

# 非対称曲げをうけるラーメンの一解法

草 間 孝 志\*

(昭和37年7月31日受理)

## 1. 緒 言

土木、建築の構造物の部材はしばしば非対称曲げをうける場合があるが、このような部材は荷重の作用線と部材の主軸とが一致せず、従って荷重の方向に対して傾いた方向のたわみを生ずる。しかしながら非対称曲げをうけるようなラーメンの部材力の算定に際しては、ラーメンの面内の変形のみを考え面外の変形に対しては考慮されていないようである。

本文はこのようなラーメンをたわみ角法を用いて解く一方法を述べんとするものである。

本研究に対し常に御指導を賜った信州大学工学部吉田俊弥教授に対して深甚なる謝意を表す。

## 2. 梁の曲げの基本式

### (1) 非対称曲げに対する Mohr の定理

部材に第1図のような曲げモーメント  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  が作用している場合、梁の  $\eta$ ,  $\zeta$  方向の曲率半径  $r_\eta$ ,  $r_\zeta$  と  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  との間には

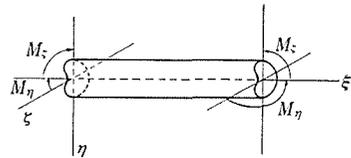
$$M_\eta = \frac{EI_\eta}{r_\zeta} + \frac{EI_{\eta\zeta}}{r_\eta}, \quad M_\zeta = \frac{EI_\zeta}{r_\eta} + \frac{EI_{\eta\zeta}}{r_\zeta}$$

なる関係があり、従って梁の弾性線の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} &= -\frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}(I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta), \\ \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} &= -\frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}(I_\zeta M_\eta - I_{\eta\zeta} M_\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

にて与えられる。この場合  $M$  は第1図の方向を正とする。一方、 $\eta$ ,  $\zeta$  軸まわりの曲げモーメント  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  と  $\eta$ ,  $\zeta$  軸方向のせん断力  $Q_\eta$ ,  $Q_\zeta$  および荷重  $q_\eta$ ,  $q_\zeta$  との間には次の関係が成立する。

$$\frac{dQ_\eta}{d\xi} = -q_\eta, \quad \frac{dQ_\zeta}{d\xi} = -q_\zeta. \quad (2)$$

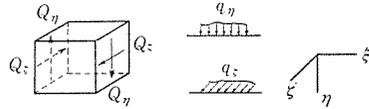


第1図

\* 土木工学教室 助手

$$\frac{d^2 M_\zeta}{d\xi^2} = -q_\zeta, \quad \frac{d^2 M_\eta}{d\xi^2} = -q_\eta. \quad (3)$$

但し、 $Q_\eta$ ,  $Q_\zeta$ ,  $q_\eta$ ,  $q_\zeta$  は第2図の方向を正とし、荷重  $q_\eta$ ,  $q_\zeta$  は梁のせん断中心において  $\eta$ ,  $\zeta$  軸の正の方向に作用するときを正とする。式(1)より  $\zeta$ ,  $\eta$  軸まわりの接線角  $\theta$  は



第2図

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta_\zeta}{d\xi} &= -\frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} (I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta), \\ \frac{d\theta_\eta}{d\xi} &= -\frac{1}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} (I_\zeta M_\eta - I_{\eta\zeta} M_\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

であるから、式(1)と式(3)および式(2)と式(4)の比較により非対称曲げに対する Mohr の定理を得る。すなわち「梁のたわみを求めるには与えられた荷重より  $(I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta)/E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)$ ,  $(I_\zeta M_\eta - I_{\eta\zeta} M_\zeta)/E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)$  を求め、これらをそれぞれ荷重と考えて曲げモーメントを求めれば  $\eta$  および  $\zeta$  方向のたわみを得る。それらの荷重に対する任意点のせん断力を求めればその点における梁の接線角が得られる」。これを非対称曲げに対する Mohr の定理と呼ぶことにする。この Mohr の定理は Winter, Zetlin の提案する仮想荷重による方法と実質的には一致するものであって、たとえば  $\eta$ ,  $\zeta$  方向とも単純に支持された梁の中央に  $\eta$  方向の単一集中荷重  $P$  が作用する場合に対しては  $M_\eta = 0$ ,  $M_\zeta = P\xi/2$  ( $\xi \leq l/2$ ) であるから

$$\frac{I_\eta M_\zeta - I_{\eta\zeta} M_\eta}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} = \frac{I_\eta P\xi}{2E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}, \quad \frac{I_\zeta M_\eta - I_{\eta\zeta} M_\zeta}{E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)} = -\frac{I_{\eta\zeta} P\xi}{2E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}.$$

よってこれらを荷重として中央点のモーメントを求めると

$$(\eta)_{\xi=l/2} = \frac{I_\eta Pl^3}{48E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}, \quad (\zeta)_{\xi=l/2} = -\frac{I_{\eta\zeta} Pl^3}{48E(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)}$$

となり、この結果は当然のことながら Winter, Zetlin の解に一致する。Winter, Zetlin も指適しているように、荷重が  $\eta$  方向に働くとき  $I_\eta$ ,  $I_\zeta$ ,  $I_{\eta\zeta}$  が一定な場合については通常の  $I$  の代りに  $(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)/I_\eta$ ,  $-(I_\eta I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2)/I_{\eta\zeta}$  を用いて計算すればよく、係数(この例では  $1/48$ )は通常値をそのまま利用できることがわかる。

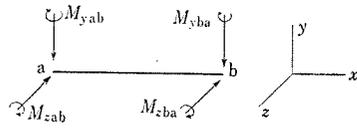
## (2) 端モーメント式

ラーメンなどの不静定構造物の解法には数多くの方法があるが、公式が簡単で記憶しやすい、弾性式の数減らしうると言う利点より広いたわみ角法が用いられている。従ってここでもたわみ角法によることにしよう。

$\eta$ ,  $\zeta$  方向とも単純に支持された梁  $ab$  の両端に第1図の方向の曲げモーメント  $M_{\eta ab}$ ,  $M_{\zeta ab}$ ,  $M_{\eta ba}$ ,  $M_{\zeta ba}$  が作用する場合に対しては、 $E$ ,  $I$  を一定として前述の非対称曲げに対する Mohr の定理を用いると両端における接線角は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=0} &= \frac{l}{6E(I_\eta I_\zeta - I^2_{\eta\zeta})} [I_\eta(2M_{\zeta ab} + M_{\zeta ba}) - I_{\eta\zeta}(2M_{\eta ab} + M_{\eta ba})], \\ \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=l} &= -\frac{l}{6E(I_\eta I_\zeta - I^2_{\eta\zeta})} [I_\eta(M_{\zeta ab} + 2M_{\zeta ba}) - I_{\eta\zeta}(M_{\eta ab} + 2M_{\eta ba})], \\ \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0} &= \frac{l}{6E(I_\eta I_\zeta - I^2_{\eta\zeta})} [I_\zeta(2M_{\eta ab} + M_{\eta ba}) - I_{\eta\zeta}(2M_{\zeta ab} + M_{\zeta ba})], \\ \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=l} &= -\frac{l}{6E(I_\eta I_\zeta - I^2_{\eta\zeta})} [I_\zeta(M_{\eta ab} + 2M_{\eta ba}) - I_{\eta\zeta}(M_{\zeta ab} + 2M_{\zeta ba})]. \end{aligned} \right\} (5)$$

たわみ角法に便ならしめるためには第1図の座標系によるよりも第3図の座標系をとる方がよい。第3図の座標系に対して、両端における端モーメント  $M_{yab}$ ,  $M_{yba}$ ,  $M_{zab}$ ,  $M_{zba}$ , 接線角  $\tau_{ya}$ ,  $\tau_{yb}$ ,  $\tau_{za}$ ,  $\tau_{zb}$  と各軸の原点に向って右まわりを正と規定すると、式(5)において



第3図

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \tau_{za}, \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=l} = \tau_{zb}, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \tau_{ya}, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=l} = \tau_{yb},$$

$$M_{\eta ba} = -M_{yba}, \quad M_{\zeta ba} = -M_{zba}, \quad I_{\eta\zeta} = -I_{yz}$$

となり、その他の端モーメント、断面二次モーメントは  $\eta$  を  $y$  に  $\zeta$  を  $z$  に入れ替ればよい。これらの関係を用いて式(5)を整理すると

$$\left. \begin{aligned} M_{yab} &= \frac{2E}{l} [I_y(2\tau_{ya} + \tau_{yb}) - I_{yz}(2\tau_{za} + \tau_{zb})], \\ M_{yba} &= \frac{2E}{l} [I_y(\tau_{ya} + 2\tau_{yb}) - I_{yz}(\tau_{za} + 2\tau_{zb})], \\ M_{zab} &= \frac{2E}{l} [I_z(2\tau_{za} + \tau_{zb}) - I_{yz}(2\tau_{ya} + \tau_{yb})], \\ M_{zba} &= \frac{2E}{l} [I_z(\tau_{za} + 2\tau_{zb}) - I_{yz}(\tau_{ya} + 2\tau_{yb})] \end{aligned} \right\} (6)$$

を得る。たわみ角  $\theta$  は  $\theta = \tau + R$  であり、さらに荷重の影響を取り入れると、式(6)は次のように変形することができる。

$$\left. \begin{aligned} M_{yab} &= k_{yab}(2\varphi_{ya} + \varphi_{yb} + \psi_{yab}) - \lambda_{ab}(2\varphi_{za} + \varphi_{zb} + \psi_{zab}) + C_{yab}, \\ M_{yba} &= k_{yab}(\varphi_{ya} + 2\varphi_{yb} + \psi_{yab}) - \lambda_{ab}(\varphi_{za} + 2\varphi_{zb} + \psi_{zab}) + C_{yba}, \\ M_{zab} &= k_{zab}(2\varphi_{za} + \varphi_{zb} + \psi_{zab}) - \lambda_{ab}(2\varphi_{ya} + \varphi_{yb} + \psi_{yab}) + C_{zab}, \\ M_{zba} &= k_{zab}(\varphi_{za} + 2\varphi_{zb} + \psi_{zab}) - \lambda_{ab}(\varphi_{ya} + 2\varphi_{yb} + \psi_{yab}) + C_{zba}. \end{aligned} \right\} (7)$$

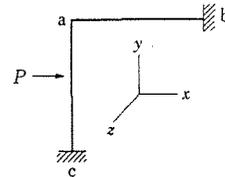
ここに,  $k = K/K_0$ ,  $\varphi = 2EK_0\theta$ ,  $\psi = -6EK_0R$ ,  $K = I/l$ ,  $K_0 =$  規準剛度,  $\theta =$  たわみ角,  $R =$  部材角,  $\lambda = A/K_0$ ,  $A = I_{yz}/l$ ,  $C =$  荷重項 (後述) である.

式 (7) は両端拘束の部材に対する端モーメント式である. もし一端ヒンジの部材の場合には, たとえば a 端が  $y, z$  周りともにヒンジとすると  $M_{yab} = 0$ ,  $M_{zab} = 0$  であるから式 (7) より

$$\left. \begin{aligned} M_{yba} &= \frac{k_{yab}}{2} (3\varphi_{yb} + \psi_{yab}) - \frac{\lambda_{ab}}{2} (3\varphi_{zb} + \psi_{zab}) + H_{yba} \\ M_{zba} &= \frac{k_{zab}}{2} (3\varphi_{zb} + \psi_{zab}) - \frac{\lambda_{ab}}{2} (3\varphi_{yb} + \psi_{yab}) + H_{zba} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を得る. ここに  $H_{ba} = C_{ba} - C_{ab}/2$  である. もし b 端が  $y, z$  周りともにヒンジであるとするならばこの場合には式 (8) の  $M, \varphi, H$  の添字 a, b を入れ替えることによって得られる.

次に第4図の肘形ラーメンの部材 ac の剪断中心にラーメン面内の荷重が作用している場合を考えると, 部材の主軸が  $xy$  平面に一致せぬときには節点 a は一般に  $z$  軸まわりの回転を生ずると同時に,  $z$  方向の変位と  $x$  軸まわりの回転が生ずる. この  $x$  軸まわりの回転角  $\varphi_{xa}$  は部材 ab に振りを与える. 従って振りに対する基本式が必要となる.



第4図

振りモーメントと相対振れ角の間の関係は振りモーメントの値が材長に沿って一定でなかったり, 断面の反りが拘束されている場合に対しては両者は比例関係にない. しかし断面が充実断面でしかも部材の断面寸法に較べて部材長が大きい場合には, 断面の拘束の振り角におよぼす影響は小さいようである.<sup>3)</sup> そこで振りに対する端モーメント式として次式を用いる.<sup>4)</sup>

$$\left. \begin{aligned} M_{xab} &= 2\beta k_{xab} (\varphi_{xa} - \varphi_{xb}) + C_{xab}, \\ M_{xab} &= 2\beta k_{xab} (\varphi_{xb} - \varphi_{xa}) + C_{xba}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに,  $\beta = m/8(m+1)$ ,  $k = K/K_0$ ,  $K = J/l$ ,  $m =$  Poisson 数,  $J =$  振り抵抗係数,  $K_0 =$  規準剛度,  $C =$  中間トルクに対する荷重項 である.

以上端モーメント式として式 (7), (8), (9), を得たが部材の主軸がラーメンの面内にある場合に対しては  $I_{yz} = 0$  であるから  $\lambda = 0$  となり式 (7), (8) とも形の上で通常の端モーメント式に一致する故荷重項もまた通常用いられているものと一致しなくてはならない. しかしながら部材の主軸がラーメンの面内でない場合に対しては両式の荷重項  $C, H$  が通常の値と同値のものであるかは疑問である. 次に荷重項について考えよう.

(3) 荷重項

式(7)の荷重項 $C$ は部材を単純梁と考慮して、荷重によって起る両端の接線角 $\tau_{ya0}$ ,  $\tau_{yb0}$ ,  $\tau_{za0}$ ,  $\tau_{zb0}$ をちょうど0に引きもどすために加うべきモーメントであるから、式(6)へ $-\tau_{ya0}$ ,  $-\tau_{yb0}$ ,  $-\tau_{za0}$ ,  $-\tau_{zb0}$ を代入し $M$ の代わりに $C$ とおくと

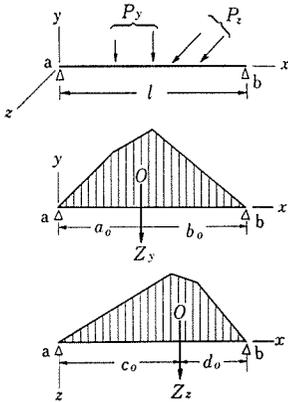
$$C_{yab} = -\frac{2E}{l} [I_y(2\tau_{ya0} + \tau_{yb0}) - I_{yz}(2\tau_{za0} + \tau_{zb0})],$$

$$C_{yba} = -\frac{2E}{l} [I_y(\tau_{ya0} + 2\tau_{yb0}) - I_{yz}(\tau_{za0} + 2\tau_{zb0})],$$

$$C_{zab} = -\frac{2E}{l} [I_z(2\tau_{za0} + \tau_{zb0}) - I_{yz}(2\tau_{ya0} + \tau_{yb0})],$$

$$C_{zba} = -\frac{2E}{l} [I_z(\tau_{za0} + 2\tau_{zb0}) - I_{yz}(\tau_{ya0} + 2\tau_{yb0})].$$

この $\tau_{ya0}$ ,  $\tau_{yb0}$ ,  $\tau_{za0}$ ,  $\tau_{zb0}$ は1, (1)の非対称曲げに対するMohrの定理を用いることによって求めることができる。今第5図のような $P_y$ ,  $P_z$ の荷重について考えると



$$\tau_{za0} = \frac{I_y Z_y b_0 + I_{yz} Z_z d_0}{El(I_y I_z - I_{yz}^2)},$$

$$\tau_{zb0} = -\frac{I_y Z_y a_0 + I_{yz} Z_z c_0}{El(I_y I_z - I_{yz}^2)},$$

$$\tau_{ya0} = \frac{I_z Z_z d_0 + I_{yz} Z_y b_0}{El(I_y I_z - I_{yz}^2)},$$

$$\tau_{yb0} = -\frac{I_z Z_z c_0 + I_{yz} Z_y a_0}{El(I_y I_z - I_{yz}^2)}$$

となる。ここに $Z_y$ ,  $Z_z$ はそれぞれ $y$ ,  $z$ 方向の $M$ 荷重の合力である。これより

第5図

$$\left. \begin{aligned} C_{yab} &= \frac{2}{l^2} (l - 3d_0) Z_z, & C_{yba} &= -\frac{2}{l^2} (l - 3c_0) Z_z, \\ C_{zab} &= \frac{2}{l^2} (l - 3b_0) Z_y, & C_{zba} &= -\frac{2}{l^2} (l - 3a_0) Z_y \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を得る。この結果は通常用いられている荷重項に外ならない。従って式(7)における荷重項は通常用いられている値をそのまま用いることができる。これより式(8)の $H$ もまた通常示されている荷重項表を使用できることが分る。但し荷重の方向は第5図に示す $P_y$ ,  $P_z$ の方向を正とする。

### 3. 断面の性質

前述のように非対称曲げを取り扱う場合には、基本軸  $x, y$ 、に関する断面二次モーメント  $I_x, I_y$  のほかに断面の相乗モーメント  $I_{xy}$  を知る必要があり、さらに捩りに関しては断面の捩り抵抗係数  $J$  を求めておかななくてはならない。

#### (1) 断面二次モーメントと相乗モーメント

数種の平面図形に対する  $I_x, I_y, I_{xy}$  の値を示したのが第1表である。

第1表 断面二次モーメントと相乗モーメント

図形	$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$
	$\frac{ab}{12}(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$	$\frac{ab}{12}(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)$	$\frac{ab}{24}(a^2 - b^2)\sin 2\alpha$
	$\frac{1}{6} \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{ab}{12} \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$	$\frac{a^2b^2}{12} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
	$\frac{1}{36}ah^3$	$\frac{1}{36}a^3h$	$\frac{1}{72}a^2h^2$
	$\frac{1}{36}ah^3$	$\frac{1}{36}ah(a^2 - bc)$	$\frac{1}{72}h^2(c^2 - b^2)$
	$\frac{1}{12}ah^3$	$\frac{ah}{12}(a^2 + c^2)$	$\frac{1}{12}ach^2$
	$\frac{1}{12}(ah_1^3 - bh_2^3)$	$\frac{1}{12}[(h_2 + t_2)t_1^3 + t_2(a + b)^3]$	$\frac{1}{2}abt_2(h_2 + t_2)$

## (2) 振り抵抗係数

部材の長さ  $l$ , トルク  $M$ , 相対振れ角  $\theta$ , 振り抵抗係数を  $J$  とすると  $M = JG\theta/l$  で表わされる。この  $J$  の値の主なるものを示すと次の通りである。

- a) 矩形断面 (2 辺を  $a, b$  とし, かつ  $a > b$ )

$$\text{St. Venant の式} \quad J = \left[ \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{b^4}{a^4} \right) \right] ab^3$$

- b) 圧延形鋼断面

$$J = \frac{1}{3} \Sigma t^3 s$$

ここに  $t, s$  は断面を巾の狭い矩形断面に分割したときの分割断面の厚さと長さを表わす。

- c) 楕円形断面 ( $A$  は断面積,  $I_p$  は断面二次極モーメント)

$$J = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}$$

- d) 正三角形断面 (一辺  $a$ )

$$J = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$$

- e) 直角二等辺三角形断面 (二等辺  $a$ )

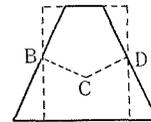
$$J = \frac{a^4}{38.3}$$

- f) 台形断面

図心  $C$  より垂線  $BD$  を下すと図の点線によって示される矩形として求められる (第 6 図)。

- g) 完全な凸型の周をもつ断面の近似式

$$J = \frac{A^4}{40I_p}$$



第 6 図

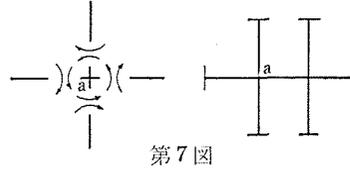
- h) 不規則断面

この場合に対する  $J$  の計算には Griffith, Taylor 法がある。断面が中空でない非対称断面の場合には, 特にこの方法によらなくてはならない。また同じく中空でない断面の  $J$  の近似値は断面積  $A$  と断面二次極モーメント  $I_p$  の等値な楕円として c) の式より求めることができるが, 結局これは g) の式にほかならない。

#### 4. 解 法

与えられた矩形ラーメンに対して各部材の軸線に一致するように共通な基本軸  $x, y, z$  をとれば 1 節点 (たとえば a) における回転角は  $\theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}$  であり, 連続の条件は必然的に満足される。従って釣り合いの条件のみについて考えればよい。

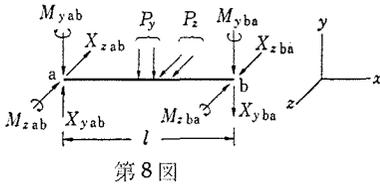
節点 a に数多くの部材が結合されている場合に節点 a における釣り合うための条件は立体ラーメンにおける条件と全く同様である。すなわち



第7図

$$\Sigma M_{xa} = \bar{M}_{xa}, \quad \Sigma M_{ya} = \bar{M}_{ya}, \quad \Sigma M_{za} = \bar{M}_{za}. \quad (11)$$

ここに  $\bar{M}$  は節点 a に働く外力としてのモーメントである。従って節点方程式の数は各節点に対し 3 つずつ得られ、全体として節点の 3 倍の数すなわち未知数  $\phi$  の数に一致する。

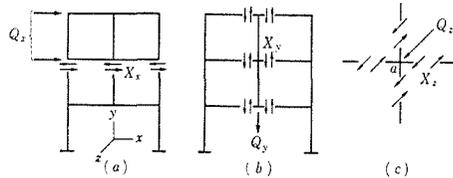


第8図

一つの部材 ab にはその部材の軸方向（この場合は x 軸）を除く他の y, z 方向に端せん力が働く（第8図）。この大きさは通常用いられている端せん力式によって与えられる。たとえば、第8図の  $X_y$  については

$$\left. \begin{aligned} X_{yab} &= -\frac{1}{l}(M_{zab} + M_{zba}) + \bar{X}_{yab}, \\ X_{yba} &= -\frac{1}{l}(M_{zab} + M_{zba}) + \bar{X}_{yba}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに  $\bar{X}$  は部材を単純梁と見なしたときの荷重による支点反力であり、符号は第8図の方向を正とする。せん力方程式について考えると例えば第9図の場合には層方程式 (a) 図) のほかに各節点について y, z 方向のせん力の釣り合いを考えねばならない (b), (c) 図)。それ故せん力式として次式を得る。



第9図

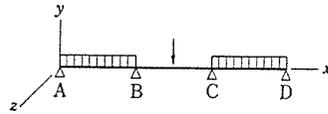
$$\Sigma X_x = Q_x, \quad \Sigma X_y = Q_y, \quad \Sigma X_z = Q_z. \quad (13)$$

上式の第1式は層の数だけ立てられるから、その数は柱の z 軸まわりの部材角  $\phi_z$  の数に等しい。第2式は支点をもたない柱（例えばフィレンディールの中間の柱、第13図）の数だけ立てられ、その数は梁の z 軸まわりの部材角  $\phi_z$  の数に等しい。同様に第3式は各柱について x 軸まわりの部材角  $\phi_x$  の数だけ成立する。その他の部材角としては梁の y 軸まわりの  $\phi_y$  が考えられるが、これは柱の  $\phi_x$  を用いて表わすことができる故未知数の中には含まれない。従って弾性方程式の数は未知数の数に一致し、解は一般的に成立する。なお各部材の  $\phi$  の間の相互関係を求めるのに適合条件を用いることは本法においても同様である。次に二・三の例について未知数の数と弾性方程式の数

を求めてみよう。

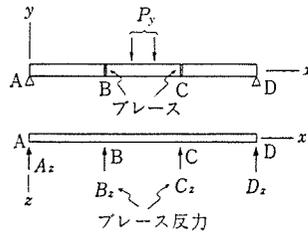
(1) 連続梁

梁の軸を  $x$  軸にとり、各支点は  $y, z$  方向とも曲げに対して単純に支持されているが支点のうちのあるものは  $x$  軸まわりの回転を拘束するものとする。この場合には  $M_x$  は別に計算できるから  $y, z$  軸まわりについて求めればよい。第10図の場合には未知数として  $\varphi_{yB}, \varphi_{zB}, \varphi_{yC}, \varphi_{zC}$  の計4、弾性方程式は、 $\Sigma M_{yB} = 0, \Sigma M_{yC} = 0, \Sigma M_{zB} = 0, \Sigma M_{zC} = 0$  の計4である。但し  $M_{BA}, M_{CD}$  に対しては式(8)を用いる。特に第10図の場合に AB 部材 CD 部材の長さ性質とも等しく、かつ全体の荷重が対称的に働く場合には  $\varphi_{yB} = -\varphi_{yC}, \varphi_{zB} = -\varphi_{zC}$  であり、弾性方程式は  $\Sigma M_{yB} = 0, \Sigma M_{zB} = 0$  の2式で十分である。各支点とも  $y, z$  方向に沈下がなければ  $\phi = 0$  で、沈下があればこれによって  $\phi$  が生ずるが、この量は既知数である。いずれにしてもこの場合には弾性方程式は節点方程式のみでよく、その数は中間支点の2倍である。



第10図

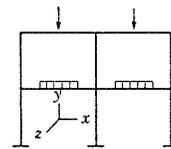
特別な場合として B, C 支点は  $z$  方向のたわみに対しては拘束するが  $y$  方向に対しては自由にたわむことのできる支点とすると、梁 AD 間の B, C 点に横方向<sup>2)</sup>支承を設けて梁の横たわみを阻止する問題となり、横方向支承に働く力  $B_z, C_z$  の算定に利用できる。第11図の場合には未知数としては第10図における  $\varphi_{yB}, \varphi_{zB}, \varphi_{yC}, \varphi_{zC}$  のほかに  $\phi_{zAB}, \phi_{zBC}$  が加わり計6。これに対し弾性方程式は  $\Sigma M_{yB} = 0, \Sigma M_{yC} = 0, \Sigma M_{zB} = 0, \Sigma M_{zC} = 0, \Sigma X_{yB} = 0, \Sigma X_{yC} = 0$  の計6であり問題は解ける。求められた端モーメントのうち  $M_y$  の値を用いて横方向支承に働く力  $B_z, C_z$  が得られる。梁の性質が等しく荷重が対称の場合には弾性方程式は3つで十分である。



第11図

(2) ラーメン

第12図のラーメンについて考えると、各節点にて  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  が生じ計18。 $\phi_x$  の数は各層について1つずつ計2。 $\phi_x$  は柱の数に一致する故計6。未知数の数は合計26である。これに対し弾性方程式は各節点での節点方程式  $\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$ , 計18。層方程式が2。節点での  $\Sigma X_z = 0$  が節点の数6。よつて合計26である。従って問題は解ける。



第12図

もし全部の梁の  $\lambda$  が  $\lambda = 0$  (柱は  $\lambda \neq 0$ ) で対称軸(第12図の場合には中央の柱)に対して左右の梁、柱の  $k$  が等しく、かつ柱の  $\lambda$  の間には  $\lambda_l = \lambda_r$ , あるいは  $\lambda_l = -\lambda_r$  ( $\lambda$  は対称軸に対して左側の柱の  $\lambda$ , これと対称な位置にある右側の柱の  $\lambda$  が  $\lambda_r$ ) が成り立ち、さらに荷重状態が対称あるいは逆対称の場合に

は未知数と弾性方程式の数を減らすことができる。

例えば後述の計算例(2)の1径間門型ラーメンの弾性方程式(第4表)を例にとると対称荷重に対しては  $C_{zBC} = -C_{zCB}$  であり、さらに  $k_{xAB} = k_{xCD}$ ,  $k_{yAB} = k_{yCD}$ ,  $k_{zAB} = k_{zCD}$  とする。今  $\lambda_{BC} = 0$  の場合に対して  $\lambda_{AB} = \lambda_{CD}$  あるいは  $\lambda_{AB} = -\lambda_{CD}$  の2通りについて考えよう。さて  $\lambda_{AB} = \lambda_{CD}$  の場合には第4表の各式の係数の比較により  $\varphi_{xB} = -\varphi_{xC}$ ,  $\varphi_{yB} = \varphi_{yC}$ ,  $\varphi_{zB} = -\varphi_{zC}$ ,  $\phi_{xAB} = -\phi_{xCD}$ ,  $\phi_{zAB} = 0$  とおくと第1式と第2式, 第3式と第4式, 第5式と第6式, 第7式と第8式はそれぞれ同じ式となり、さらに上記の条件は第9式を満足する。このことは  $k, \lambda$  の値に関せず成り立つから  $C_{zBC} = -C_{zCB}$ ,  $k_{xAB} = k_{xCD}$ ,  $k_{yAB} = k_{yCD}$ ,  $k_{zAB} = k_{zCD}$ ,  $\lambda_{BC} = 0$  の条件のもとに  $\lambda_{AB} = \lambda_{CD}$  の場合に対しては  $\varphi_{xB} = -\varphi_{xC}$ ,  $\varphi_{yB} = \varphi_{yC}$ ,  $\varphi_{zB} = -\varphi_{zC}$ ,  $\phi_{xAB} = -\phi_{xCD}$ ,  $\phi_{zAB} = 0$  が成立することを意味する。次に同じく対称荷重に対して  $\lambda_{AB} = -\lambda_{CD}$  の場合には前と同様にして  $\varphi_{xB} = \varphi_{xC}$ ,  $\varphi_{yB} = -\varphi_{yC}$ ,  $\varphi_{zB} = -\varphi_{zC}$ ,  $\phi_{xAB} = \phi_{xCD}$ ,  $\phi_{zAB} = 0$  が成り立つ。従ってこの両者の場合に対しては未知数は9つのうち5つを減ずることができる故4である。これに対しこの場合の弾性方程式は  $\Sigma M_{xB} = 0$ ,  $\Sigma M_{yB} = 0$ ,  $\Sigma M_{zB} = 0$ ,  $\Sigma X_{zB} = 0$  の計4つで十分である。

逆対称荷重の場合にも求めることができるが、それらの間の関係を示したのが第2表である。この表は多径間ラーメンに対しても用いることができる。この表を用いた例を計算例(3)に示した。

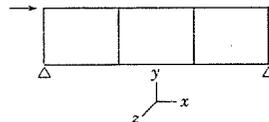
第2表 ラーメンの対称条件と逆対称条件

柱の $\lambda$	対 称 荷 重		逆 対 称 荷 重	
	$\lambda l = \lambda r$	$\lambda l = -\lambda r$	$\lambda l = \lambda r$	$\lambda l = -\lambda r$
$\varphi_x$	$\varphi_{xl} = -\varphi_{xr}$	$\varphi_{xl} = \varphi_{xr}$	$\varphi_{xl} = \varphi_{xr}$	$\varphi_{xl} = -\varphi_{xr}$
$\varphi_y$	$\varphi_{yl} = \varphi_{yr}$	$\varphi_{yl} = -\varphi_{yr}$	$\varphi_{yl} = -\varphi_{yr}$	$\varphi_{yl} = \varphi_{yr}$
$\varphi_z$	$\varphi_{zl} = -\varphi_{zr}$	$\varphi_{zl} = -\varphi_{zr}$	$\varphi_{zl} = \varphi_{zr}$	$\varphi_{zl} = \varphi_{zr}$
$\phi_x$	$\phi_{xl} = -\phi_{xr}$	$\phi_{xl} = \phi_{xr}$	$\phi_{xl} = \phi_{xr}$	$\phi_{xl} = -\phi_{xr}$

ただし、梁は  $\lambda = 0$ 、外力は  $xy$  平面内に作用する場合、添字の  $l, r$  は対称軸より対称な左右を意味する。

(3) フィーレンティール

この型に対しては例えば第13図の場合について考えると、未知数は各節点につき  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  であるから  $\varphi$  に対して計24,  $\phi$  の数は下側の梁に対し  $\phi_z$  が2つ  $\varphi_y$  が2つ計4。柱については各柱に  $\phi_x$  が1つずつ、柱全体に共通な  $\phi_z$  が1つ計5。上側の梁の  $\phi$  は適合条件より前記の  $\phi$  にて表わさるから 結局全体として  $\phi$  の数は合計9。従って未知数の数は33である。これに対し弾性方程式は節点方程式  $\Sigma M_x = 0$ ,  $\Sigma M_y = 0$ ,  $\Sigma M_z = 0$  が各節点について適用されるから計24。層方程式  $\Sigma X_x = 0$  が1つ。せん力方程式  $\Sigma X_z = 0$  が節点の数(支



第13図

点を除く) 6. 同じく  $\Sigma X_y = 0$  が支点をもたない柱の数だけ, すなわち 2. よって弾性方程式は合計 33 である. 但し第 13 図の構造物が  $x$  軸まわりに対しても安定であるためには, 支点のうちの少なくとも 1 つは  $x$  軸まわりの回転に対し拘束する構造でなくてはならない. その場合にはその支点における  $\varphi$  は  $\varphi_x = 0$  であり, 弾性方程式もその点における  $\Sigma M_x = 0$  を除外することができるから未知数の数, 弾性方程式の数ともそれだけ少なくなる.

## 5. 計 算 例

### (1) 横方向支承を有する単純支持梁

第 14 図に示すように Z 断面の梁 AD の中間 B, C に横方向支承を設けた梁に対して計算しよう. この B, C の横方向支承は次のような性質を有するものとする. i)  $x$  軸まわりの回転と  $z$  方向の変位に対して拘束する.

ii) しかしながら  $y$  軸および  $x$  軸まわりの回転と  $y$  方向の変位に対しては拘束しない.

部材 AB, BC, CD と  $l = 70$  in,

$I_z = 9.07$  in<sup>4</sup>,  $I_y = 1.41$  in<sup>4</sup>,  $I_{yz} = 2.60$

in<sup>4</sup> であり, 荷重は  $P = 522$  lb である.\* 従って  $K_0 = K_z = I_z/l = 0.1296$  in<sup>3</sup> とすると,  $k_z = 1$ ,  $k_y = K_y/K_0 = I_y/I_z = 0.155$ ,  $\lambda = A/K_0 = I_{yz}/I_z = 0.287$  となる. 次に対称条件より  $\varphi_{yB} = -\varphi_{yC}$ ,  $\varphi_{zB} = -\varphi_{zC}$ ,  $\psi_{zAB} = -\psi_{zCD}$ ,  $\psi_{zBC} = 0$  である. BC 点では  $z$  方向のたわみが阻止される故  $\psi_{yAB} = \psi_{yBC} = \psi_{yCD} = 0$  が成り立つ. 荷重項は  $C_{zBC} = -7875$  in lb となるから端モーメント式と端せん力式は式 (7), (8), (12) より次のようになる.

$$M_{yBA} = -M_{yCD} = \frac{0.155}{2} \cdot 3\varphi_{yB} - \frac{0.287}{2}(3\varphi_{zB} + \psi_{zAB}),$$

$$M_{zBA} = -M_{zCD} = \frac{1}{2}(3\varphi_{zB} + \psi_{zAB}) - \frac{0.287}{2} \cdot 3\varphi_{yB},$$

$$M_{yBC} = -M_{yCB} = 0.155\varphi_{yB} - 0.287\varphi_{zB},$$

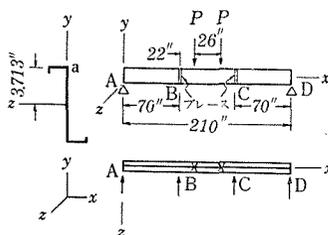
$$M_{zBC} = -M_{zCB} = \varphi_{zB} - 0.287\varphi_{yB} - 7875,$$

$$X_{yBA} = -\frac{1}{l}(M_{zAB} + M_{zBA}) = -\frac{1}{70}(1.5\varphi_{zB} + 0.5\psi_{zAB} - 0.430\varphi_{yB}),$$

$$X_{yBC} = -\frac{1}{l}(M_{zBC} + M_{zCB}) + X_{y0} = 522.$$

これより弾性方程式は

\* 比較のため文献 2) の計算例の値を用いた,



第 14 図

$$\begin{aligned} \Sigma M_{yB} = M_{yBA} + M_{yBC} = 0 : & \quad 0.388\varphi_{yB} - 0.717\varphi_{zB} - 0.143\phi_{zAB} = 0, \\ \Sigma M_{zB} = M_{zBA} + M_{zBC} = 0 : & \quad -0.717\varphi_{yB} + 2.5\varphi_{zB} + 0.5\phi_{zAB} = 7875, \\ \Sigma X_y = X_{yBA} - X_{yBC} = 0 : & \quad -0.430\varphi_{yB} + 1.5\varphi_{zB} + 0.5\phi_{zAB} = -36540 \end{aligned}$$

となる。これを解くと

$$\varphi_{yB} = +12.84 \times 10^3, \quad \varphi_{zB} = +48.1 \times 10^3, \quad \phi_{zAB} = -206.3 \times 10^3$$

を得る。よって端モーメントの値は第3表のようになる。これよりB, Cに働く力は

$$B_z = C_z = \frac{M_{yBA}}{l} = 169 \text{ lb}$$

となりこの値は Winter の解に一致する\*。第15図にモーメント図と支点反力を示した。梁の任意点におけるたわみは 1, (1)の非対称曲げに対する Mohr の定理を用いることによって得られる。すなわち梁ADにy軸方向の2Pとz軸方向のBz, Czが作用していると考え、たわみ  $\delta_y, \delta_z$  は 2P によって生ずる  $\delta_{y1}, \delta_{z1}$  と Bz, Cz による  $\delta_{y2}, \delta_{z2}$  の和で表わされる。また  $M_y, M_z$  によって生ずる<sup>11)</sup>曲げ応力は

$$\sigma_x = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} [(I_z z - I_{yz} y) M_y + (I_{yz} z - I_y y) M_z]$$

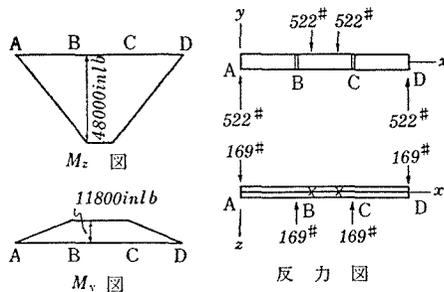
によって求められる。この計算例の場合中央点のたわみは  $\delta_y = 0.74 \text{ in}$  (-y方向),  $\delta_z = 0.05 \text{ in}$  (+z方向) となり、第14図の a 点における  $\sigma_x$  は荷重点で 22 800 psi (圧縮) となった (これに対し、 $M_y, I_{yz}$  を考慮せぬときには  $\sigma_x = -M_{zy}/I_z = -19 660 \text{ psi}$  となる)。これらの結果は Winter の解  $\delta_y = 0.757 \text{ in}, \delta_z = 0.05 \text{ in}, \sigma_x = 23 200 \text{ psi}$  にほとんど一致する。この両者の僅かな相違はBCにおける反力  $B_z$  の相違によるものである。

以上はたわみ角法によって横方向支承に働く力を求めたが、このような簡単な問題の場合には 1, (1)の非対称曲げに対する Mohr の定理を用いても容易に解ける。すなわち部材ADを単純梁と考えると

\* Winter の論文では166 lb となっているが、同氏の方法にて計算しても169 lb となることがわかった、従って同氏の誤算と思われる。

第3表 端モーメント (単位 10<sup>3</sup>in lb)

部材	A B		B C	
	A	B	B	C
$M_y$	0	+11.8	-11.8	+11.8
$M_z$	0	-36.5	+36.5	-36.5



第15図 曲げモーメント図と反力

i)  $P$ によるB点の横たわみの計算

$$\frac{I_{yz}M_z}{E(I_yI_z - I_{yz}^2)} \Big|_{荷重点} = 39.68 \frac{P}{E}$$

よってB点の横たわみ  $\delta_{zB}'$  は

$$\begin{aligned} \delta_{zB}' &= \left( 2341 \times 70 - 30.19 \times \frac{70}{2} \times \frac{70}{3} \right) \frac{P}{E} \\ &= 139200 \frac{P}{E} \quad (+z \text{ 方向}) \end{aligned}$$

ii) B, Cの反力  $B_z$ による  $z$ 方向のたわみの計算

$$\frac{I_zM_y}{E(I_yI_z - I_{yz}^2)} \Big|_{荷重点} = 105.3 \frac{B_z}{E}$$

よってB点の  $z$ 方向のたわみ  $\delta_{zB}''$  は

$$\begin{aligned} \delta_{zB}'' &= \left( 7372 \times 70 - 105.3 \times \frac{70}{2} \times \frac{70}{3} \right) \frac{B_z}{E} \\ &= 430000 \frac{B_z}{E} \quad (-z \text{ 方向}) \end{aligned}$$

iii)  $B_z$ の算定

Bにては  $z$ 方向のたわみは 0 でなくてはならないから

$$\delta_{zB} = \delta_{zB}' + \delta_{zB}'' = 0 \quad \text{より} \quad B_z = 0.3237P = 169 \text{ lb}$$

となり、先に求めた値と一致する。

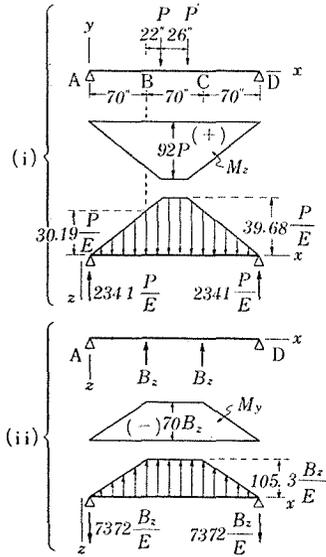
このように、本法は横方向支承を有する梁の問題を解く場合にも利用することができる。この問題のように梁 AD が一様断面の場合には Winter の方法によって解くのも便利ではあるが、もし BC 部材に補剛板を取りつけたようなときには Winter の方法による  $z$ 方向の仮想荷重の算定に際しては一考する必要がある。しかしながら本法はこのような場合に対しても全く同様な手段で解を得ることができると云う利点がある。

(2) 1 径間門型ラーメン

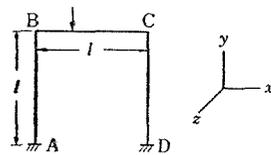
1 径間門型ラーメンの梁 BC に荷重が作用している場合 (第17図) に対して解く。支点 A, D は固定端であるから  $\varphi_{xA}, \varphi_{yA}, \varphi_{zA}, \varphi_{xD}, \varphi_{yD}, \varphi_{zD}$  はいずれも 0 である。また支点の移動を認めぬときは  $\phi_{zBC} = 0$  にして、 $\phi_{yBC}$  は  $\phi_{yBC} = \phi_{xAB} - \phi_{xCD}$  となり、 $\phi_{xCD} = \phi_{xAB}$  となる。これより端モーメント式は

部材 AB :

$$M_{xAB} = k_{xAB}(\varphi_{xB} + \phi_{xAB}) - \lambda_{AB}(\varphi_{zB} + \phi_{zAB}),$$



第16図



第17図

$$\begin{aligned}
M_{xBA} &= k_{xAB}(2\varphi_{xB} + \phi_{xAB}) - \lambda_{AB}(2\varphi_{zB} + \phi_{zAB}), \\
M_{yAB} &= -2\beta k_{yAB}\varphi_{yB}, & M_{yBA} &= 2\beta k_{yAB}\varphi_{yB}, \\
M_{zAB} &= k_{zAB}(\varphi_{zB} + \phi_{zAB}) - \lambda_{AB}(\varphi_{xB} + \phi_{xAB}), \\
M_{zBA} &= k_{zAB}(2\varphi_{zB} + \phi_{zAB}) - \lambda_{AB}(2\varphi_{xB} + \phi_{xAB}).
\end{aligned}$$

部材 BC :

$$\begin{aligned}
M_{xBC} &= 2\beta k_{xBC}(\varphi_{xB} - \varphi_{xC}), & M_{xCB} &= 2\beta k_{xBC}(\varphi_{xC} - \varphi_{xB}), \\
M_{yBC} &= k_{yBC}(2\varphi_{yB} + \varphi_{yC} + \phi_{xAB} - \phi_{xCD}) - \lambda_{BC}(2\varphi_{zB} + \varphi_{zC}), \\
M_{yCB} &= k_{yBC}(\varphi_{yB} + 2\varphi_{yC} + \phi_{xAB} - \phi_{xCD}) - \lambda_{BC}(\varphi_{zB} + 2\varphi_{zC}), \\
M_{zBC} &= k_{zBC}(2\varphi_{zB} + \varphi_{zC}) - \lambda_{BC}(2\varphi_{yB} + \varphi_{yC} + \phi_{xAB} - \phi_{xCD}) + C_{zBC}, \\
M_{zCB} &= k_{zBC}(\varphi_{zB} + 2\varphi_{zC}) - \lambda_{BC}(\varphi_{yB} + 2\varphi_{yC} + \phi_{xAB} - \phi_{xCD}) + C_{zCB}.
\end{aligned}$$

部材 CD :

$$\begin{aligned}
M_{xCD} &= k_{xCD}(2\varphi_{xC} + \phi_{xCD}) - \lambda_{CD}(2\varphi_{zC} + \phi_{zAB}), \\
M_{xDC} &= k_{xCD}(\varphi_{xC} + \phi_{xCD}) - \lambda_{CD}(\varphi_{zD} + \phi_{zAB}), \\
M_{yCD} &= 2\beta k_{yCD}\varphi_{yC}, & M_{yDC} &= -2\beta k_{yCD}\varphi_{yC}, \\
M_{zCD} &= k_{zCD}(2\varphi_{zC} + \phi_{zAB}) - \lambda_{CD}(2\varphi_{xC} + \phi_{xCD}), \\
M_{zDC} &= k_{zCD}(\varphi_{zC} + \phi_{zAB}) - \lambda_{CD}(\varphi_{xC} + \phi_{xCD}).
\end{aligned}$$

端せん力式

$$\begin{aligned}
X_{xBA} &= -\frac{1}{l} (M_{xAB} + M_{zBA}) = -\frac{1}{l} [k_{xAB}(3\varphi_{zB} + 2\phi_{zAB}) - \lambda_{AB}(3\varphi_{xB} + 2\phi_{xAB})], \\
X_{xCD} &= -\frac{1}{l} (M_{zCD} + M_{xDC}) = -\frac{1}{l} [k_{zCD}(3\varphi_{zC} + 2\phi_{zAB}) - \lambda_{CD}(3\varphi_{xC} + 2\phi_{xCD})], \\
X_{zBA} &= -\frac{1}{l} (M_{xAB} + M_{zBA}) = -\frac{1}{l} [k_{xAB}(3\varphi_{zB} + 2\phi_{zAB}) - \lambda_{AB}(3\varphi_{zB} + 2\phi_{zAB})], \\
X_{zBC} = X_{zCB} &= -\frac{1}{l} (M_{yBC} + M_{yCB}) = -\frac{1}{l} [k_{yBC}(3\varphi_{yB} + 3\varphi_{yC} + 2\phi_{xAB} - 2\phi_{xCD}) \\
&\quad - \lambda_{BC}(3\varphi_{zB} + 3\varphi_{zC})], \\
X_{xCD} &= -\frac{1}{l} (M_{xCD} + M_{xDC}) = -\frac{1}{l} [k_{xCD}(3\varphi_{xC} + 2\phi_{xCD}) - \lambda_{CD}(3\varphi_{zC} + 2\phi_{zAB})].
\end{aligned}$$

弾性方程式

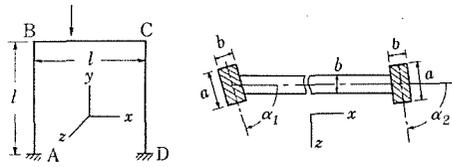
$$\begin{aligned}
\text{i) } \quad \Sigma M_{xB} &= M_{xBA} + M_{xBC} = 0, & \text{ii) } \quad \Sigma M_{xC} &= M_{xCB} + M_{xCD} = 0, \\
\text{iii) } \quad \Sigma M_{yB} &= M_{yBA} + M_{yBC} = 0, & \text{iv) } \quad \Sigma M_{yC} &= M_{yCB} + M_{yCD} = 0, \\
\text{v) } \quad \Sigma M_{zB} &= M_{zBA} + M_{zBC} = 0, & \text{vi) } \quad \Sigma M_{zC} &= M_{zCB} + M_{zCD} = 0, \\
\text{vii) } \quad \Sigma X_{zB} &= X_{zBA} + X_{zBC} = 0, & \text{viii) } \quad \Sigma X_{zC} &= -X_{zCB} + X_{zCD} = 0, \\
\text{ix) } \quad \Sigma X_x &= X_{xBA} + X_{xCD} = 0.
\end{aligned}$$

上記の弾性方程式に端モーメント式と端せん力式を代入した結果を第4表に示した。

第4表 弾性方程式

方程式	左 辺									右 辺
	$\varphi_{xB}$	$\varphi_{xC}$	$\varphi_{yB}$	$\varphi_{yC}$	$\varphi_{zB}$	$\varphi_{zC}$	$\varphi_{xAB}$	$\varphi_{xCD}$	$\varphi_{zAB}$	
$\Sigma M_{xB} = 0$	$\frac{2(k_{xAB} + \beta k_{xBC})}{\beta}$	$-2\beta k_{xBC}$			$-2\lambda_{AB}$		$k_{xAB}$		$-\lambda_{AB}$	
$\Sigma M_{xC} = 0$	$-2\beta k_{xBC}$	$\frac{2(k_{xCD} + \beta k_{xBC})}{\beta}$				$-2\lambda_{CD}$		$k_{xCD}$	$-\lambda_{CD}$	
$\Sigma M_{yB} = 0$			$\frac{2(k_{yBC} + \beta k_{yAB})}{\beta}$	$k_{yBC}$	$-2\lambda_{BC}$	$-\lambda_{BC}$	$k_{yBC}$	$-k_{yBC}$		
$\Sigma M_{yC} = 0$			$k_{yBC}$	$\frac{2(k_{yBC} + \beta k_{yCD})}{\beta}$	$-\lambda_{BC}$	$-2\lambda_{BC}$	$k_{yBC}$	$-k_{yBC}$		
$\Sigma M_{zB} = 0$	$-2\lambda_{AB}$		$-2\lambda_{BC}$	$-\lambda_{BC}$	$\frac{2(k_{zAB} + k_{zBC})}{\beta}$	$k_{zBC}$	$-(\lambda_{AB} + \lambda_{BC})$	$\lambda_{BC}$	$k_{zAB}$	$-C_{zBC}$
$\Sigma M_{zC} = 0$		$-2\lambda_{CD}$	$-\lambda_{BC}$	$-2\lambda_{BC}$	$k_{zBC}$	$\frac{2(k_{zBC} + k_{zCD})}{\beta}$	$-\lambda_{BC}$	$-(\lambda_{CD} - \lambda_{BC})$	$k_{zCD}$	$-C_{zCB}$
$\Sigma X_{zB} = 0$	$3k_{xAB}$		$3k_{yBC}$	$3k_{yBC}$	$-\frac{3(\lambda_{AB} + \lambda_{BC})}{\beta}$	$-3\lambda_{BC}$	$\frac{2(k_{xAB} + k_{yBC})}{\beta}$	$-2k_{yBC}$	$-2\lambda_{AB}$	
$\Sigma X_{zC} = 0$		$3k_{xCD}$	$-3k_{yBC}$	$-3k_{yBC}$	$3\lambda_{BC}$	$-\frac{3(\lambda_{CD} - \lambda_{BC})}{\beta}$	$-2k_{yBC}$	$\frac{2(k_{yBC} + k_{zCD})}{\beta}$	$-2\lambda_{CD}$	
$\Sigma X_x = 0$	$-3\lambda_{AB}$	$-3\lambda_{CD}$			$3k_{zAB}$	$3k_{zCD}$	$-2\lambda_{AB}$	$-2\lambda_{CD}$	$\frac{2(k_{zAB} + k_{zCD})}{\beta}$	

さて各部材とも矩形断面 ( $a/b = 2$ ) からなり、かつ  $\lambda_{BC} = 0$  の場合について、第18図の  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  と  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 45^\circ$  の2種類について計算しよう。この場合には部材の剛比  $k$  と  $\lambda$  の値は第5表のようになる。但し Poisson 数は  $m = 4$  とし、振り抵抗係数  $J$  は St. Venant の式より算出した。  $k, \lambda$  の値を第4表の弾性方程式へ代入して解くと次の値を得る。



第18図

第5表 部材寸法, 剛比,  $\lambda$  の値

部 材		AB	BC	CD
断 面		$a \times b$	$a \times b$	$a \times b$
長 さ		$l$	$l$	$l$
$k$	$x$	0.625	0.687	0.625
	$y$	0.687	0.250	0.687
	$z$	0.625	1.000	0.625
$\lambda$		0.375	0.000	0.375 (-0.375)

但し  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ , ( ) は  $\alpha_2 = -45^\circ$ 。

i)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  の場合 :

$$\varphi_{xB} = -0.1909 C_{zBC} + 0.0034 C_{zCB},$$

$$\varphi_{xC} = 0.0034 C_{zBC} - 0.1909 C_{zCB},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{yB} &= 0.0483(C_{zBC} - C_{zCB}), & \varphi_{yC} &= 0.0483(C_{zBC} - C_{zCB}), \\ \varphi_{zB} &= -0.4251C_{zBC} + 0.1126C_{zCB}, & \varphi_{zC} &= 0.1126C_{zBC} - 0.4251C_{zCB}, \\ \phi_{xAB} &= 0.0550C_{zBC} + 0.2264C_{zCB}, & \phi_{xCD} &= 0.2264C_{zBC} + 0.0550C_{zCB}, \\ \phi_{zAB} &= 0.2344(C_{zBC} + C_{zCB}). \end{aligned}$$

ii)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 45^\circ$  の場合:

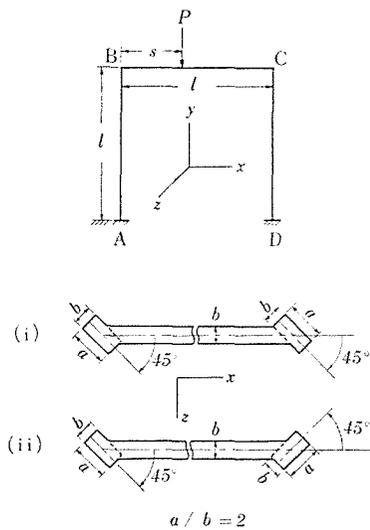
$$\begin{aligned} \varphi_{xB} &= -0.2087C_{zBC} + 0.1246C_{zCB}, & \varphi_{xC} &= -0.1246C_{zBC} + 0.2087C_{zCB}, \\ \varphi_{yB} &= -0.0298(C_{zBC} + C_{zCB}), & \varphi_{yC} &= -0.0298(C_{zBC} + C_{zCB}), \\ \varphi_{zB} &= -0.4311C_{zBC} + 0.1245C_{zCB}, & \varphi_{zC} &= 0.1245C_{zBC} - 0.4311C_{zCB}, \\ \phi_{xAB} &= 0.0528(C_{zBC} + C_{zCB}), & \phi_{xCD} &= -0.0528(C_{zBC} + C_{zCB}), \\ \phi_{zAB} &= 0.2239(C_{zBC} + C_{zCB}). \end{aligned}$$

比較のために  $I_z$  のみを用いて解く通常の結果は

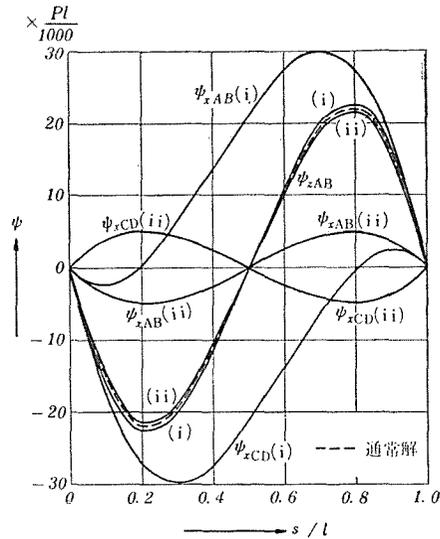
$$\begin{aligned} \varphi_B &= -0.3732C_{BC} + 0.0713C_{CB}, & \varphi_C &= 0.0713C_{BC} - 0.3732C_{CB}, \\ \phi_{AB} &= 0.2264(C_{BC} + C_{CB}). \end{aligned}$$

である。これらの値を端モーメント式に代入すれば、それぞれの場合に対する各部材の端モーメントの値が得られる。

梁BC上、Bより距離  $s$  の所に単一鉛直荷重  $P$  が作用したときの  $\phi$  の値を第20図に示した。図中 (i) をつけてあるのは柱の主軸の傾斜角  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ , (ii) は  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 45^\circ$  の場合である (第19図)。第21図は同じ場合に対する端モーメントの一部を示し



第19図

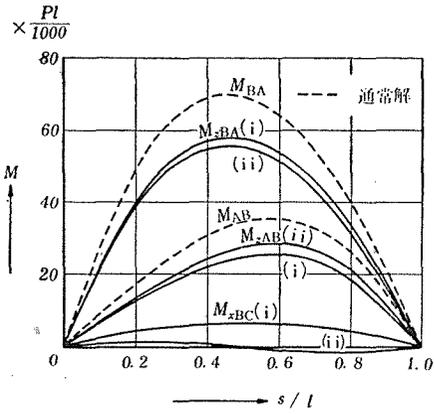


第20図  $s/l$  と  $\phi$  との関係

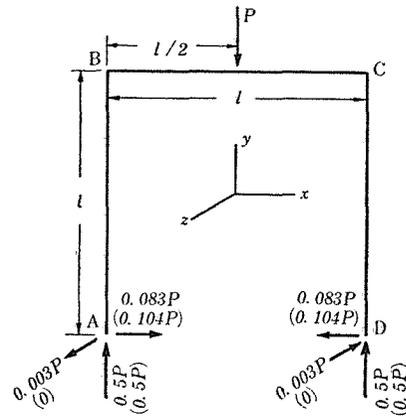
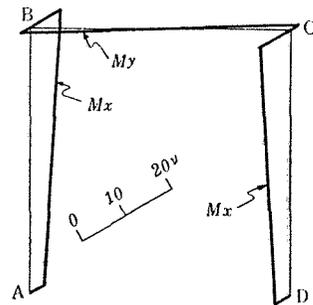
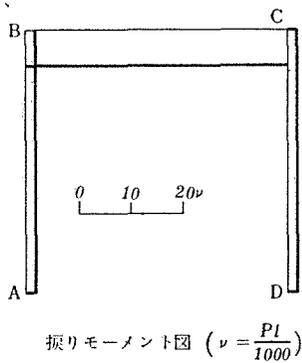
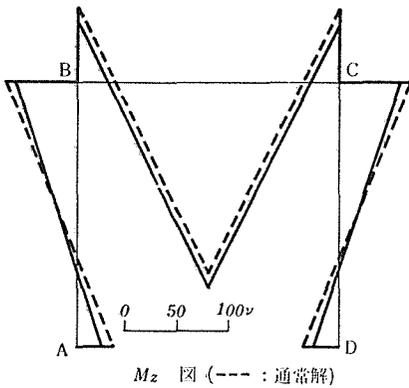
たものである。図の中の  $M_{xBC}$  は BC 部材の振りモーメントであり、図に記載してないその他の端モーメントの絶対値は  $M_{xBC}(i)$  の値と同程度か、もしくはそれより小さく得られた。

第22図は  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンの梁の中央点に荷重が作用しているときのモーメント図と支点反力を示したものである。図中点線で示したモーメント図と ( ) を付した支点反力は断面の相乗モーメントを考慮しないときの値である。

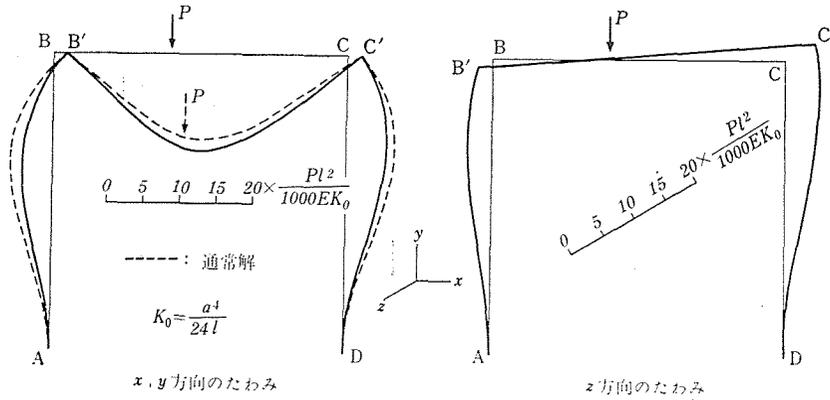
同じ  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンに対して  $s = 0.4l$  の点に荷重された場合



第21図  $s/l$  と  $M$  との関係



第22図 モーメント図と支点反力 ( $s/l = 0.5, \alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  の場合)



第23図 たわみ曲線 ( $s/l = 0.4, \alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  の場合)

のたわみ曲線を計算して第23図を得た。計算方法としてはまず各節点の曲げモーメント

第6表 各部材の最大たわみ 係数  $\frac{Pl^2}{1000EK_0}$

部材	ラーメンの面内の最大たわみ $x, y$		$z$ 方向の最大たわみ	
	位置	最大たわみ	位置	最大たわみ
A→B	0.6l (0.6l)	-4.0 (-5.6)	0.7l	+3.9
B→C	0.5l (0.5l)	-12.7 (-11.3)	C	-4.6
C→D	0.3l (0.3l)	+5.7 (+6.8)	0.2l	-5.3

$K_0 = \alpha^4/24I, ( )$  は通常解

を求め、各部材のたわみは部材に働く曲げモーメントのみによって生じ、捩りモーメントはたわみには影響しないものとして1, (1)の非対称曲げに対するMohrの定理を用いて算出した。第6表は各部材の最大たわみを示したものである。この表よりこの計算例の場合にはラーメンの面外( $z$ 方向)のたわみもかなり大きいことがわかる。

この計算例について考察すると次のことがわかる。

節点B, Cの変位を表わす部材角については(第20図)。  $\phi_z$  は通常解とほとんど一致する。  $\phi_x$  はかなり大きな値であり、特に  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  の場合には  $\phi_x$  の絶対値は  $\phi_z$  より一般に大である ( $|\phi_x|_{\max} \doteq 1.3 |\phi_z|_{\max}$ )。このことは梁に鉛直荷重が作用した場合、節点B, Cの変位はラーメン面内の変位より面外の変位の方が大きいことを意味する。従って部材断面の形によってはラーメンの基本軸に対する断面の非対称性を十分考慮する必要がある。

次に曲げモーメントについてはこの計算例の場合、  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ, \alpha_1 = -\alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンともA, B, C, Dにおける端モーメント  $M_x$  は通常解よりその絶対値が小さく得られた(20~30%小さい)。このことは逆に荷重点における  $M_x$  の値は通常解法によって得られる曲げモーメントより大であることを示している(約7%大きい)。

捩りモーメントについては、  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンの梁BCに働くものが比較的

大きく得られた (第21図  $M_{xBC}$ ). この値はA端における  $M_{zAB}$  の約27%に相当する. 断面の形によっては振りモーメントの値がさらに大となることも考えられる故, 振りによって生ずるせん断力もまた無視できない場合があるようにも思われる.

また (i)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンと (ii)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンを比較すると, 両者は全く同一寸法の材料を用いておるにもかかわらず (i) の場合は (ii) の場合よりラーメン面外の変形も大きく, そのためか面外のモーメントも大である. このことは例え数値が異っても  $\lambda_{BC} = 0$  の条件のもとに一般的傾向として成立すると思われるから, 特に (i) のような型のラーメンに対しては一応検討してみる必要があろう.

(3) 3 径間門型ラーメン

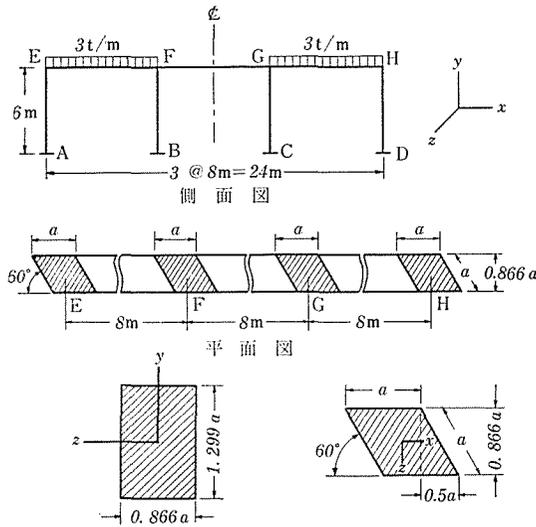
第24図に示すラーメンに対して計算しよう.

部材の  $I$  は第1表を用いて計算すると

$$\text{梁} : I_y = 0.07030a^4, \quad I_z = 0.1582a^4, \quad I_{yz} = 0.$$

$$\text{柱} : I_x = 0.05412a^4, \quad I_z = 0.09021a^4, \quad I_{xz} = 0.03125a^4$$

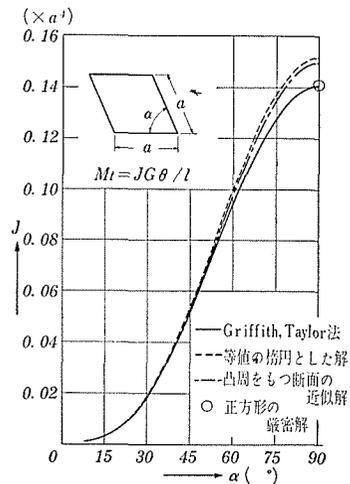
を得る. 梁の振り抵抗係数は St. Venant の式より  $J = 0.1651a^4$  を得る. 柱の断面のような菱形の図形に対して Griffith, Taylor 法による  $J$  の値とその他の近似式より求めた値とを图示すると第25図のようになる. この図より Griffith, Taylor 法を用いて得られる振り抵抗係数は比較的正しい値のように思われるので, この方法を用いて  $J$  を求めると  $J = 0.0936a^4$  を得る.\* 今梁の  $K_z$  を  $K_0$  とすると  $K_0 = 0.1582a^4/8 = 0.01978a^4$  (m単位) となり, これより第7表を得る.



梁の断面(巾:高さ = 1:1.5)

柱の断面

第24図



第25図

\* 等値の楕円におきかえると  $J = 0.0987a^4$ , 凸周をもつ断面の近似式を用いると  $J = 0.0974a^4$  となる.

第7表  $k, \lambda$  の値

部 材	断 面 形	長 さ (m)	$k$			$\lambda$
			$x$	$y$	$z$	
梁	矩 形	8	1.044	0.444	1.000	0.000
柱	菱 形	6	0.456	0.789	0.760	0.263

荷重状態が対称であり梁の  $\lambda$  は零で、梁柱とも  $k$  の値は対称軸に関し等しく、また  $\lambda$  も一致する故第2表の対称条件を用いると  $\phi_{zAE} = 0$  で

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xE} &= -\varphi_{xH}, & \varphi_{yE} &= \varphi_{yH}, & \varphi_{zE} &= -\varphi_{zH}, & \phi_{xAE} &= -\phi_{xDH} \\ \varphi_{xF} &= -\varphi_{xG}, & \varphi_{yF} &= \varphi_{yG}, & \varphi_{zF} &= -\varphi_{zG}, & \phi_{xBF} &= -\phi_{xCG} \end{aligned} \right\}$$

であり、また適合条件より

$$\phi_{yEF} = 0.75\phi_{xAE} - 0.75\phi_{xBF}, \quad \phi_{yFG} = 0.75(\phi_{xBF} - \phi_{xCG}) = 1.5\phi_{xBF}$$

となる。今 Poisson 数  $m = 6$  とすると端モーメント式は次のようになる。

部材 AE, DH :

$$\begin{aligned} M_{xAE} &= -M_{xDH} = 0.456(\varphi_{xE} + \phi_{xAE}) - 0.263\varphi_{zE}, \\ M_{xEA} &= -M_{xHD} = 0.456(2\varphi_{xE} + \phi_{xAE}) - 0.526\varphi_{zE}, \\ M_{yAE} &= M_{yDH} = -0.169\varphi_{yE}, & M_{yEA} &= M_{yHD} = 0.169\varphi_{yE}, \\ M_{zAE} &= -M_{zDH} = 0.760\varphi_{zE} - 0.263(\varphi_{xE} + \phi_{xAE}), \\ M_{zEA} &= -M_{zHD} = 1.520\varphi_{zE} - 0.263(2\varphi_{xE} + \phi_{xAE}). \end{aligned}$$

部材 BF, CG :

$$\begin{aligned} M_{xBF} &= -M_{xCG} = 0.456(\varphi_{xF} + \phi_{xBF}) - 0.263\varphi_{zF}, \\ M_{xFB} &= -M_{xGC} = 0.456(2\varphi_{xF} + \phi_{xBF}) - 0.526\varphi_{zF}, \\ M_{yBF} &= M_{yCG} = -0.169\varphi_{yF}, & M_{yFB} &= M_{yGC} = 0.169\varphi_{yF}, \\ M_{zBF} &= -M_{zCG} = 0.760\varphi_{zF} - 0.263(\varphi_{xF} + \phi_{xBF}), \\ M_{zFB} &= -M_{zGC} = 1.520\varphi_{zF} - 0.263(2\varphi_{xF} + \phi_{xBF}). \end{aligned}$$

部材 EF, HG :

$$\begin{aligned} M_{xEF} &= -M_{xHG} = 0.224(\varphi_{xE} - \varphi_{xF}), & M_{xFE} &= -M_{xGH} = 0.224(\varphi_{xF} - \varphi_{xE}), \\ M_{yEF} &= M_{yHG} = 0.444(2\varphi_{yE} + \varphi_{yF} + 0.75\phi_{xAE} - 0.75\phi_{xBF}), \\ M_{yFE} &= M_{yGH} = 0.444(\varphi_{yE} + 2\varphi_{yF} + 0.75\phi_{xAE} - 0.75\phi_{xBF}), \\ M_{zEF} &= -M_{zHG} = 2\varphi_{zE} + \varphi_{zF} - 16, & M_{zFE} &= -M_{zGH} = \varphi_{zE} + 2\varphi_{zF} + 16. \end{aligned}$$

部材 FG :

$$M_{xFG} = -M_{xGF} = 0.448\varphi_{xF}, \quad M_{yFG} = M_{yGF} = 0.444(3\varphi_{yF} + 1.5\phi_{xBF}),$$

$$M_{zFG} = -M_{zGF} = \varphi_{zF}.$$

端せ入力式

$$X_{zEA} = -X_{zHD} = -0.228 \varphi_{xE} + 0.1315 \varphi_{zE} - 0.152 \phi_{xAE},$$

$$X_{zFB} = -X_{zGC} = -0.228 \varphi_{xF} + 0.1315 \varphi_{zF} - 0.152 \phi_{xBF},$$

$$X_{zEF} = X_{zFE} = X_{zHG} = X_{zGH} = -0.1665 \varphi_{yE} - 0.1665 \varphi_{yF} - 0.0833 \phi_{xAE} + 0.0833 \phi_{xBF},$$

$$X_{zFG} = X_{zGF} = -0.333 \varphi_{yF} - 0.1665 \phi_{xBF}.$$

弾性方程式

- i)  $\Sigma M_{xE} = M_{xEA} + M_{xEF} = 0,$
- ii)  $\Sigma M_{xF} = M_{xFE} + M_{xFB} + M_{xFG} = 0,$
- iii)  $\Sigma M_{yE} = M_{yEA} + M_{yEF} = 0,$
- iv)  $\Sigma M_{yF} = M_{yFE} + M_{yFB} + M_{yFG} = 0,$
- v)  $\Sigma M_{zE} = M_{zEA} + M_{zEF} = 0.$
- vi)  $\Sigma M_{zF} = M_{zFE} + M_{zFB} + M_{zFG} = 0,$
- vii)  $\Sigma X_{zE} = X_{zEA} + X_{zEF} = 0,$
- viii)  $\Sigma X_{zF} = -X_{zFE} + X_{zFB} + X_{zFG} = 0.$

端モーメント式，端せ入力式を弾性方程式へ代入した結果を第8表に示した。

第8表 弾性方程式

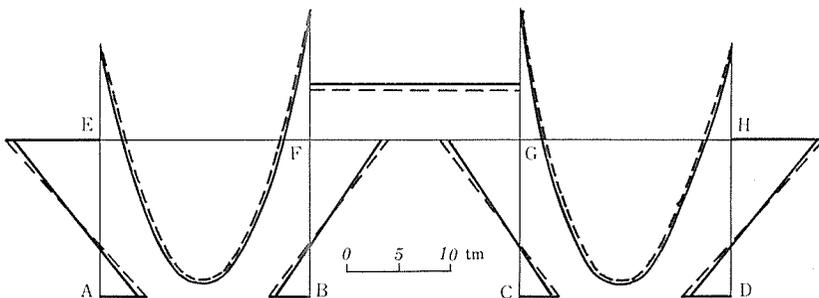
方程式	左				辺				右 辺
	$\varphi_{xE}$	$\varphi_{xF}$	$\varphi_{yE}$	$\varphi_{yF}$	$\varphi_{zE}$	$\varphi_{zF}$	$\phi_{xAE}$	$\phi_{xBF}$	
1	1.136	-0.224			-0.526		0.456		
2	-0.224	1.584				-0.526		0.456	
3			1.057	0.444			0.333	-0.333	
4			0.444	2.389			0.333	0.333	
5	-0.526				3.520	1.000	-0.263		16
6		-0.526			1.000	4.520		-0.263	-16
7	0.456		0.333	0.333	-0.263		0.471	-0.167	
8		0.456	-0.333	0.333		-0.263	-0.167	0.804	

第8表の弾性方程式を解くと，次の値を得る。

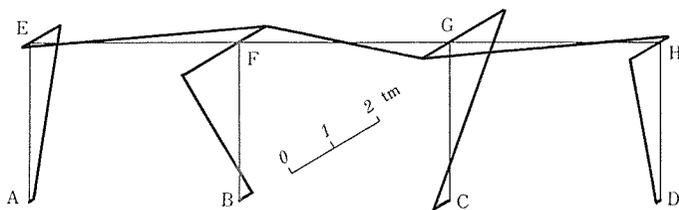
$$\begin{aligned} \varphi_{xE} &= +1.979, & \varphi_{yE} &= -0.982, & \varphi_{zE} &= +6.454 (+5.923), \\ \varphi_{xF} &= -1.124, & \varphi_{yF} &= +0.059, & \varphi_{zF} &= -5.161 (-4.850), \\ \phi_{xAE} &= +1.962, & \phi_{xBF} &= -1.076. \end{aligned}$$

$\varphi_z$  の値で ( ) をつけてあるのは通常解である。

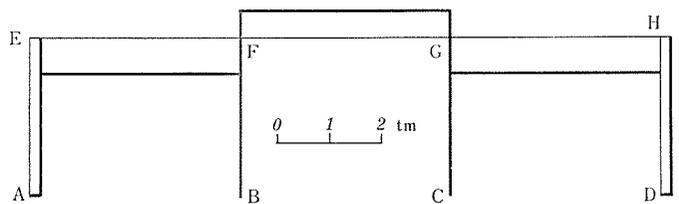
これより各部材の端モーメントは第9表のようになる。第26図にモーメント図と支点反力の値を示した。



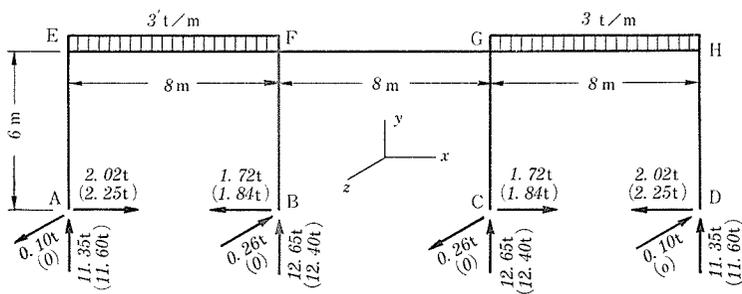
ラーメン面内の曲げモーメント図 (--- 通常解)



ラーメンの面と垂直な面内の曲げモーメント図



捩りモーメント図



支点反力 . ( ) は通常解

第26図 モーメント図と支点反力

第9表 端モーメント (t m)

部 材	A E		B F		E F		F G	
	A	E	B	F	E	F	F	G
$M_x$	+0.10	-0.70	+0.35	+1.20	+0.70	-0.70	-0.50	+0.50
$M_y$	+0.17	-0.17	-0.01	+0.01	+0.17	+0.63	-0.64	-0.64
$M_z$	+3.87	+8.25	-3.34	-6.97	-8.25	+12.13	-5.16	+5.16
$\bar{M}$	+4.50	+9.00	-3.69	-7.37	-9.00	+12.22	-4.85	+4.85
$(\bar{M}-M_z)/M_z$	+16	+9	+10	+6	+9	+1	-6	-6 (%)

部 材	G H		G C		H D	
	G	H	G	C	H	D
$M_x$	+0.70	-0.70	-1.20	-0.35	+0.70	-0.10
$M_y$	+0.63	+0.17	+0.01	-0.01	-0.17	+0.17
$M_z$	-12.13	+8.25	+6.97	+3.34	-8.25	-3.87
$\bar{M}$	-12.22	+9.00	+7.37	+3.69	-9.00	-4.50
$(\bar{M}-M_z)/M_z$	+1	+9	+6	+10	+9	+16 (%)

$\bar{M}$ : 通常解

この計算例の場合にはラーメン面内の曲げモーメントのうち通常解より大きく得られたのは荷重点における曲げモーメントと部材 F G に働く曲げモーメントである。また通常解法では得られないモーメント ( $M_x$ ,  $M_y$ ) のうち最も大きいのは B F の部材に働く  $M_{x\text{FB}}$  で、この値はラーメン面内の  $M_{z\text{BF}}$  の36%,  $M_{z\text{FB}}$  の17%に相当する。振りモーメントに関しては部材 E F, G H に生ずる振りモーメントが最も大きくこれは同節点の端モーメント  $M_{z\text{EF}}$  の8%にあたる。

次に、節点 E, F, G, H はラーメン面内では変位しないが、 $z$ 方向に移動する。この移動量は

$$\text{節点 E: } \delta_{zE} = \frac{l_{AE}}{6EK_0} \phi_{x\text{AE}} = \frac{6 \times 1.962}{6E \times 0.01978a^4} = \frac{99.2}{Ea^4} \text{ (m, t単位) (+ } z \text{ 方向)},$$

$$\text{節点 F: } \delta_{zF} = \frac{l_{BF}}{6EK_0} \phi_{x\text{BF}} = \frac{6 \times 1.076}{6E \times 0.01978a^4} = \frac{54.4}{Ea^4} \text{ (m, t単位) (- } z \text{ 方向)},$$

$$\text{節点 G: } \delta_{zG} = \frac{l_{CG}}{6EK_0} \phi_{x\text{CG}} = \frac{54.4}{Ea^4} \text{ (m, t単位) (+ } z \text{ 方向)},$$

$$\text{節点 H: } \delta_{zH} = \frac{l_{DH}}{6EK_0} \phi_{x\text{DH}} = \frac{99.2}{Ea^4} \text{ (m, t単位) (- } z \text{ 方向)}$$

となり、 $E$ ,  $a$ の値によっては比較的大きくなることも予想される。

## 6. 結 言

以上述べたように非対称曲げをうけるラーメンに対して、ラーメンの面外の変形をも考慮した基本式を得た。このようなラーメンに対して一般に行なわれている方法を適用すると、部材断面の形状によってはかなりの誤差を伴う。以下計算例の結果について記すと

1) ラーメンの面外の変形は主として各部材の相乗モーメントによって左右され、この変形量は比較的大きく無視できない場合がある。例えば計算例(2)のうちの  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$  のラーメンの節点 B, C の変位はラーメン面内よりも面外の方が大きく、 $|\phi_x|_{\max}$  は  $|\phi_z|_{\max}$  の約 1.3 倍に相当する。

2) 部材のラーメン面内の曲げモーメントは通常の解に比較して極端に大きな相違はないが、計算例(2)の荷重点ならびに計算例(3)の荷重点と部材 F G のように通常解より大きく得られる場合がある。

3) 通常の解法にては求められないラーメン面外の曲げモーメントと振りモーメントに関しては、荷重の状態、部材断面の形状性質によっては比較的大きく得られる場合がある。計算例(3)の  $M_{x\text{FB}}$  は  $M_{z\text{FB}}$  の 17% に相当する。

4) 本法は横方向支承を有する梁 (計算例(1)) の場合にも用いることができ、外力を梁の主軸方向の成分に分けて解く方法に比し、主軸の方向を求める必要がないと云う点で一般に有利である。

以上の計算例は各部材とも図心とせん断中心とが一致し、かつ部材の結合点においては図心とせん断中心が共に一点にて交わる場合について行った。もし各部材の図心とせん断中心が一致しないとき、あるいはまた結合点において部材と部材との図心、せん断中心が一点に会しない場合に対しては例えば軸力の偏心によるモーメントが働く故、このような場合については今後さらに検討したいと思っている。

## 文 献

- 1) S. Timoshenko : Strength of Materials, 3rd ed., part I, p. 230, 1955.
- 2) L. Zetlin and G. Winter : Unsymmetrical Bending of Beams with and without Lateral Bracing, Proc. A. S. C. E. Vol. 81, No. 774, 1955.
- 3) S. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, 2nd ed., p.304, 1951.
- 4) Shun-ya Yoshida : Analysis of Rigid Frames in Space by Applying Slope-Deflection Formulas, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No. 12, p. 41, 1961.
- 5) 文献 1), p. 289.
- 6) S. Timoshenko : Strength of Materials, 3rd ed., part II, p. 235, 1956.
- 7) E. J. Nestorides : A Handbook on Torsional Vibration, p.134, 1958.
- 8) 文献 4), p. 42.
- 9) 村上正, 吉村虎藏 : 構造力学, 5 版, 295ページ, 昭36.
- 10) 文献 4), p. 44.
- 11) 文献 1), p. 231. および Flügge : Handbook of Engineering Mechanics, 1st ed., p. 35-8, 1962.

**Summary****Analysis of Rigid Frames Subjected to  
Unsymmetrical Bending**Takashi K<sub>USAMA</sub>

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

In practice, the rigid frames which have the members of unsymmetrical cross sections are occasionally constructed. In such cases, it is necessary to consider the outside displacements to the frame plane together with displacements in the frame plane. But their stresses are conventionally calculated in neglecting the effects of these outside displacements in the practical design. Then the writer fears that this conventional method of analysis is to lead erroneous results.

The writer has tried to analyse these frames exactly by taking the deflections of the members in all directions into consideration. The fundamental formulas are referred to the slope-deflection formulas, and the method of analysis is shown by giving illustrative examples. It has especially been noticed that the magnitude of product of inertia of cross section is the most effective factor.