

# 水門ならびにテンターゲートの自由流出に対する流量係数

草 間 孝 志\*

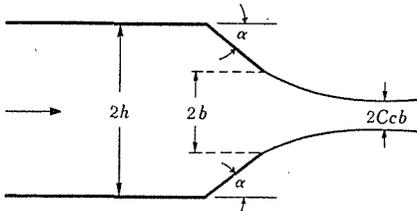
(昭和36年6月12日受理)

## 1. 緒 言

水門，オリフィス，スロットなど周縁の鋭い孔から流体が流出する場合，流体は壁面より離れて自由流線を形成し縮流を生ずる．縮流後の流体の収縮巾と流出口の開きとの比は収縮係数と呼ばれており，それらの孔からの流出量を与える係数すなわち流量係数  $C_d$  は水平床の水門から自由流出する場合に刃先のエネルギー損失を無視すると\*\*

$$q = C_d b \sqrt{2gh}, \quad C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 + C_c \frac{b}{h}}} \quad (1)$$

ここに， $q$ ：単位巾当りの流量， $b$ ：水門の開き， $h$ ：上流水深， $C_c$ ：収縮係数にて求められる<sup>1)</sup>．従って水門の流量係数を求める問題はその状態における収縮係数を求めることによって解決される．この収縮係数の理論値は不連続流れの理論により求められ，その結果はかなり実験値と一致すると云われており，従来多くの人々により計算がなされ



第1図 ジェットの収縮

ている．例えば第1図のような直線傾斜壁をもつスロットからの流出に対して von Mises<sup>(2)</sup> により収縮係数の理論計算がなされ，理論式ならびに  $\alpha$ ,  $b/h$  の特殊な値に対しての理論値が示されている．しかしながら任意の  $\alpha$ ,  $b/h$  の値について計算することは試算法によらなくてはならないのみならず，かなり困難であり一般に内挿により求めているようである．また Pajer<sup>(3)</sup> は  $\alpha$  の  $90^\circ$  の場合に対して重力の作用を考慮して計算を行っており，その結果は水門の流量係数について von Mises の値よりさらに実際の値に近いようである．このことは水門からの流出の場合には当然重力が作用するから，この影響を考慮する必要があることを示している．

次にテンターゲートからの流出については Metzler<sup>(5)</sup> および Toch<sup>(6)</sup> の実験がある．Toch はその論文の中で，テンターゲートの自由流出の場合の流量係数は式(1)により求められ，収縮係数はテンターゲートの刃先角度  $\alpha$  の等しい水門の場合の  $C_c$  を近似的に用いられることを指摘している．

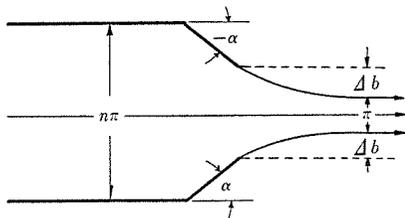
\* 土木工学教室 助手

\*\* このエネルギー損失は実際問題としてかなり小さいようである<sup>2)</sup>．

そこで筆者は実用を主眼として、まず重力を考慮しないときの任意の  $\alpha$ ,  $b/h$  に対する収縮係数の簡易式を求め、次に水平床の水門ならびにテンターゲートの流量係数に合うようにこの結果に若正の修平を行うことを試みてみた。

## 2. 基本式の誘導

二次元流れとして第2図の流れに対し



第2図 スロットからの流出

$$\zeta = \frac{1}{V} e^{i\theta}, \quad \Omega = \log \zeta,$$

$$t = \cosh \frac{\pi}{\alpha} (\Omega + i\alpha), \quad w = \log \sqrt{\frac{t+1}{t+\varepsilon}},$$

ここに  $\varepsilon = (n^{\pi/\alpha} + n^{-\pi/\alpha})/2$

なる写像変換を行うと平行流におきかえることができ、収縮係数  $C_c$  は第2図より明らかのように

$$C_c = \frac{\pi}{\pi + 2\Delta b} \quad (2)$$

にて与えられ、 $\eta = \pi/\alpha \geq 1$  とおくと、式(2)の  $\Delta b$  は計算の結果

$$\Delta b = \int_{-a}^0 \frac{1}{2} \eta \left( \frac{1}{1 - \cos \eta\theta} - \frac{1}{\varepsilon - \cos \eta\theta} \right) \sin \eta\theta \sin \theta d\theta \quad (3)$$

となる。式(3)の積分は  $\alpha$  の特殊な場合に対しては直ちに積分することが可能であるが、任意の  $\alpha$  に対しては積分は困難である。今式(3)を展開すると

$$\Delta b = \eta \int_{-a}^0 \sin \theta \sum_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{k^{2j}} \right) \sin j\eta\theta d\theta.$$

ここに  $k^2 = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = n^\eta \geq 1$  である。もし上式が項別積分可能とすると

$$\Delta b = \frac{\eta}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{k^{2j}} \right) \left( \frac{\sin(j\eta - 1)\alpha}{j\eta - 1} - \frac{\sin(j\eta + 1)\alpha}{j\eta + 1} \right). \quad (4)$$

あるいは  $\alpha = \pi/\eta$  を代入して

$$\Delta b = \eta^2 \sin \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{k^{2j}} \right) \left( (-1)^{j-1} \frac{j}{j^2 \eta^2 - 1} \right) \quad (5)$$

を得る。式(5)は Leibniz の収斂条件により収斂する。しかしその収斂の度合は遅く  $\eta$  の小さいときには殊更実用には適しない。

そこで、今井春蔵氏による級数総和式のうち微分展開総和式

$$\sum_1^N f(j) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(m)}{s!} D^{(s-1)} f(j) \Big]_{1-m}^{N+1-m} \quad (6)$$

ただし  $D^{-1}f(j) = \int f(j) dj$ ,  $m =$  任意の副変数を用いることにする. ここに  $B_s(m)$  は第一位 Bernoulli 多項式をあらわす.

まず  $n = \infty$  の場合について計算してみよう.  $n = \infty$  の場合には  $1/k^{2j} = 0$  となり, そのときの  $\Delta b$  を  $\Delta b_0$  とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta b_0 &= \frac{\eta}{2} \sum_{j=1}^{\infty} f(j), \\ f(j) &= \frac{\sin(j\eta - 1)\alpha}{j\eta - 1} - \frac{\sin(j\eta + 1)\alpha}{j\eta + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

よって, 式 (6), (7) の比較により  $N = \infty$  となる. なお計算の便宜上  $m = 1$  とすると,  $B_s(m=1)$  の値は,  $s = 3, 5, 7, \dots$  に対しては零となるから,  $s = 0, 1, 2, 4, 6, \dots$  について計算を行えばよいことになる. そこで順次計算を進めると

$$s = 0 \quad : \quad \left[ f(j) dj \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\eta} \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\alpha^5}{5 \cdot 5!} - \frac{\alpha^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right),$$

$$s = 1 \quad : \quad D^{(0)}f(j) \Big]_0^{\infty} = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0,$$

$$s = 2, 4, \dots :$$

$$\begin{aligned} D^{(s-1)}f(j) \Big]_0^{\infty} &= \frac{2}{\eta} \left\{ -\left( \frac{1}{2!} - \frac{\beta}{3!} + \frac{\beta(\beta-1)}{4!} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{5!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots - \frac{\beta!}{(\beta+2)!} \right) \pi^{\beta+1} \alpha \right. \\ &+ \left( \frac{1}{4!} - \frac{\beta}{5!} + \frac{\beta(\beta-1)}{6!} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{7!} + \dots - \frac{\beta!}{(\beta+4)!} \right) \pi^{\beta+1} \alpha^3 \\ &\left. - \left( \frac{1}{6!} - \frac{\beta}{7!} + \frac{\beta(\beta-1)}{8!} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{9!} + \dots - \frac{\beta!}{(\beta+6)!} \right) \pi^{\beta+1} \alpha^5 + \dots \right\} \end{aligned}$$

を得る. ここに  $\beta = s - 1$  である. さらに上の第三式に対しては  $s$  が偶数すなわち  $\beta$  が奇数であるから, 組合せの関係式 ( $n$  が奇数)

$${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - {}_n C_3 + \dots + (-1)^n {}_n C_n = 0$$

を用いることにより

$$s = 2, 4, \dots : D^{(s-1)} f(j) \Big|_0^\infty = \frac{2}{\gamma} \left( -\frac{1}{s+1} \pi^s \alpha + \frac{1}{3!} \frac{1}{s+3} \pi^s \alpha^3 - \frac{1}{5!} \frac{1}{s+5} \pi^s \alpha^5 + \dots \right)$$

と変形される。これらの諸式と

$$s = 0 : \frac{B_s(1)}{s!} = 1, \quad s = 1 : \frac{B_s(1)}{s!} = \frac{1}{2}, \quad s = 2 : \frac{B_s(1)}{s!} = \frac{1}{12},$$

$$s = 4 : \frac{B_s(1)}{s!} = \frac{1}{720}, \quad s = 6 : \frac{B_s(1)}{s!} = \frac{1}{30\,240}, \quad \dots$$

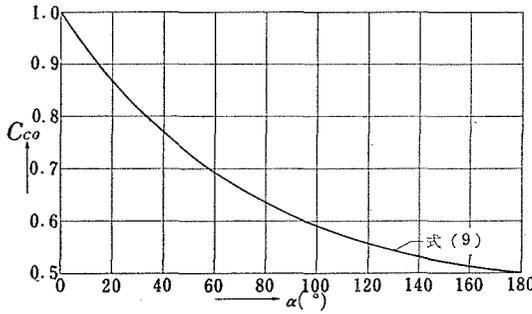
の値を式(6), (7)へ代入して

$$\Delta b_0 = 0.693\,2\alpha - 0.024\,18\alpha^3 + 0.000\,531\,8\alpha^5 - 0.000\,007\,155\alpha^7 + \dots \quad (8)$$

を得た。ここに  $\alpha$  は radian である。これより  $n = \infty$  のときの収縮係数を  $C_{co}$  とすると

$$C_{co} = \frac{1}{1 + 0.441\,3\alpha - 0.015\,39\alpha^3 + 0.000\,338\,6\alpha^5 - 0.000\,004\,555\alpha^7 + \dots} \quad (9)$$

となる。これを第3図に示した。



第3図  $C_{co}$  の 値

式(8), (9)の  $\alpha$  の範囲は  $0 \leq \alpha \leq \pi$  であるから、両式の誤差の最大は  $\alpha = \pi$  のときにおこる。そこで今  $\alpha = \pi$  の場合 (Borda の流出口に相当する) に対して  $\alpha^7$  の項までとって求めてみると

$$\Delta b_0 = 1.569\,2,$$

$$C_{co} = 0.500\,3.$$

これに対し正しくは

$$\Delta b_0 = \frac{\pi}{2} = 1.570\,8, \quad C_{co} = 0.5$$

となるはずであるから

$$\Delta b_0 \text{ の最大誤差 } \cong 0.1\%, \quad C_{co} \text{ の最大誤差 } \cong 0.06\%.$$

よって  $0 \leq \alpha \leq \pi$  の範囲で式(8), (9)を用いて得られる値は  $\Delta b_0, C_{co}$  とともに誤差は 0.1% かそれより小さいことがうかがえる。なお当然のことながら  $\alpha = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$  について計算してみると von Mises の  $b/h = 0$  のときの理論値に小数以下3桁まで完全に一致した。

式(8)は  $n = \infty$  のときの  $\Delta b$  の値であるから  $n \neq \infty$  に対しては式(5)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta b &= \Delta b_0 + \Delta b', \\ \Delta b' &= -\eta^2 \sin \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{k^{2j}} \left( \frac{j}{j^2 \eta^2 - 1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

右辺の  $k$  は  $n$  と  $\alpha$  の関数であり、 $n$  は上流の流水巾と収縮後の流水巾の比であるから、第1図より  $n = h/C_c b$  である。一般に既知条件としては  $\alpha$ ,  $b$ ,  $h$  が与えられるから、収縮係数を求めるのに  $n$  の値を適当に仮定して計算を行い、与えられた  $b$  に一致するまで試算を繰返さなくてはならない。この不便を避けるために次のように考えよう。第1, 2図および式(10)より

$$2b = \pi + 2\Delta b, \quad C_c = \frac{\pi}{2b}.$$

従って

$$\frac{1}{C_c} = 1 + \frac{2}{\pi} \Delta b = 1 + \frac{2}{\pi} \Delta b_0 + \frac{2}{\pi} \Delta b'.$$

しかるに  $n = \infty$  すなわち  $h/b = \infty$  のときの  $C_c$  は  $C_{co}$  であるから

$$\frac{1}{C_{co}} = 1 + \frac{2}{\pi} \Delta b_0.$$

今  $2\Delta b'/\pi = \lambda$  とおくと

$$C_c = \frac{C_{co}}{1 + C_{co}\lambda} \quad (11)$$

となる。式(11)の  $C_{co}$  はさきの式(9)で得られるから  $\lambda$  の値が求められればよいことになる。この  $\lambda$  は式(10)より分るように  $\eta$  と  $n$  の関数であるが、今  $n$  の代りに  $h/b$  を用いて  $\lambda$  を  $\eta$  と  $h/b$  の関数と考えよう。

$$\lambda = f\left(\eta, \frac{h}{b}\right). \quad (12)$$

次に  $\alpha$  と  $n$  を与えて式(10)をもとに  $\lambda$ ,  $h/b$  を計算し、これを図示すると第4図の実線を得る。図によると  $\log \lambda$  と  $\log \frac{h}{b}$  の関係はほぼ直線になり、その直線の傾きは角度  $\alpha$  によって異なることが分る。そこで近似的に

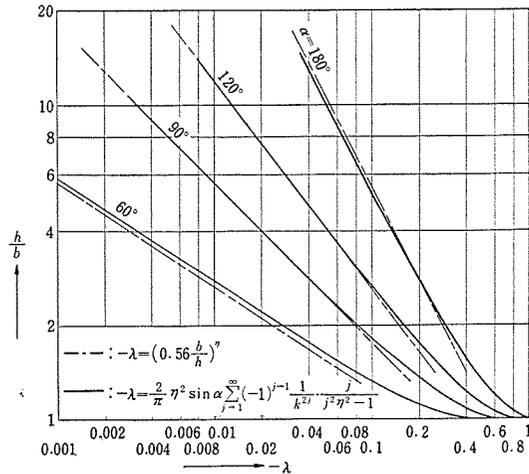
$$\lambda = -\left(0.56 \frac{b}{h}\right)^{\eta} \quad (13)$$

とおき、式(13)を第4図に点線で示した。両者は比較的良好一致している。これよりスロットからの流出の収縮係数は式(11), (13)より次のようになる

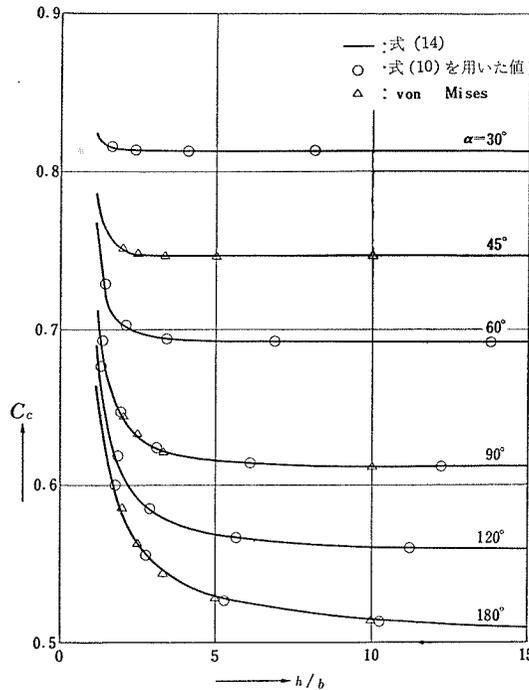
$$C_c = \frac{C_{co}}{1 - C_{co}\left(0.56 \frac{b}{h}\right)^{\eta}}. \quad (14)$$

式 (14) より求められた 曲線と 比較のために von Mises による計算値および式 (2), (10) を用いて得た値とを第 5 図に示した。

以上の計算には重力を考慮していない。重力を考慮するといくらか異ってくるようである。式 (14) を用いて  $\alpha = 90^\circ$  のときのスルースゲートの流量係数を求めてみると、この値は多くの実験値よりいくぶんか大きい値を示す。スルースゲート ( $\alpha = 90^\circ$ ) に対する重力を考慮した Pajer の計算値では  $C_c$  は一般に  $C_c < C_{c0}$  であり、従って重力の作用を考慮する場合には  $\lambda > 0$  となるようである。よってこのような場合には  $\lambda$  の値として式 (13) を用いることは適当でない。一方  $C_{c0}$  については、Pajer の理論値と重力を無視した場合の値とは完全に一致している。これは非常に興味深い。もしこのようなことが任意の  $\alpha$  に対しても成立つものとするならばスロット、水門の如何を問わず  $C_{c0}$  の値は式 (9) をそのまま用いて差支えなく、式 (12) の  $\lambda$  の関数形を見出すことにより重力の影響を考慮することができ、水門からの流出など重力の影響を受ける場合の実際の値に近づけることが可能となろう。次に述べるテンターゲートならびに水門の流量係数はこの考えにもとづいて計算を進めた。



第 4 図  $\lambda$  と  $h/b$  の関係(スロット)



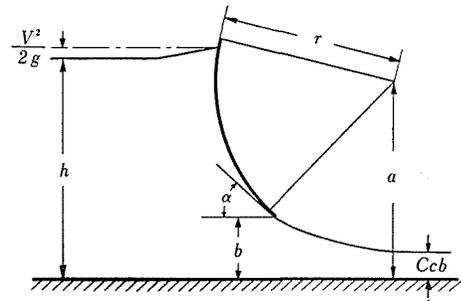
第 5 図 スロットの取縮係数

### 3. テンターゲートならびに水門への適用

水平床上に設けたテンターゲートからの自由流出について考えよう。この問題は二次元流と考えると彎曲面に沿うて流出する問題となるが、任意の状態に対する流れを一般的に求めることは難かしいようである。(8) そこでまずテンターゲートからの収縮係数を決定する要素として考えられるものを挙げると、ゲートの開き、上流水深の他に、1) テンターゲートのリップの角度、2) テンターゲートの曲率半径がある。1) のリップの角度はすでに取扱った  $\alpha$  に相当するもので第6図より

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{a}{r} - \frac{b}{r} \right) \quad (15)$$

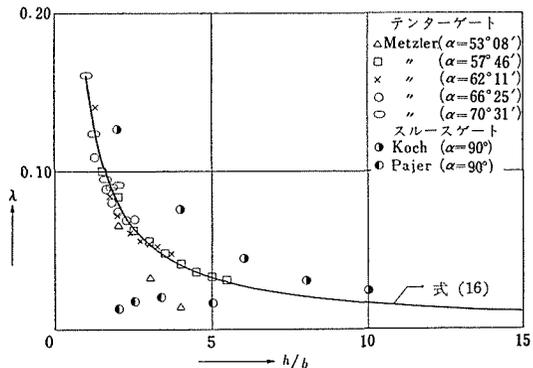
にて求められる。また2) の曲率半径は先に求めた直線傾斜壁からの流出が曲率半径  $r$  の無限大の場合に相当する故、曲率半径があまり小さくないときには近似的に2のスロットからの流出をテンターゲートからの流出に置換えてもよいと考えられる。



第6図 テンターゲートからの自由流出

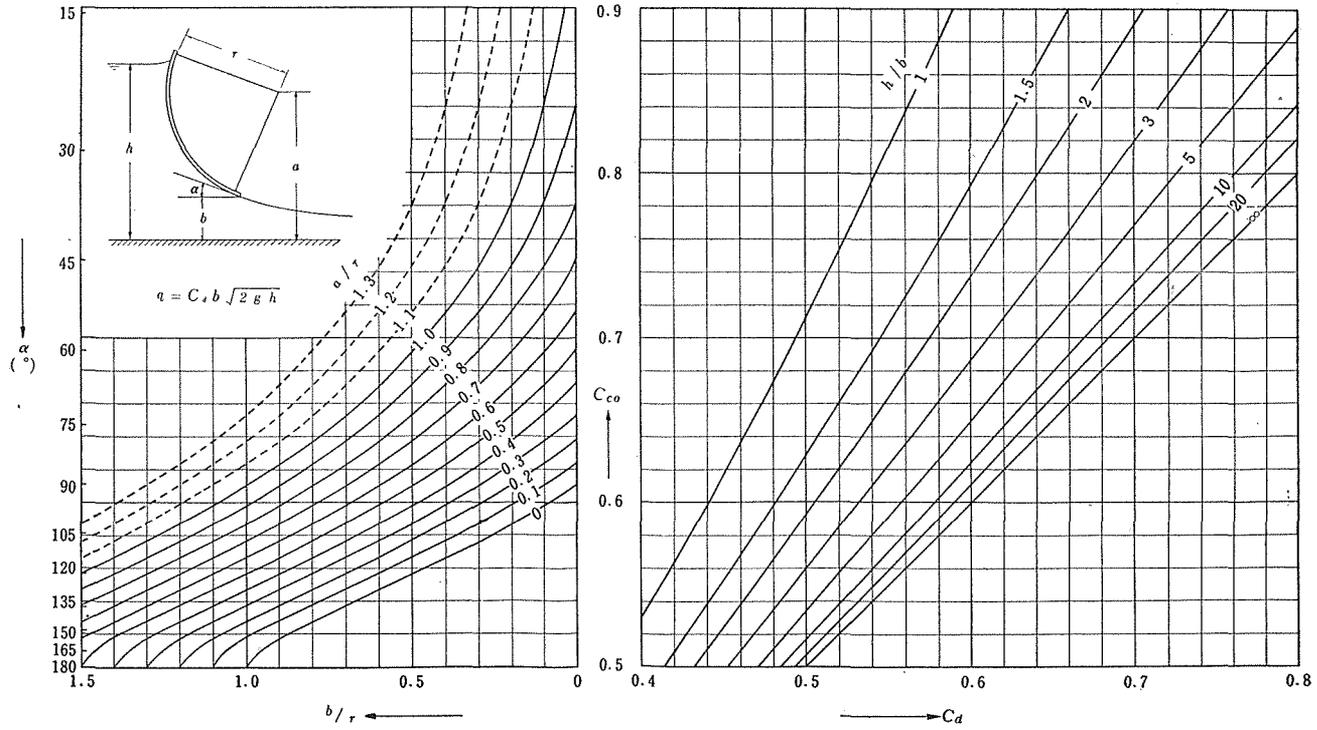
このことは Toch の実験によっても立証されている。しかしながらテンターゲートからの流出に対しては重力の影響を考慮すれば、 $\lambda$  の値として式(13)をそのままの形で用いることは適当でないであろう。この  $\lambda$  の関数形を実験的に求めるためには種々な状態における流れの実験を相当正確に数多く行う必要がある。それ故ここでは仮に Metzler の実験データをもとに求めてみることにする。

第7図は Metzler の実験をもとに  $h/a$  の 0.1 おきに対して  $\lambda$  の値を求めたものである。図中 Koch, Pajer の値より求めたものはスルースゲートに関するもので  $b/a = 1, r = \infty$  のときのテンターゲートの値とみなすことができる。図によると Metzler の実験から求めた  $\lambda$  の値は Koch, Pajer から求めたものの中に位し、かつ  $\lambda$  は第4図のスロットの場合のようにリップの角度にさほど影響されないことがうかがえる。そこで



第7図 ゲートの場合の  $h/b$  と  $\lambda$  との関係

$$\lambda = 0.16 \frac{b}{h} \quad (16)$$

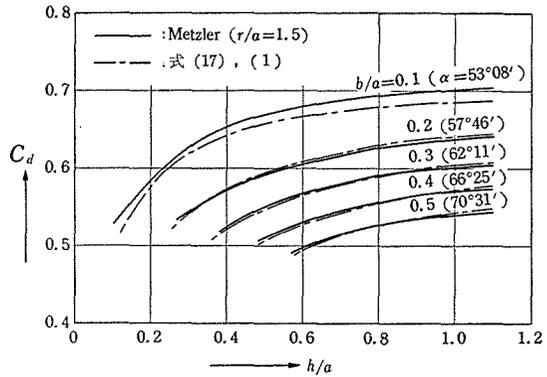


第8図  $a/r, b/r, \alpha, C_{co}, h/b, C_d$  の関係

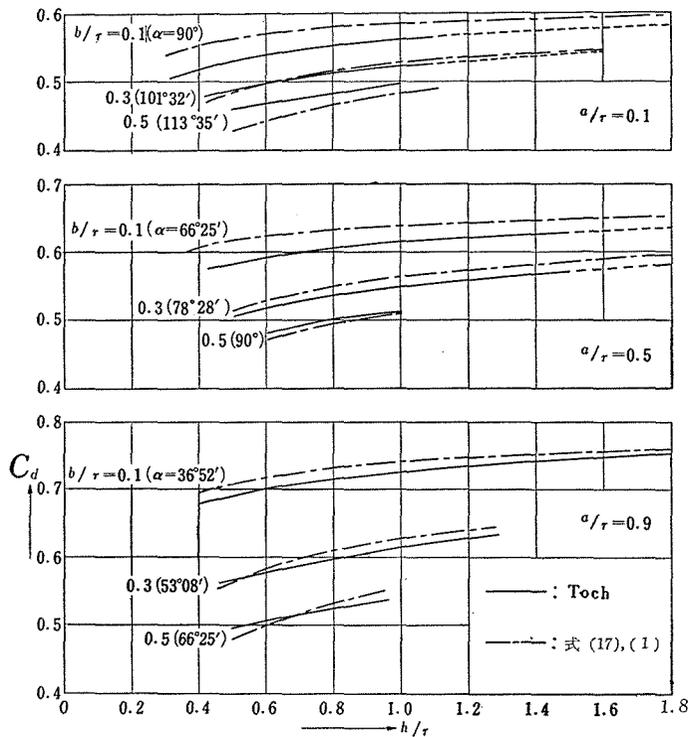
とおくと、式(11)、(16)より

$$C_c = \frac{C_{co}}{1 + 0.16 C_{co} \frac{b}{h}} \quad (17)$$

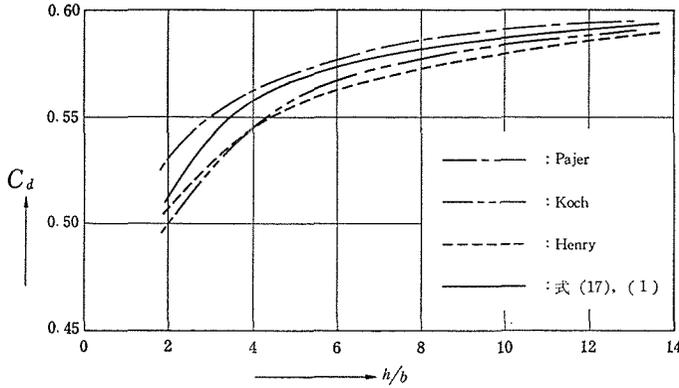
となる。これより流量係数  $C_d$  は式(1)を用いて求めることができる。これらの間の関係を第8図に示した。次に式(17)、(1)の併用により求められる流量係数がどの程度合うか以下比較を行った。



第9図 テンターゲートの流量係数 (Metzler の実験との比較)



第10図 テンターゲートの流量係数 (Toch の実験との比較)



第11図 刃形リップのスルースゲートの流量係数

第9, 10図\* はテンターゲート, 第11図はスルースゲートについてである. テンターゲートの場合, あまりよい結果を与えていないものが二三あるが, 流量係数の推定には十分であろう. スルースゲートに対しては Henry,<sup>(9)</sup> Koch の曲線と Pajer の曲線の間を通る線であり, 比較的妥当な値であるように思う.

#### 4. 結 言

以上自由流出に対するスロットの収縮係数の簡易式を求め, さらにこれをもとにテンターゲートならびに水門の流量係数に合うよう修正を行うことを試みた. その結果スロットの収縮係数は式(14)を用いれば試算法によらずして任意の状態における値を容易に計算することができる. 又テンターゲートとスルースゲートはこれを区別することなくそれらの流量係数は自由流出に対して式(9), (17), (1)の併用により充分推定することができ, かつ第8図を使用すればなお一層容易であろう.

なお, テンターゲートの場合に曲率半径が上流水深に対して非常に小さいとき, 又はリップの角度が $180^\circ$ に近いときには一般にゲートの壁面に剝離点が存在し, その点より流れは剝離する. そのような流れの状態に対しては, 前述の式はそのままの形で適用することはできないものとする. この問題はスルースゲートのリップの影響, ローリングゲートからの流出の問題とともに次の機会に譲ることとする.

\* テンターゲートにおいては, その幾何学的条件により  $h/r \leq 1 + a/r$  であるはずである.

Toch の実験図のうちこの範囲外のものをここでは点線で示した.

## 参 考 文 献

- 1) Rouse : Engineering Hydraulics, John Wiley & Sons, New York and Chapman & Hall, London, p.52 (1950).
- 2) 石原藤次郎 : 応用水理学 中 I, 丸善, p.161 (1958).
- 3) von Mises : Berechnung von Ausfluss und Überfallzahren, V.D.I., Bd. 61, Nr. 21, 22 u. 23, S. 447 (1917).
- 4) Pajer : Über den Strömungsvorgang an einer umströmten scharfkantigen Planschütze, Z.A.M.M., Bd. 17, Ht. 5, S. 259 (1937).
- 5) 文献 1), p.540.
- 6) Toch : Discharge Characteristics of Tainter Gates, Proc. A.S.C.E., Vol. 79, Sep. No. 295 (1953).
- 7) 電気学会編 : 通信工学を理解するための数学, p.121 (昭 33).
- 8) 佐々木達治郎 : 等角写像の応用, 富山房, p.155 (昭 14).
- 9) Henry : Discussion of "Diffusion of Submerged Jets", Trans. A.S.C.E., Vol.115, p.691 (1950).

### Summary

#### On Discharge Coefficients of Free Efflux through the Sluice and Tainter Gates

Takashi KUSAMA

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

Sluice gates or tainter gates are widely used for the control of water. In this case, the discharge coefficient is perceived to be dependent upon the gate geometry (dimensions of the gate opening, upstream depths and the lip angle of the gate, especially for free efflux). But, the relationship among these factors seems to have been not clear enough.

In this paper, the writer tried to obtain a simplified expression of the coefficient of contraction for the free efflux through the slot, using the free streamline theory.

Furthermore, he modified the above expression by introducing the effects of gravitational force obtained by experimental researches.