付近で縁材の曲げの影響を強くうけていることが推察される。このことは後に実験結果と照合して詳述したい。また (b) より荷重が I より等分布荷量 VII に近づくに従い応力も一様な VII に近づくことが知られる。



第7図(b) 荷重 I ~ VII に対する円板の応力 (x方向合力を1000kg)

### 7. 集中荷重による円板の応力分布と縁材の断面力・応力——実験との比較

第7節で示した同じ試験片に対して、特に一對の集中荷重 (圧縮力  $P$ ) が作用したときの円板の応力分布、縁材の断面力・応力等について計算した結果を図に示し、さらに実験結果とも比較した。すなわち表 I 荷重 I の  $a_n'$ ,  $b_n'$  より  $a_n$ ,  $b_n$  を求めそれぞれ (10) に代入して円板の応力を、また  $\alpha_0 = P/\pi$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = \dots = 2P/\pi$  と  $a_n$ ,  $b_n$  を (5) に代入して縁材の断面力を、さらにこれより縁材の外周の  $\sigma_{\theta 0}$ 、内周の  $\sigma_{\theta i}$  を求めたものである



第8図 円板の応力 (一對の集中荷重)

(1) 円板の応力分布 (第8図)

対称性より第1象限について、半径を3等分した同心円上の  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  を図に示した。

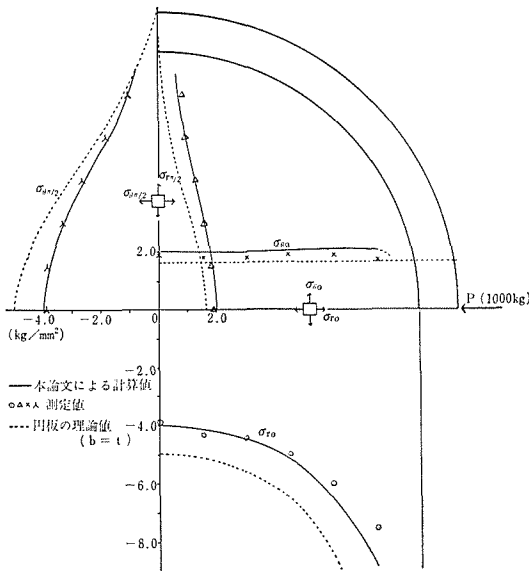
(2) 円板  $x$ ,  $y$  軸上の応力と実験結果 (第9図)

計算結果を第7図(b)Iと同じく実線で、比較のため縁材の厚さ  $b$  が円板の厚さ  $t$  と等しい場合の既に知られている公式<sup>(3)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r0} &= \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{1-D^2} - 1 \right), & \sigma_{r\pi/2} &= \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-D^2}{1+D^2} \right)^2, \\ \sigma_{\theta 0} &= \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi}, & \sigma_{\theta\pi/2} &= \frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{1+D^2} - 1 \right). \end{aligned} \right\} (27)$$

ここに  $D = \frac{r}{R_0}$

によって計算した値を点線で示した。



第9図(b) 円板  $x, y$  軸上の応力 (一対の集中荷重)

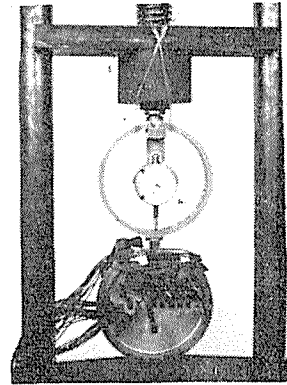
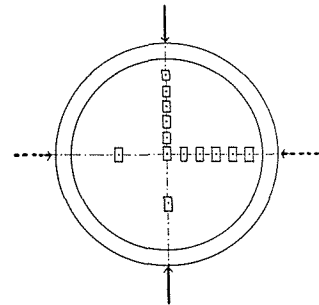


写真1 試験装置



第9図(a) ストレンゲージの位置

実験との比較

同試験片の両軸半径の6等分点にストレンゲージを図の如く貼り、ひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y$  を測定し応力を計算した。圧縮荷重はネジプレスにより、リングゲージを介して加えた。対称荷量となるよう写真1の如く10mm角の小片をとおして圧縮した。これは荷重点附近を除いては殆んど応力分布に影響を及ぼさないと考えたからである。

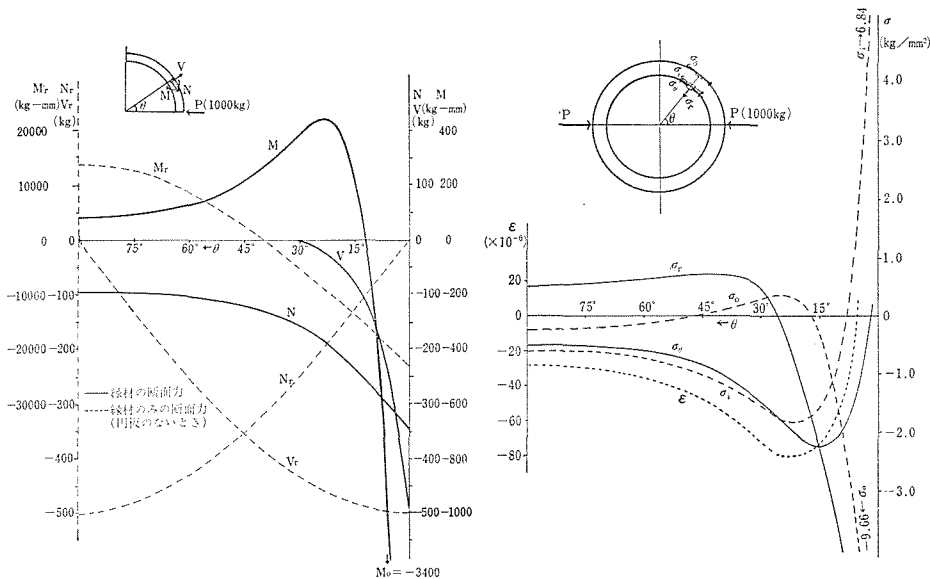
実験結果は、荷重点に遠い  $y$  軸上では非常によく一致し、 $x$  軸上においても荷重点附近を除いて大体一致し理論の正しいことを示している。なお点線と比較することにより縁材の効果は荷量方向の応力 ( $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta\pi/2}$ ) は減少し、それに直角方向の応力 ( $\sigma_{\theta 0}, \sigma_{r\pi/2}$ ) が増加していることも興味深いことである。

(3) 縁材の断面力と応力

第10図の実線は縁材の断面力を，点線は円板のない縁材（円環）の断面力を表わす次式より求めた値である。（(5)より誘導）

$$\left. \begin{aligned}
 \text{軸力} \quad N_r &= \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} \cos 2i\theta \right\} = \frac{P}{2} \sin \theta, \\
 \text{せん断力} \quad V_r &= \frac{2P}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{4i^2 - 1} \sin 2i\theta = \frac{P}{2} \cos \theta, \\
 \text{曲げモーメント} \quad M_r &= \frac{2\rho P}{\pi} \left\{ -\frac{\kappa}{2(1+\kappa)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} \cos 2i\theta \right\} \\
 &= \rho P \left\{ \frac{1}{\pi(1+\kappa)} - \frac{1}{2} \sin \theta \right\}.
 \end{aligned} \right\}$$

同図によると両者の類似性を見出すことは殆んど困難で僅かに  $V$ ,  $M$  の傾向が似ていると思われる程度である。このことは縁材に及ぼす円板の影響が極めて著しいことを表わしている。当然ではあるが円板のために  $N$ ,  $V$  特に  $M$  の値が非常に減少していることも注目される点である。



第10図 縁材の断面力（一對の集中荷重） 第11図 縁材の応力，接合部の応力とひずみ（ $\epsilon$ ）

第11図には縁材の軸力および曲げによる外周と内周の応力を示した，長方形断面の場合は中心線と中立軸の距離が極めて小さいので縁材の応力は直線則により求めて差支え

ない。すなわち

$$\left. \begin{array}{l} \text{外周応力} \quad \sigma_0 \\ \text{内周応力} \quad \sigma_i \end{array} \right\} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Z}, \quad (A, Z \text{は断面積, 断面係数})$$

なお 円板の接合部の応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  および接線方向のひずみ  $\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E$  をあわせて記録した。

縁材内周の伸びひずみ  $\varepsilon_i = \sigma_r/E$  が上の  $\varepsilon_\theta$  とほぼ等しいことは容易に確かめられる。このことは接合部における連続条件の一つを満足していることを保証し、本論文の計算が概ね正しいことを示しているものである。

## 8. む す び

1. 縁材のある円板に外力(1)が作用した場合接合部の応力を定める係数  $a_0, a_n, b_n$  が (10) によって求められ、以下円板の応力分布は (10), 縁材の断面力は (5) により求めることができた。

2. 接合部の応力のフーリエ係数  $a_0$  等は縁材, 円板の形状, 材質により定められるもので一般に外力 (1) の収束性が良ければ接合部の応力を表わすフーリエ級数も収束性が良く, 従って円板の応力を表わす (10) も同様である。また縁材の形状, 材質が剛になる程 ( $\xi \rightarrow$ 大) 上と同様のことがいわれる。

3. 法線等分布荷重および横方向一様荷重の場合について円板に及ぼす縁材の影響を具体的に明らかにすることができた。

4. 特別な形状の試験片 ( $\xi \approx 1.36$ ) について荷重の種類による円板の応力分布の変化を, 特に一對の集中荷重に対して円板の応力, 縁材の断面力および接合部附近の応力を計算し,  $x \cdot y$  軸上の応力は実験結果と概ね一致することが確かめられた。

はしがきにも述べたように縁材と円板の構造物を一般荷重のもとに弾性学的に解くことは原理的には可能であっても実際の計算は非常に面倒であろうことは想像に難くない (特に円輪について)。その点本論文による方法は近似的ではあるが容易に計算できる特徴をもっている。縁材が比較的剛でない場合 ( $b/t \rightarrow$ 小,  $2h/\rho \rightarrow$ 大) すなわち縁材が曲りはりの仮定を満足しなくなるような形状に対しては, 本方法による誤差が大きくなるのは止むを得ないが, 通常考えられる大いさの縁材に対しては充分有力と思われる。

計算例は二軸対称荷重に限ったが, さらに縁材の形状, 弾性率が円板の応力分布に及ぼす影響や中心に集中荷重が作用した場合等については第2報以下にゆづることとする。

終りに本論文の計算に当って参考とした下記文献, 研究課題を提供され種々御検討をいただいた本学工学部宮入武夫教授, 実験に協力された卒業研究の学生諸君に深く謝意を表します。

## 文 献

- (1) 佐々木三郎 “円環の強度” 信大工学部紀要 No. 18. 1965.
- (2) 森口 繁一 “2次元弾性論” 岩波現代応用数学 1957.
- (3) たとえば  
M.M. Frocht, “Photoelasticity” Vol. II. P. 127. John Willey  
& Sons, New York. 1948.
- (4) 宮入 武夫 “縁材を有する平板の強度(I)” 信大工学部紀要 No. 10. 1960.  
T. Miyairi. “Strength Calculation of a Square Framework with the Wall”  
P. 95. Proc. 11 th. Jap. Nat. Cong. Appl. Mech. 1961.

## Summary

**Strength Calculation of a Circular Disk  
with a Reinforcement. (I)**

Saburo SASAKI

(Department of Mechanical Engineering,  
Faculty of Engineering)

In this report is calculated the stress distribution of a disk with reinforcement submitted to the action of the uni-symmetrical load which is represented by the Fourier's series.

In general, the stress-strain calculations of these constructions are very difficult to deal with in three dimensional elasticity.

We treated as a curved beam the reinforcement and used the continuous conditions of the displacements at connection between the disk and the reinforcement, then determined the coefficients of the stress distributions of the disk and the reinforcement.

When the double-symmetrical loads are various type and the shape of reinforcement are various size, the stress distribution were calculated and showed graphically. The results of the experiment tried to a pair of concentrated load coincide with almost the above calculations.