

# 非対称曲げをうけるラーメンの 仮想仕事式による解法

草 間 孝 志\*

(昭和 38 年 7 月 5 日受理)

## 1. 緒 言

構造物の部材の中にはしばしば非対称曲げをうける場合がある。このような部材に対する解法としては、一般に部材の主軸を求めて、その両主軸まわりの曲げを取扱うこと<sup>1)</sup>によって解かれているが、部材の主軸がラーメンの面内に存在しないようなラーメン構造に対して適用した場合、釣合条件、連続条件、適合条件が比較的繁雑になるおそれがある。これに対し外力を両主軸方向の成分に分解せず<sup>2)</sup>に直接非対称曲げとして解く方法としては Winter の提案せる仮想荷重の方法がある。この Winter の方法は比較的便利な方法ではあるが、その使用範囲は全部材が均一断面の連続梁に限定され、ラーメン等に対しては適用することができない。そこでこのようなラーメン構造に対しては通常非対称曲げとして取扱うことなく計算がなされているようである。

筆者は、この問題に関して、さき<sup>3)</sup>にたわみとたわみ角に関する Mohr の定理を非対称曲げにまで拡張し、非対称曲げに対するたわみ角式を求め、この方法による<sup>4)</sup>ときは釣合条件、連続条件、適合条件が容易に得られることを示し、かつ計算例により荷重の状態、部材断面の形状性質によっては通常の解法による結果はかなり大きな誤差を含む場合があることを指摘した。

本文はさきの報告に引続き非対称曲げをうける部材をエネルギー法により求めたものである。

本研究に対し常に御指導を賜った信州大学工学部吉田俊弥教授に対して深甚なる謝意を表す。

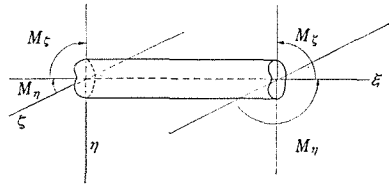
## 2. 非対称曲げと振りをうける場合の仮想仕事式

第 1 図に示すように任意の直交軸平面  $\xi\eta$ ,  $\xi\zeta$  に  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  が作用しているとき、 $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  によって生ずる曲げ応力  $\sigma_\xi$  は

$$\sigma_\xi = \frac{1}{I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2} \left\{ (M_\zeta I_\eta - M_\eta I_{\eta\zeta}) \eta + (M_\eta I_\zeta - M_\zeta I_{\eta\zeta}) \zeta \right\} \quad (1)$$

となり、従って、これより非対称曲げに対する仮想仕事式を作るときは次のようになる。

\* 土木工学教室 講師



第 1 図

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{p}\delta &= \iiint \bar{\sigma}_\xi \varepsilon_\xi d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_l \frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} \left\{ (I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta) \bar{M}_\zeta + (I_\zeta M_\eta - I_{\eta\zeta} M_\zeta) \bar{M}_\eta \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2)$$

次に部材が捩りをうける場合に対しては

$$\Sigma \bar{p}\delta = \int_l \frac{T_\xi \bar{T}_\xi}{GJ} d\xi \quad (3)$$

となる。従って非対称曲げと捩りの影響を同時に考慮すると仮想仕事式は式(2)と式(3)の和によって与えられる。

いま不静定量を  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$  とし,  $M_{\eta i}, M_{\zeta i}, T_{\xi i}$  をそれぞれ全不静定量を取除いた静定基本系に  $X_i = -1$  を作用させたときの  $\eta, \zeta$  軸まわりの曲げモーメントと  $\xi$  軸まわりの捩りモーメントとすると, 与系の  $M_\eta, M_\zeta, T_\xi$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} M_\eta &= M_{\eta 0} - \sum_{i=1}^n X_i M_{\eta i}, \\ M_\zeta &= M_{\zeta 0} - \sum_{i=1}^n X_i M_{\zeta i}, \\ T_\xi &= T_{\xi 0} - \sum_{i=1}^n X_i T_{\xi i} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となり,  $X_i = -1$  なる状態と実状態より仮想仕事式を作ると

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_i + R_i &= - \int \left[ \frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} \left\{ (I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta) \frac{\partial M_\zeta}{\partial X_i} + (I_\zeta M_\eta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_{\eta\zeta} M_\zeta) \frac{\partial M_\eta}{\partial X_i} \right\} - \frac{T_\xi}{GJ} \frac{\partial T_\xi}{\partial X_i} \right] d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。ここに  $R_i$  は支点移動によって生ずる値であり, 通常示されているものと同じである。式(5)は不静定量の数だけ成立する故, これより不静定量を決定することができる。また式(5)の左辺を0とおくときには上式は非対称曲げと捩りをうける場合の最小仕事式にほかならない。

次に式(5)に式(4)を代入すると ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ )

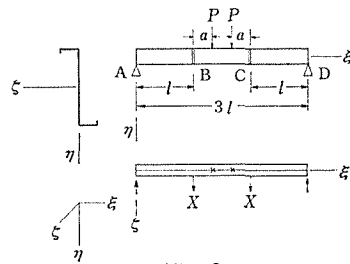
$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n X_s \left\{ \int_l \left\{ \frac{I_\eta M_{c_s} M_{c_i} + I_c M_{\eta_s} M_{\eta i} - I_{\eta c} (M_{\eta_s} M_{c_i} + M_{c_s} M_{\eta i})}{E(I_\eta I_c - I_{\eta c}^2)} + \frac{T_{\xi s} T_{\xi i}}{GJ} \right\} d\xi \right. \\ = \int_l \left\{ \frac{I_\eta M_{c_0} M_{c_i} + I_c M_{\eta_0} M_{\eta i} - I_{\eta c} (M_{\eta_0} M_{c_i} + M_{c_0} M_{\eta i})}{E(I_\eta I_c - I_{\eta c}^2)} + \frac{T_{\xi_0} T_{\xi i}}{GJ} \right\} d\xi \\ \left. - 1 \cdot \delta_i - R_i \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。式(6)は式(5)と同様  $n$  個の式が得られる故、式(6)を用いても不静定量を決定することができる。

### 3. 計 算 例

#### (1) 横方向支承を有する単純支持梁

第2図に示すZ断面の梁ADの中間B, Cに横方向支承を設けた梁に対して計算しよう。この問題は Winter の取扱った問題であり、かつさきに報告せる非対称曲げに対するたわみ角法においても計算したが、比較のために今回は仮想仕事式により求めることにする。このB, Cの横方向支承は次の性質を有するものとする。

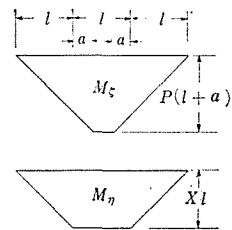


第 2 図

- i)  $\xi$  軸まわりの回転と  $\eta$  方向の変位に対して拘束する
- ii) しかしながら  $\eta$  軸および  $\xi$  軸まわりの回転と  $\xi$  方向の変位に対しては自由である。

部材AB, BC, CDとも長さが  $l$  であり、各部材とも  $I_\eta, I_c, I_{\eta c}$  が等しく、B, C点より中央に向かって距離  $a$  の点に  $\eta$  方向の荷重が作用しているものとする。いま外力が部材のせん断中心に作用しているとすると部材には振りは働かない故に  $T_\xi = 0$  とおくことができ、前述の横方向支承の性質よりB, Cには  $\xi$  方向の横方向反力が生ずる。この場合、対称条件より両者は等しいことが分る。そこでこの横方向支承に働く反力を不静定量にとり、これを  $X$  にて表わすと、曲げモーメント図は第3図のようになる。従って、 $M_\eta, M_c, \frac{\partial M_\eta}{\partial X}, \frac{\partial M_c}{\partial X}$  はそれぞれ次のようになる。(ただしE, Fは荷重点)

$$\begin{aligned} M_\eta : A \sim B \quad M_\eta = X\xi, \quad \frac{\partial M_\eta}{\partial X} = \xi, \\ B \sim C \quad M_\eta = Xl, \quad \frac{\partial M_\eta}{\partial X} = l. \\ M_c : A \sim E \quad M_c = P\xi, \quad \frac{\partial M_c}{\partial X} = 0, \\ E \sim F \quad M_c = P(l+a), \quad \frac{\partial M_c}{\partial X} = 0. \end{aligned}$$



第 3 図

B, C点は横方向支承により  $X$  の方向に対しては変位しないから、式(5)より

$$2 \int_0^l (I_c X \xi - I_{\eta c} P \xi) \xi d\xi + 2 \int_l^{l+a} (I_c X l - I_{\eta c} P \xi) l d\xi + \int_{l+a}^{2l-a} \{ I_c X l - I_{\eta c} P (l+a) \} l d\xi = 0$$

となり、これを計算すると

$$X = -\frac{I_{\eta c}}{I_c} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{a}{l} - \frac{3}{5} \frac{a^2}{l^2} \right) P$$

を得る。但し  $a/l \leq 1/2$  である。この結果よりこの計算例の場合には横方向支承に働く反力は  $I_{\eta}$  には無関係であることが分り、さらに  $X$  の最大値は  $a/l = 0.5$  のときに生じその値は

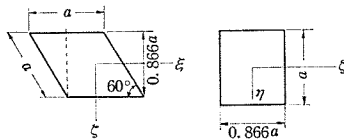
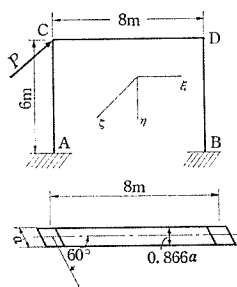
$$X_{\max} = 1.15 \frac{I_{\eta c}}{I_c} P$$

となる。いま  $X$  の式に Winter の取扱った数値  $l = 70 \text{ in}$ ,  $a = 22 \text{ in}$ ,  $I_c = 9.07 \text{ in}^4$ ,  $I_{\eta} = 1.41 \text{ in}^4$ ,  $I_{\eta c} = -2.60 \text{ in}^4$ ,  $P = 522 \text{ lb}$  を代入すると

$$X = -169 \text{ lb}$$

となり、この結果は Winter の解に一致し、かつ非対称曲げに対するたわみ角式、非対称曲げに対する Mohr の定理による解にも当然一致する。なおこの計算例の場合に対して  $X_{\max}$  を求めてみると  $X_{\max} = -172 \text{ lb}$  となる。

### (2) 1 径間門型ラーメン



第 4 図

1 径間門型ラーメンの節点 C にラーメンの面に対して垂直方向の荷重  $P_{\text{ton}}$  が作用している場合について計算する (第 4 図)。

各部材の  $I$  と振り抵抗係数  $J$  は

梁 :  $I_{\eta} = 0.0722a^4$ ,  $I_c = 0.0541a^4$ ,  $I_{\eta c} = 0$ .

柱 :  $I_{\xi} = 0.0541a^4$ ,  $I_c = 0.0902a^4$ ,  $I_{\xi c} = 0.0312a^4$ .

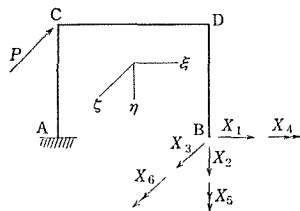
梁 :  $J = 0.1039a^4$ , 柱 :  $J = 0.0936a^4$ .

となる。梁に対する  $J$  は St. Venant の式より求め、柱に対しては Griffith, Taylor 法を用いて  $J$  の値を算出した。また  $G$  の値は Poisson 数  $m$  を 6 とすると、 $G = Em/2(m+1) = 0.429E$  となる。

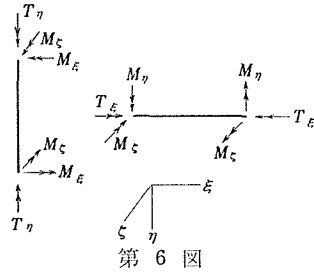
支点 A, B は固定端であるから両支点には  $\xi, \eta, \zeta$  方向の反力と  $\xi, \eta, \zeta$  軸まわりの端モーメントが作用する従って、いま B 点におけるこれらの値を不静定量にとると未知量  $X$  は第 5 図に示すように  $X_1, X_2, \dots, X_6$  の 6 個となる。これらの  $X$  のうち  $X_1$  より  $X_3$  までは B 端の  $\xi, \eta, \zeta$  方向の反力であり、 $X_4$  より  $X_6$  までは B 端にお

ける

る  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  軸まわりの端モーメントである。いま曲げモーメントと捩りモーメントに対し第6図の方向を正とすると  $X=0$ ,  $X_1=-1$ ,  $X_2=-1$ , ……………  $X_6=-1$  のそれぞれの場合における各部材に働くモーメントは第1表のようになる。



第5図



第6図

第1表 モーメント

その1 CA部材

	$M_\xi$	$M_\zeta$	$T_\eta$
$X=0$	$+P \times \eta$	0	0
$X_1=-1$	0	$-(6-\eta) \times 1$	0
$X_2=-1$	0	$+8 \times 1$	0
$X_3=-1$	$-(6-\eta) \times 1$	0	$-8 \times 1$
$X_4=-1$	+1	0	0
$X_5=-1$	0	0	-1
$X_6=-1$	0	-1	0

その2 CD部材

	$M_\eta$	$M_\zeta$	$T_\xi$
$X=0$	0	0	0
$X_1=-1$	0	$-1 \times 6$	0
$X_2=-1$	0	$+(8-\zeta) \times 1$	0
$X_3=-1$	$+(8-\xi) \times 1$	0	$-6 \times 1$
$X_4=-1$	0	0	+1
$X_5=-1$	+1	0	0
$X_6=-1$	0	-1	0

その3 DB部材

	$M_\xi$	$M_\zeta$	$T_\eta$
$X=0$	0	0	0
$X_1=-1$	0	$(6-\eta) \times 1$	0
$X_2=-1$	0	0	0
$X_3=-1$	$(6-\eta) \times 1$	0	0
$X_4=-1$	-1	0	0
$X_5=-1$	0	0	+1
$X_6=-0$	0	+1	0

この表をもとに式(6)を計算すると第2表の6元の連立方程式が得られる。

これを解くと

$$X_1 = -0.158Pt, \quad X_2 = -0.177Pt,$$

$$X_3 = 0.111Pt, \quad X_4 = 1.295Ptm,$$

$$X_5 = -0.444Ptm, \quad X_6 = 0.143Ptm$$

を得る。これより各部材の端モーメントは第3表に示す値となる表中'をつけてあるのは部材の相乗モーメントを考慮しない場合の値である。第7図はモーメント図と支点反力を示したものである。図

中の点線は便法として相乗モーメントの値を考慮しなかった場合である。

この計算例の場合、荷重状態より当然  $M_{\xi AC}$  は最大の曲げモーメント ( $M_{\xi AC} = 4.70 Ptm$ ) となるが、それと同時に  $M_{\zeta AC}$  の値が  $M_{\xi AC}$  の約33%に相当し、かなり大きいことは興味深い。この問題の場合に対しては、便宜的手段としてラーメンの面内に全部

材の主軸が存在するものとして問題を解くとかなり大きな誤差をとまうことを示している。

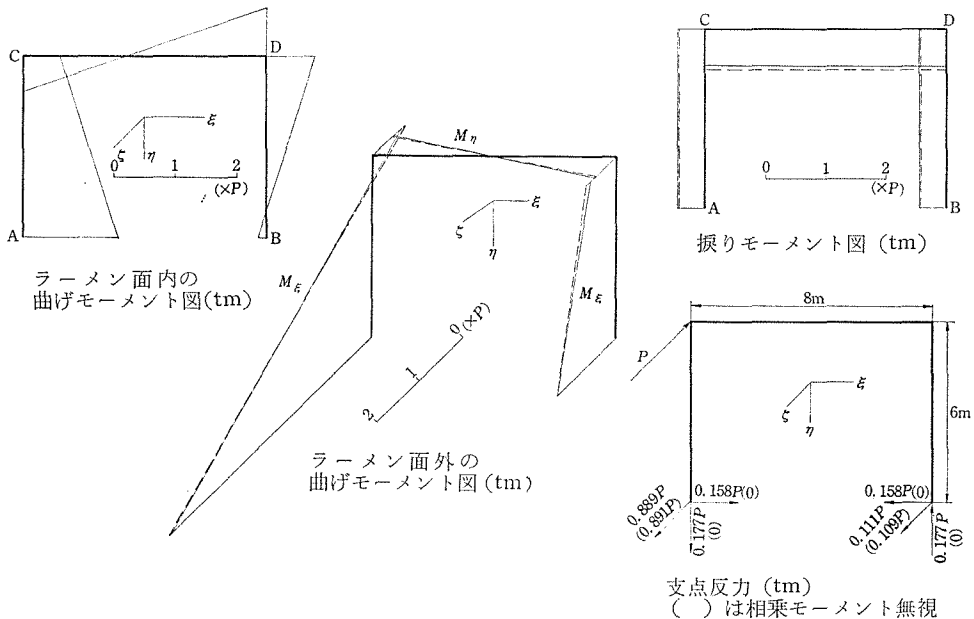
第2表 弾性方程式

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	右辺
1	23.38	-18.19	-4.50	1.13		4.55	1.13
2	-18.19	30.02	4.50	-1.50		-4.33	-4.50
3	-4.50	4.50	87.97	-7.46	6.98	-1.13	-3.25
4	1.13	-1.50	-7.46	1.78		0.38	1.62
5			6.98		1.75		0
6	4.55	-4.33	-1.13	0.38		1.08	0.56

第3表 端モーメント (tm)

部材	AC		CD		DB	
	A	C	C	D	D	B
$M_\xi$	+4.71	-0.63	-0.63	-0.63	+0.63	+1.29
$M_\eta$	+0.44	+0.44	-0.44	+0.44	+0.44	+0.44
$M_\zeta$	+1.56	+0.61	+0.61	-0.81	+0.81	-0.14
$M'_\xi$	+4.70	-0.65	-0.65	-0.65	+0.65	+1.30
$M'_\eta$	+0.44	-0.44	-0.44	+0.44	+0.44	+0.44
$M'_\zeta$	0.	0.	0.	0.	0.	0.

註： 端モーメントの符号は第6図の規約に従う。



第7図 モーメント図と支点反力

## 4, 結 言

以上非対称曲げをうける部材に対し、外力を両主軸方向に分けることなく、直接非対称曲げとして仮想仕事式により求める方法を述べたが、多少計算式は複雑になるけれども、計算例(1)に示したような横方向支承を有する梁の場合には外力ならびに変位を両主軸方向に分けて考える方法に比しはるかに有利である。しかし乍ら計算例(2)に示したようなラーメン構造にあっては、本法の仮想仕事式による方法は計算が繁雑になる故、このような場合に対してはさきに報告せる非対称曲げをうける部材に対するたわみ角式を用いる方がはるかに有利である。

## 文 献

- 1) F. Borg and J. Gennaro : Advanced Structural Analysis, p.225, 1959.
- 2) L. Zetlin and G. Winter : Unsymmetrical Bending of Beams with and without Lateral Bracing, Proc. A.S.C.E. Vol.81, No.774, 1955.
- 3) 草間 孝志 : 非対称曲げをうけるラーメンの一解法, 信州大学工学部紀要 第13号, 91頁, 1962.
- 4) S. Timoshenko : Strength of Materials, 3rd ed., part 1, p.230, 1955.
- 5) Flügge : Handbook of Engineering Mechanics, 1st ed., p.35-8, 1962.

## Summary

### Analysis of Rigid Frames Subjected to Unsymmetrical Bending by Applying Virtual Work Equations

Takashi KUSAMA

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

In the previous paper, the writer has tried to analyse the rigid frames subjected to unsymmetrical bending by applying slope-deflection formulas. In this paper, he shows a method of analysis of these frames depending on the virtual work equations. The practices of solution are shown in several examples.