縁材を有する平板の強度（第1報）

宮　入　武　夫*

（昭和35年10月20日受理）

緒　　言

弾性限界内において外力が縁材を介して平板に伝達される平面応力の状態を各種縁材について応力解析を行い，平板内，並びに縁材の応力分布を調べ，よって縁材（枠）の応力が平板の存在によって如何に変化するかを明かにし，併せて平板強度の効きを考察することが本研究の主目的である．なおこれらの理論解の裏付けとして実験を行い，その妥当性を検討した．

I　一対辺に縁材をもつ場合

対称荷重を受ける場合

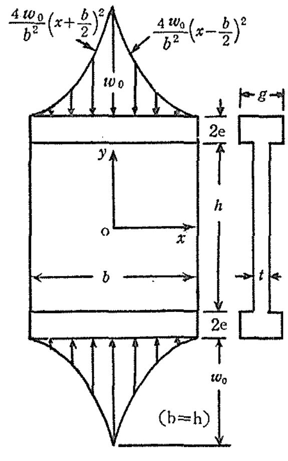
対称荷重として，第1図の如く分布荷重を考える．この荷重を $-b/2\sim b/2$ の x 区間でフーリェーの cosine 級数に展開すると，

$$f(x)=\frac{4w_0}{b^2}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=a_0+\sum a_n\cos\alpha_n x$$

ここで　$$a_0=\frac{2}{b}\int_0^{b/2}\frac{4w_0}{b^2}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2dx=\frac{w_0}{3},$$

$$a_n=\frac{4}{b}\int_0^{b/2}\frac{4w_0}{b^2}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2\cos\alpha_n x\,dx=\frac{4w_0}{(n\pi)^2}.$$

したがって　$$\frac{4w_0}{b^2}\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2=\frac{w_0}{3}+\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n x.$$



第 1 図

よって，この負荷状態を2つの荷重，$w_0/3$ の一様分布荷重と $\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n x$ の変分布荷重の和と考えて，前者に対する平板の応力関数を F_1，後者のそれを F_2 とすると，

$$F_1=\frac{w_0}{3t}\cdot\frac{x^2}{2},$$

$$F_2=\sum(A_n\cosh\alpha_n y+B_n y\sinh\alpha_n y)\cos\alpha_n x$$

---

* 機械工学教室，教授

$$+\sum (C_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \cos \alpha_n y$$

$$+\frac{a_2}{2}x^2 + \frac{b_2}{2}y^2.$$

とおくことができる. ただし, $\alpha_n = \dfrac{2n\pi}{b} = \dfrac{2n\pi}{h}$

F_1 による応力は直ちに $\sigma_y = \dfrac{w_0}{3t}$, $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$ となり, 一様の一軸応力 σ_y として求まる.

次に F_2 による各応力は, 定義から夫々, 次の如くなる:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = \sum \alpha_n \{A_n \alpha_n \cosh \alpha_n y + B_n (2\cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y)\} \cos \alpha_n x$$

$$- \sum \alpha_n^2 (C_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \cos \alpha_n y + b_2. \qquad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = -\sum \alpha_n^2 (A_n \cosh \alpha_n y + B_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \cosh \alpha_n x + D_n (2\cosh \alpha_n x + \alpha_n x \sinh \alpha_n x)\} \cos \alpha_n y$$

$$+ a_2. \qquad (b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = \sum \alpha_n \{A_n \alpha_n \sinh \alpha_n y + B_n (\sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y)\} \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \sinh \alpha_n x + D_n (\sinh \alpha_n x + \alpha_n x \cosh \alpha_n x)\} \sin \alpha_n y. \quad (c)$$

応力関数中, 未知数 A_n, B_n, C_n, D_n, a_2, b_2 は次の周辺条件によって p_n, p_n', q_n, q_n' と共に決定することができる.

周辺条件

(i) $y = \pm h/2$ において, $\sigma_y = \sum p_n \cos \alpha_n x$;
すなわち,

$$\sum p_n \cos \alpha_n x = -\sum \alpha_n^2 \left(A_n \cosh n\pi + B_n \frac{h}{2} \sinh n\pi\right) \cos \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \cosh \alpha_n x + D_n (2\cosh \alpha_n x + \alpha_n x \sinh \alpha_n x)\} (-1)^n$$

$$+ a_2$$

ここで, $\cosh \alpha_n x$, $x \sinh \alpha_n x$ を $-b/2 \sim b/2$ の x 区間でフーリェーの cosine 級数に展開すると,

$$\cosh \alpha_n x = \frac{1}{n\pi} \sinh n\pi + \sum_m \left\{ (-1)^m \frac{2n}{\pi (m^2 + n^2)} \sinh n\pi \right\} \cos \alpha_m x,$$

$$x\sinh\alpha_n x=\frac{1}{\alpha_n}\cosh n\pi-\frac{2}{b\alpha_n^2}\sinh n\pi$$

$$+\sum_m\left\{\frac{nh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^m\cosh n\pi-1\}\right.$$

$$\left.+\frac{b(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^m\sinh n\pi\right\}\cos\alpha_m x.$$

これら2式を上式に代入すると，

$$\sum p_n\cos\alpha_n x=-\sum\alpha_n^2\left(A_n\cosh n\pi+B_n\frac{h}{2}\sinh n\pi\right)\cos\alpha_n x$$

$$+\sum\left[C_n\,\alpha_n^2\left(\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi+\sum_m(-1)^m\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m x\right)\right.$$

$$+2D_n\alpha_n\left(\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi+\sum_m(-1)^m\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m x\right)$$

$$+D_n\alpha_n^2\left[\frac{1}{\alpha_n}\cosh n\pi-\frac{2}{b\alpha_n^2}\sinh n\pi\right.$$

$$+\sum_m\left\{\frac{nh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^m\cosh n\pi-1\}\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{b(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^m\sinh n\pi\right\}\cos\alpha_m x\right]\right](-1)^n+a_2$$

上式が x の値如何に関せず成立するためには，次の2つの関係式が必要となる：

$$(-1)^n\frac{2}{b}\left\{C_n\,\alpha_n\sinh n\pi+D_n(\sinh n\pi+n\pi\cosh n\pi)\right\}+a_2^{(n)}=0. \tag{1}$$

及び

$$p_n=-\alpha_n^2\left(A_n\cosh n\pi+B_n\frac{b}{2}\sinh n\pi\right)$$

$$+\sum_m\frac{2m\,\alpha_m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,(C_m\alpha_m+2D_m)$$

$$+\sum_m D_m\,\alpha_m^2\left\{\frac{mh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\}\right.$$

$$\left.+\frac{b(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\right\}. \tag{2}$$

(ii) $y=\pm h/2$ において，$\tau_{xy}=\sum p_n'\sin\alpha_n x$；

すなわち

$$\sum p'_n \sin \alpha_n x = \sum \alpha_n \{A_n \alpha_n \sinh n\pi + B_n (\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi)\} \sin \alpha_n x$$

上式が x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$p'_n = \alpha_n \{A_n \alpha_n \sinh n\pi + B_n (\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi)\}. \tag{3}$$

(iii) $x = \pm b/2$ において，$\tau_{xy} = 0$；
すなわち

$$0 = \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \sinh n\pi + D_n (\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi)\} \sin \alpha_n y,$$

上式が y の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要である．

$$C_n \alpha_n \sinh n\pi + D_n (\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi) = 0\,. \tag{4}$$

(iv) $x = \pm b/2$ において，$\sigma_x = 0$；
すなわち

$$0 = \sum \alpha_n \{A_n \alpha_n \cosh \alpha_n y + B_n (2 \cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y)\} (-1)^n$$
$$- \sum \alpha_n^2 \left(C_n \cosh n\pi + D_n \frac{b}{2} \sinh n\pi\right) \cos \alpha_n y + b_2,$$

ここで，$\cosh \alpha_n y$，$y \sinh \alpha_n y$ を $-h/2 \sim h/2$ の y 区間で フーリェーの cosine 級数に展開すると，

$$\cosh \alpha_n y = \frac{1}{n\pi} \sinh n\pi + \sum_m \frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi \cos \alpha_m y\,,$$

$$y \sinh \alpha_n y = \frac{1}{\alpha_n} \cosh n\pi - \frac{2}{b\alpha_n^2} \sinh n\pi + \sum_m \left\{ \frac{nh}{\pi(m^2+n^2)} \{(-1)^m \cosh n\pi - 1\} \right.$$
$$\left. + \frac{h(m^2-n^2)}{\pi^2 (m^2+n^2)^2} (-1)^m \sinh n\pi \right\} \cos \alpha_m x$$

これら，2式を上式に代入すると，

$$0 = \sum_m \left[A_n \alpha_n^2 \left(\frac{1}{n\pi} \sinh n\pi + \sum_m \frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi \cos \alpha_m y \right) \right.$$
$$+ 2B_n \alpha_n \left(\frac{1}{n\pi} \sinh n\pi + \sum_m \frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi \cos \alpha_m y \right)$$
$$+ B_n \alpha_n^2 \left[\frac{1}{\alpha_n} \cosh n\pi - \frac{2}{b\alpha_n^2} \sinh n\pi + \sum_m \left\{ \frac{nh}{\pi(m^2+n^2)} \{(-1)^m \cosh n\pi - 1\} \right. \right.$$

$$+\frac{h(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^m\sinh n\pi\Big\}\cos\alpha_m x\Big]\Big](-1)^n$$

$$-\sum\alpha_n^2\Big(C_n\cosh n\pi+D_n\frac{b}{2}\sinh n\pi\Big)\cos\alpha_n y+b_2 .$$

上式が y の値如何に関せず成立するためには，次の2つの関係式が必要となる：

$$(-1)^n\frac{2}{b}\Big\{A_n\,\alpha_n\sinh n\pi+B_n\,(\sinh n\pi+n\pi\cosh n\pi)\Big\}+b_2^{(n)}=0 . \tag{5}$$

および

$$\sum_m\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,\alpha_m(\alpha_m A_m+2B_m)-\alpha_n^2\Big(C_n\cosh n\pi+D_n\frac{b}{2}\sinh n\pi\Big)$$

$$+\sum_m B_m\,\alpha_m^2\Big\{\frac{mh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\}$$

$$+\frac{b\,(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\Big\}=0 . \tag{6}$$

板と梁（縁材）との連続条件

(v)　$Ev_{(y=\pm h/2)}-Ev_{(x=0,\ y=\pm h/2)}-E\delta_P=0 .$

上式は，軸に垂直方向の変位の連続条件である．これより次の関係式に変換して v 及び δ_P 式を代入する，ただし δ_P, δ_P' は梁の変位計算，u, v は板の変位計算の項参照

$$E\Big(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\Big)_{(y=\pm h/2)}-E\frac{d^4\delta_P}{dx^4}=0 .$$

したがって

$$\sum\alpha_n^5\Big\{A_n\overline{1+\nu}\sinh n\pi+B_n\Big(\frac{\overline{1+\nu}h}{2}\cosh n\pi-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\Big)\Big\}\cos\alpha_n x$$

$$+\frac{1}{I}\Big\{t\sum(e\,\alpha_n\,p_n'-p_n)\cos\alpha_n x+\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n x\Big\}=0$$

よって，上式が x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる．すなわち

$$\alpha_n^5\Big\{A_n\overline{1+\nu}\sinh n\pi+B_n\Big(\frac{\overline{1+\nu}h}{2}\cosh n\pi-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\Big)\Big\}$$

$$+\frac{1}{I}\Big\{\frac{4w_0}{(n\pi)^2}-t\,(p_n-e\,\alpha_n\,p_n')\Big\}=0 . \tag{7}$$

(vi)　軸方向の変位の連続式は，$Eu_{(y=\pm h/2)}-E\,\delta_P'=0$ であるが上式と同様

$$E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(y=\pm h/2)} - E\frac{d^2\delta_P'}{dx^2} = 0$$ なる関係式を考える.

すなわち

$$\sum \alpha_n^2 \left\{ A_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \cosh n\pi + B_n (2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\, n\pi \sinh n\pi) \right\} \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n^2 \Big[C_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \sinh \alpha_n x + D_n \{ \overline{1+\nu}\, (2\sinh \alpha_n x + \alpha_n x \cosh \alpha_n x)$$

$$- \overline{1-\nu} \sinh \alpha_n x \} \Big] (-1)^n + \frac{t}{A} \sum p_n' \sin \alpha_n x = 0.$$

ここで, $\sinh \alpha_n x$, $x\cosh \alpha_n x$ を $-b/2 \sim b/2$ の x 区間でフーリェーの sine 級数に展開すると,

$$\sinh \alpha_n x = \sum_m \left\{ -\frac{2m(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi \right\} \sin \alpha_m x,$$

$$x \cosh \alpha_n x = \sum_m \left\{ \frac{mb(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \left(\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi - \cosh n\pi \right) \right\} \sin \alpha_m x\,.$$

これら, 2式を上式に代入すると,

$$\sum \alpha_n^2 \left\{ A_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \cosh n\pi + B_n \left(2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\, n\pi \sinh n\pi \right) \right\} \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n^2 (-1)^n \Bigg\{ -\sum_m \frac{2m(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi \, (C_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n + D_n \overline{1+3\nu})$$

$$+ D_n \overline{1+\nu} \sum_m \frac{2mn(-1)^m}{m^2+n^2} \left(\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)} \sinh n\pi - \cosh n\pi \right) \Bigg\} \sin \alpha_m x$$

$$+ \frac{t}{A} \sum p_n' \sin \alpha_n x = 0.$$

上式が x の値如何に関せず成立するためには, 次の関係式が必要となる:

$$\alpha_n^2 \left\{ A_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \cosh n\pi + B_n (2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\, n\pi \sinh n\pi) \right\}$$

$$+ \sum_m \alpha_m^2 (-1)^m \Bigg\{ -\frac{2n(-1)^n}{\pi(m^2+n^2)} \sinh m\pi \, (C_m \overline{1+\nu}\, \alpha_m + D_m \overline{1+3\nu})$$

$$+ D_m \overline{1+\nu}\, (-1)^n \frac{2mn}{m^2+n^2} \left(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)} \sinh m\pi - \cosh m\pi \right) \Bigg\}$$

$$+ \frac{t}{A} p_n' = 0\,. \tag{8}$$

平板の変位の計算（u 及び v）

$$Eu=\int\sigma_x\,dx-\nu\int\sigma_y\,dx+C_u\,,\qquad Ev=\int\sigma_y\,dy-\nu\int\sigma_x\,dy+C_v\,.$$

上式に (a), (b) 式を代入して積分を行い，積分常数 C_u, C_v は変位の対称性．$x=0$ で，$u=0$ 及び $y=0$ で，$v=0$ より夫々 $C_u=C_v=0$ となる：
すなわち

$$\begin{aligned}Eu=&\sum\left\{A_n\,\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh\alpha_n y+B_n\,(2\cosh\alpha_n y+\overline{1+\nu}\,\alpha_n\,y\sinh\alpha_n y)\right\}\sin\alpha_n x\\&-\sum\alpha_n\left\{C_n\,\overline{1+\nu}\sinh\alpha_n x+D_n\left(\overline{1+\nu}\,x\cosh\alpha_n x-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh\alpha_n x\right)\right\}\cos\alpha_n y\\&+(b_2-\nu\,a_2)\,x\,,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}Ev=&-\sum\alpha_n\left\{A_n\,\overline{1+\nu}\sinh\alpha_n y+B_n\left(\overline{1+\nu}\,y\cosh\alpha_n y-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh\alpha_n y\right)\right\}\cos\alpha_n x\\&+\sum\left\{C_n\,\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh\alpha_n x+D_n\,(2\cosh\alpha_n x+\overline{1+\nu}\,\alpha_n x\sinh\alpha_n x)\right\}\sin\alpha_n y\\&+(a_2-\nu\,b_2)\,y.\end{aligned}$$

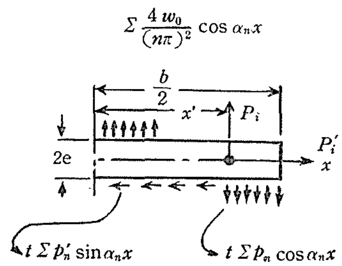
となる．ここで $E\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=2\,\overline{1+\nu}\,\tau_{xy}$ をみたすことは云うまでもない．

梁の変位の計算（δ_P 及び δ_P'）

梁の x, y 方向の変位 δ_P, δ_P' を求めるために x 及び y 方向に仮想荷重 P_i 及び P_i' を考え，梁の全歪エネルギー U を計算し，カスチリヤノの定理

$$\delta_P=\frac{\partial U}{\partial P_{i(P_i=0)}}\,,\qquad \delta_P'=\frac{\partial U}{\partial P'_{i\,(P_i'=0)}}$$

より求める．（第2図参照）



第 2 図

すなわち

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{2AE}\int_0^{x'}\left[P_i'-t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta\right]^2dx\\&+\frac{1}{2IE}\int_0^{x'}\Big[-P_i(x'-x)+e\,t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta+t\sum\int_x^{b/2}p_n(\zeta-x)\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta\\&\qquad-\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\int_x^{b/2}(\zeta-x)\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta\Big]^2dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2AE}\int_0^{x'}\Big[P_i' - t\sum p_n' \frac{1}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}\Big]^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2IE}\int_0^{x'}\Big[- P_i(x'-x) + e\,t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}$$

$$- t\sum\frac{p_n}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\} + \sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}\Big]^2 dx$$

したがって

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P_{i(P_i=0)}}$$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^{x'}\Big[e\,t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\} - t\sum\frac{p_n}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}$$

$$+ \sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\frac{1}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}\Big](x - x')\,dx$$

$$= \frac{1}{IE}\Big[e\,t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\Big\{\frac{1}{\alpha_n^2}(\cos\alpha_n x - 1) + (-1)^n\frac{x^2}{2}\Big\}$$

$$- t\sum\frac{p_n}{\alpha_n^2}\Big\{\frac{1}{\alpha_n^2}(\cos\alpha_n x - 1) + (-1)^n\frac{x^2}{2}\Big\}$$

$$+ \sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n^2}\Big\{\frac{1}{\alpha_n^2}(\cos\alpha_n x - 1) + (-1)^n\frac{x^2}{2}\Big\}\Big]^*$$

よって

$$E\,\delta_P = \frac{1}{I}\Big[\Big(e\,t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n} - t\sum\frac{p_n}{\alpha_n^2}\Big)\Big(\frac{1}{\alpha_n^2}\cos\alpha_n x - \frac{1}{\alpha_n^2} + (-1)^n\frac{x^2}{2}\Big\}$$

$$+ \sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n^2}\Big\{\frac{1}{\alpha_n^2}(\cos\alpha_n x - 1) + (-1)^n\frac{x^2}{2}\Big\}\Big].$$

同様に

$$\delta_{P'} = \frac{\partial U}{\partial P'_{i(P_i'=0)}}$$

$$= \frac{1}{AE}\int_0^{x'}\Big[-t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n x - (-1)^n\}\Big]dx$$

$$= \frac{1}{AE}\Big[-t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\Big(\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x - (-1)^n x\Big)\Big]_0^{x'}$$

$$= \frac{1}{AE}\Big[-t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\Big(\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x - (-1)^n x\Big)\Big]$$

---

* x' を x に置換える以下同様。

よって

$$E\,\delta'_P = \frac{t}{A}\sum\frac{p'_n}{\alpha_n}\left((-1)^n x - \frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x\right).$$

以上，８個の諸条件式を再び一括すると次の如くなる：

$$(-1)^n\frac{2}{b}\{C_n\alpha_n\sinh n\pi + D_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi)\} + a_2^{(n)} = 0. \tag{1}$$

$$p_n = -\alpha_n^2\left(A_n\cosh n\pi + B_n\frac{h}{2}\sinh n\pi\right) + \sum_m\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\alpha_m\sinh m\pi\,(C_m\alpha_m + 2D_m)$$
$$+\sum_m D_m\alpha_m^2\left\{\frac{mh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi - (-1)^m\}\right.$$
$$\left. + \frac{b(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\right\}. \tag{2}$$

$$p'_n = \alpha_n\{A_n\alpha_n\sinh n\pi + B_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi)\}. \tag{3}$$

$$C_n\alpha_n\sinh n\pi + D_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi) = 0. \tag{4}$$

$$(-1)^n\frac{2}{b}\{A_n\alpha_n\sinh n\pi + B_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi)\} + b_2^{(n)} = 0. \tag{5}$$

$$\sum_m\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\alpha_m\sinh m\pi\,(\alpha_m A_m + 2B_m) - \alpha_n^2\left(C_n\cosh n\pi + D_n\frac{b}{2}\sinh n\pi\right)$$
$$+\sum_m B_m\alpha_m^2\left\{\frac{mh}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi - (-1)^m\}\right.$$
$$\left. + \frac{h(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\right\} = 0. \tag{6}$$

$$\alpha_n^5\left\{A_n\overline{1+\nu}\sinh n\pi + B_n\left(\frac{\overline{1+\nu}h}{2}\cosh n\pi - \frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{I}\left\{\frac{4w_0}{(n\pi)^2} - t(p_n - e\,\alpha_n p'_n)\right\} = 0. \tag{7}$$

$$\alpha_n^2\left\{A_n\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi + B_n(2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\,n\pi\sinh n\pi)\right\}$$
$$+\sum_m\alpha_m^2(-1)^m\left\{-\frac{2n(-1)^n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,(C_m\overline{1+\nu}\,\alpha_m + D_m\overline{1+3\nu})\right.$$
$$\left. + D_m\overline{1+\nu}\frac{2mn(-1)^n}{m^2+n^2}\left(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi - \cosh m\pi\right)\right\} + \frac{t}{A}p'_n = 0. \tag{8}$$

以上，８個の関係式は未知数８個（A_n, B_n, C_n, D_n, $\alpha_2^{(n)}$, $b_2^{(n)}$, p_n, p_n'）を含む連立方程式となり，この解として，応力関数 F_2 が定まり，応力を知ることができる．

そこで，以上８個の方程式群より，根を求めるため，下記の如く，$a_2^{(n)}$, $b_2^{(n)}$, C_n, p_n 及び p_n' を消去すると，A_n, B_n, D_n の３群の方程式 (11), (12), (13) が求まる．

それらを連立して解くことにより，所要の根が得られる．

すなわち

(4) より
$$C_n = -\frac{D_n}{\alpha_n}(1 + n\pi \coth n\pi), \tag{9}$$

(4) を (1) に入れて
$$a_2^{(n)} = 0\,. \tag{9'}$$

(3) と (8) より p_n' を消去すると，

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^2\left(\overline{1+\nu}\,\alpha_n \cosh n\pi + \frac{t}{A}\sinh n\pi\right)A_n \\
&+ \alpha_n\left\{\left(2\alpha_n + \frac{n\pi t}{A}\right)\cosh n\pi + \left(\overline{1+\nu}\,n\pi\,\alpha_n + \frac{t}{A}\right)\sinh n\pi\right\}B_n \\
&+ \sum_m \alpha_m^2(-1)^m\left\{-\frac{2n(-1)^n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,(C_m\,\overline{1+\nu}\,\alpha_m + D_m\,\overline{1+3\nu})\right. \\
&\left.+ D_m\,\overline{1+\nu}\,\frac{2mn(-1)^n}{m^2+n^2}\left(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi - \cosh m\pi\right)\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

(9) と (10) より C_n を消去すると，

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^2\left(\overline{1+\nu}\,\alpha_n \cosh n\pi + \frac{t}{A}\sinh n\pi\right)A_n \\
&+ \alpha_n\left\{\left(2\alpha_n + \frac{n\pi t}{A}\right)\cosh n\pi + \left(\overline{1+\nu}\,n\pi\,\alpha_n + \frac{t}{A}\right)\sinh n\pi\right\}B_n \\
&+ \sum_m \alpha_m^2(-1)^m\left[-\frac{2n(-1)^n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\left\{\overline{1+3\nu} - \overline{1+\nu}\,(1+m\pi\coth m\pi)\right\}\right. \\
&\left.+ \overline{1+\nu}\,\frac{2mn(-1)^n}{m^2+n^2}\left(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi - \cosh m\pi\right)\right]D_m = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

(2), (3), (7), (9) より，p_n, p_n', C_n を消去すると，

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^2\left\{\alpha_n\left(\overline{1+\nu}\,\alpha_n^2 + \frac{e\,t}{I}\right)\sinh n\pi + \frac{t}{I}\cosh n\pi\right\}A_n \\
&+ \alpha_n^2\left[-\left\{\overline{1-\nu}\,\alpha_n^2 - \frac{t}{I}\left(\frac{h}{2}+e\right)\right\}\sinh n\pi + \left(\frac{\overline{1+\nu}\,h}{2}\alpha_n^3 + \frac{e\,t}{I}n\pi\right)\cosh n\pi\right]B_n
\end{aligned}$$

$$-\frac{t}{I}\Bigl[\sum_m \frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,\alpha_m\,(1-m\pi\coth m\pi)$$

$$+\sum_m \alpha_m^2\Bigl\{\frac{mh}{\pi(m^2+n^2)}\,\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\}$$

$$+\frac{b(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\Bigr\}\Bigr]D_m+\frac{1}{I}\cdot\frac{4w_0}{(n\pi)^2}=0. \qquad (12)$$

(6), (9) より C_n を消去すると，

$$\sum_m \alpha_m^2\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\cdot A_m+\sum_m h\,\alpha_m^2\Bigl\{\frac{m}{\pi(m^2+n)}\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\}$$

$$+\frac{m^2+3n^2}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\Bigr\}B_m+\alpha_n\Bigl(\cosh n\pi+\frac{n\pi}{\sinh n\pi}\Bigr)D_n=0. \qquad (13)$$

数値計算例

第1図の各寸法を次の如く採る：

$b=h=40$mm,　$t=4$mm,　$2e=6$mm,　$g=10$mm,　$\nu=0.3$

梁の断面積：　$A=2e\times g=60\text{mm}^2$,　荷　重：$w_0=-100$kg/mm.

梁の慣性モーメント：$I=\dfrac{g\times(2e)^3}{12}=180\text{mm}^4$,　全荷重：$W=\dfrac{w_0\times b}{3}=-1333.3$kg

以上の数値を (11), (12), (13) 式に代入して，各項数を ($n=1$, 2, 3, 4, 5) 5項まで採つて，A, B, D に関する 15元連立1次方程式 を書くと第1表の如くなる：

この方程式を解くと各根，A_n, B_n, D_n は第2表の如く求まる．

第2表　根 (A_n, B_n, D_n) の値

$A_1=+9.1506460\times10$	$B_1=-3.2416000$	$D_1=+1.0271841$
$A_2=+7.4431864\times10^{-2}$	$B_2=-2.7142232\times10^{-3}$	$D_2=-9.6114482\times10^{-3}$
$A_3=+1.1215942\times10^{-3}$	$B_3=-5.0489006\times10^{-5}$	$D_3=+2.3586835\times10^{-4}$
$A_4=+8.6804404\times10^{-7}$	$B_4=-2.7172881\times10^{-8}$	$D_4=-3.3428178\times10^{-6}$
$A_5=+7.1026424\times10^{-8}$	$B_5=-3.1185096\times10^{-9}$	$D_5=+1.0820404\times10^{-7}$

よって，これらの根を，(9) に代入して，C_n，(2) 及び (3) に代入して，p_n 及び p_n' が求められる．又，(9′) より直ちに $a_2=0$，(5) より $b_2=\sum_n b_2^{(n)}$ として求めることが出来る．次に C_n, p_n, p_n', $b_2^{(n)}$ の値を第3表に示す．

第1表　15元連立一次方程式 I　　未知数 ($A_1 \cdots\cdots A_5$,　$B_1 \cdots\cdots B_5$,　$D_1 \cdots\cdots D_5$)

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_1	B_2	B_3	B_4
0.077 4					2.238 1			
	12.554 1					309.538 9		
		934.604 8					21 638.5100 0	
			50 007.127 6					1 119 353.830 0
				2 226 047.300 0				
0.010 8					0.229 4			
	2.205 8					44.052 9		
		260.977 2					5 097.365 9	
			21 881.086 9					425 753.340 0
				1 441 614.083 1				
0.090 7	−6.729 2	262.774 0	−8 478.642 4	250 558.010 8	3.132 8	−165.074 2	5 925.477 1	−186 455.685 6
−0.036 3	4.205 7	−202.133 9	7 206.846 1	−224 638.221 8	−1.266 0	110.575 4	−4 734.931 2	160 193.988 6
0.018 1	−2.588 1	145.985 6	−5 765.476 8	191 603.189 0	0.719 0	−71.601 7	3 539.764 5	−131 093.132 3
−0.010 7	1.682 3	−105.109 6	4 504.278 8	−158 890.448 4	−0.391 5	47.443 1	−2 610.405 7	104 422.521 2
0.007 0	−1.160 2	77.286 5	−3 515.534 6	130 290.167 2	0.282 0	−33.351 2	1 951.173 7	−82 729.554 5

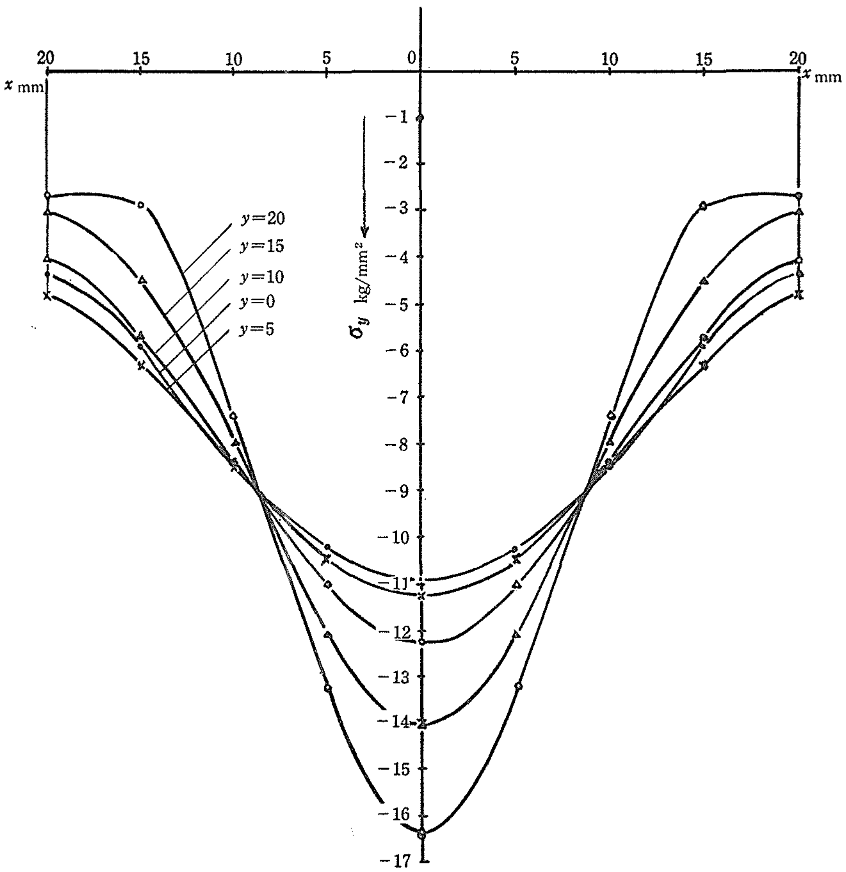
第1表　続　き

B_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
	0.063 5	−4.979 6	152.407 2	−3 915.176 0	95 209.436 5	=0	(1)
	0.005 8	2.944 2	−161.705 5	5 333.133 3	−147 481.916 4	=0	(2)
	−0.018 5	−0.776 4	102.189 9	−4 600.928 9	150 796.976 3	=0	(3)
	0.019 1	−0.269 2	−47.088 6	3 153.075 8	−125 245.529 5	=0	(4)
48 787 851.700 0	−0.017 4	0.700 1	11.363 3	−1 822.153 8	91 196.308 0	=0	(5)
	−0.016 3	0.201 6	−2.497 0	35.305 5	−545.360 0	=0.225 2	(6)
	0.006 8	−0.290 5	5.851 4	−101.933 6	1 753.345 4	=0.056 3	(7)
	−0.005 3	0.257 8	−6.894 7	146.834 4	−2 870.114 6	=0.025 0	(8)
	0.002 4	−0.187 6	6.337 0	−159.292 2	3 508.791 2	=0.014 1	(9)
28 084 988.636 5	−0.002 2	0.143 4	−5.365 3	151.640 6	−3 686.473 2	=0.009 0	(10)
5 354 717.201 8	1.863 5					=0	(11)
−4 857 688.077 2		84.122 5				=0	(12)
4 205 179.014 6			2 919.712 1			=0	(13)
−3 538 004.931 9				90 085.579 6		=0	(14)
2 937 585.317 4					2 605 803.440 0	=0	(15)

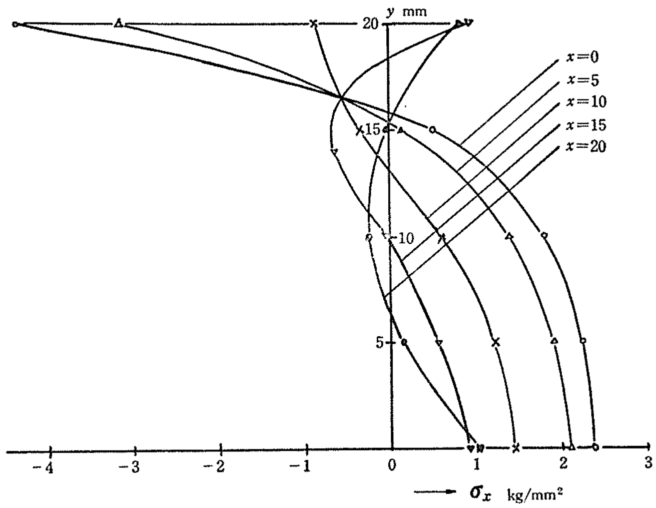
第3表　C_n, p_n, p'_n, $b_2^{(n)}$ の値

$C_1=-27.1598$	$p_1=-6.9283$	$p_1'=+1.6513$	$b_2^{(1)}=+0.5256$
$C_2=+22.282\times10^{-4}$	$p_2=-1.0577$	$p_2'=+0.3041$	$b_2^{(2)}=-0.0484$
			$b_2^{(3)}=+6.822\times10^{-4}$
$C_3=-52.179\times10^{-4}$	$p_3=+0.3110$	$p_3'=+0.0064$	$b_2^{(4)}=-1.267\times10^{-3}$
$C_4=+72.177\times10^{-6}$	$p_4=-0.3175$	$p_4'=+0.0159$	$b_2^{(5)}=+1.128\times10^{-3}$
$C_5=-23.018\times10^{-7}$	$p_5=-0.3764$	$p_5'=+0.0096$	$b_2=\sum_n b_2^{(n)}=+0.4778$

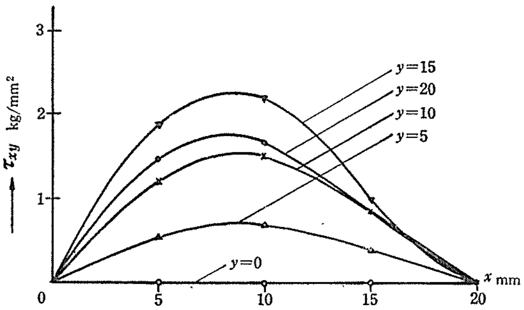
以上で，すべての根が求まつたので，次に各応力は，(a)，(b)，(c) 式より，σ_x, σ_y, τ_{xy} を計算して図に画くと 第3図，第4図，第5図の如く示される．



第 3 図　σ_y 曲線



第 4 図　σ_x 曲線



第 5 図　τ 曲線

梁の強度

(i)　軸力 (N) kg

$$N=-t\sum\int_x^{b/2} p_n' \sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta = t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\{(-1)^n-\cos\alpha_n x\}.$$

最大軸応力　$\sigma_N=\dfrac{N}{A}=\dfrac{-84.3}{60}=-1.405\,\mathrm{kg/mm^2}$　　$(A=60\mathrm{mm^2})$

(ii)　曲げモーメント (M) kg·mm

$$M=e\,t\sum\int_x^{b/2} p_n' \sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta + t\sum\int_x^{b/2} p_n(\zeta-x)\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta$$

$$-\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\int_x^{b/2}(\zeta-x)\ \cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta$$

$$=\sum\frac{1}{\alpha_n}\left(e\,t\,p_n'-\frac{tp_n}{\alpha_n}+\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n}\right)\{\cos\alpha_n x-\ (-1)^n\}.$$

最大曲げ応力　$\sigma_M=\frac{M}{Z}=\pm\frac{838}{60}=\pm 13.96\ \mathrm{kg/mm^2}$

(iii)　剪断力 (F) kg

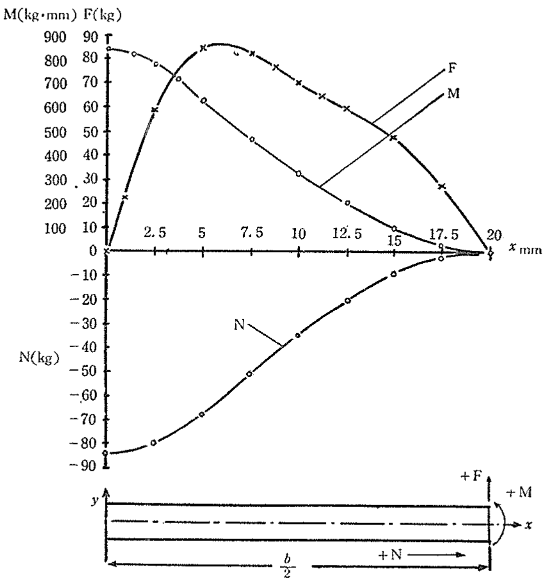
$$F=\sum\int_x^{b/2}\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta-t\sum\int_x^{b/2}p_n\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta$$

$$=\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\left[\frac{\sin\alpha_n\zeta}{\alpha_n}\right]_x^{b/2}-t\sum p_n\left[\frac{\sin\alpha_n\zeta}{\alpha_n}\right]_x^{b/2}$$

$$=-\sum\left(\frac{4w_0}{(n\pi)^2}-t\,p_n\right)\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n}.$$

最大剪断応力　$\tau=\frac{F}{A}=\frac{85}{60}=1.416\mathrm{kg/mm^2}$

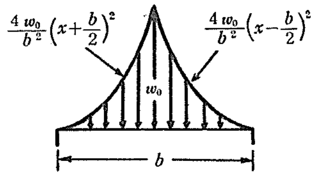
以上より N, M, F 線図を画くと第6図の如くなる:



第 6 図　横梁の N, M, F 曲線

II　周辺に縁材をもつ場合

Iと同一の対称荷重を受ける場合，即ち第7図の如き変分布荷重をフーリェーの cosine 級数に展開すると.



第7図

$$f(x)=\frac{4w_0}{b^2}\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2=a_0+\sum a_n\cos\alpha_n x.$$

ここで，　$a_0=\frac{w_0}{3}$，　$a_n=\frac{4w_0}{(n\pi)^2}$.

したがって　$f(x)=\frac{w_0}{3}+\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n x.$　　但し　$\alpha_n=\frac{2n\pi}{b}=\frac{2n\pi}{h}$

よって，この荷重は $\frac{w_0}{3}$ の一様分布荷重と，$\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n x$ の変分布荷重に分けて考え．最初に $\frac{w_0}{3}$ を一般に kw_0 として $-b\sim b$ の x 区間でフーリェーの cosine 級数に展開する．ここで $kw_0=\sum a_n\cos\beta_n x$ と置くと．

$$a_n=k\,w_0\frac{2}{b}\int_0^b\cos\beta_n x\cdot dx=k\,w_0\frac{2}{b}\left[\int_0^{b/2}\cos\beta_n x\cdot dx-\int_{b/2}^b\cos\beta_n x\cdot dx\right]$$

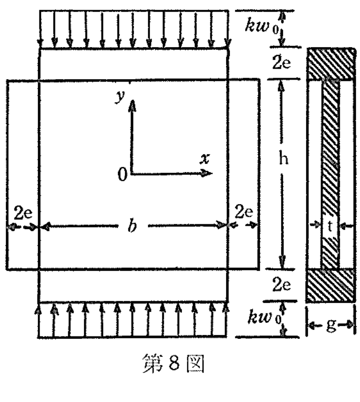
$$=k\,w_0\frac{2}{b}\left[\left|\frac{b}{n\pi}\sin\beta_n x\right|_0^{b/2}-\left|\frac{b}{n\pi}\sin\beta_n x\right|_{b/2}^{b}\right]=\frac{4kw_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$\therefore\quad k\,w_0=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{4k\,w_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\beta_n x.\qquad 但し\quad \beta_n=\frac{n\pi}{b}=\frac{n\pi}{h}.$$

この場合 $k=\frac{1}{3}$ であるから，$\frac{w_0}{3}=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{4w_0}{3n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\beta_n x$ となる.

(1)　等分布荷重 $\left(\frac{w_0}{3}\right)$ を受ける場合

第8図の如く周辺に縁材をもち，これに等分布荷重 $\left(\frac{w_0}{3}\right)$ を受ける場合.



第8図

応力関数 F_1；

$$F_1=\sum(A_n\cosh\beta_n y+B_n y\sinh\beta_n y)\cos\beta_n x$$
$$+\sum(C_n\cosh\beta_n x+D_n x\sinh\beta_n x)\cos\beta_n y$$
$$+\frac{a_2}{2}x^2+\frac{b_2}{2}y^2.$$

と置く．ただし $\beta_n=\dfrac{n\pi}{b}=\dfrac{n\pi}{h}$，なお荷重の性質から $n=1,\ 3,\ 5,\cdots\cdots$である。以下同様．したがって，各応力は夫々次の如くなる：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}=\sum\beta_n\{A_n\beta_n\cosh\beta_n y+B_n(2\cosh\beta_n y+\beta_n y\sinh\beta_n y)\}\cos\beta_n x$$
$$-\sum\beta_n^2(C_n\cosh\beta_n x+D_n x\sinh\beta_n x)\cos\beta_n y+b_2.$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}=-\sum\beta_n^2(A_n\cosh\beta_n y+B_n y\sinh\beta_n y)\cos\beta_n x$$
$$+\sum\beta_n\{C_n\beta_n\cosh\beta_n x+D_n(2\cosh\beta_n x+\beta_n x\sinh\beta_n x)\}\cos\beta_n y+a_2.$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\cdot\partial y}=\sum\beta_n\{A_n\beta_n\sinh\beta_n y+B_n(\sinh\beta_n y+\beta_n y\cosh\beta_n y)\}\sin\beta_n x$$
$$+\sum\beta_n\{C_n\beta_n\sinh\beta_n x+D_n(\sinh\beta_n x+\beta_n x\cosh\beta_n x)\}\sin\beta_n y.$$

周 辺 条 件

(i) $y=\pm h/2$ で，$\sigma_y=p_0+\sum p_n\cos\beta_n x$

したがって，

$$p_0+\sum p_n\cos\beta_n x=-\sum\beta_n^2\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{2}+B_n\frac{h}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\cos\beta_n x+a_2.$$

一方，垂直方向の力の釣合より，

$$\sum_m\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{b/2}\cos\beta_n x\cdot dx-t\sum\int_0^{b/2}(p_0{}^{(n)}+p_n\cos\beta_n x)\,dx=0$$

したがって，

$$p_0{}^{(n)}=\frac{2}{n\pi t}\left(\frac{4kw_0}{n\pi}-t(-1)^{\frac{n-1}{2}}p_n\right).$$

(ii) $y=\pm h/2$ で，$\tau_{xy}=\sum p_n'\sin\beta_n x$

したがって，

$$\sum p_n'\sin\beta_n x=\sum\beta_n\left\{A_n\beta_n\sinh\frac{n\pi}{2}+B_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\sin\beta_n x$$
$$+\sum\beta_n\{C_n\beta_n\sinh\beta_n x+D_n(\sinh\beta_n x+\beta_n x\cosh\beta_n x)\}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

(iii) $x=\pm b/2$ で，$\sigma_x=q_0+\sum q_n\cos\beta_n y.$

しかるに，縦梁の水平方向の力の釣合より，

$$\int_0^{h/2}\sigma_x\,dy=0=\left[q_0 y+\sum\frac{q_n}{\beta_n}\sin\beta_n y\right]_0^{h/2}=q_0\frac{h}{2}+\sum\frac{q_n}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

であるから

$$q_0 = -\frac{2}{h}\sum\frac{q_n}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} = -\sum\frac{2q_n}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

したがって

$$q_0 + \sum q_n \cos\beta_n y = \sum q_n\left(\cos\beta_n y - \frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$$= -\sum\beta_n^2\left(C_n\cosh\frac{n\pi}{2} + D_n\frac{b}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\cos\beta_n y + b_2.$$

(iv)　$x = \pm b/2$ で，$\tau_{xy} = \sum q_n' \sin\beta_n y.$

したがって，

$$\sum q_n'\sin\beta_n y = \sum\beta_n\{A_n\beta_n\sinh\beta_n y + B_n(\sinh\beta_n y + \beta_n y\cosh\beta_n y)\}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+\sum\beta_n\left\{C_n\beta_n\sinh\frac{n\pi}{2} + D_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\sin\beta_n y.$$

以上の諸周辺条件式を変形整理すると．

(i) より　$$p_n = -\beta_n^2\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{2} + B_n\frac{h}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right). \tag{1}$$

および　$$p_0 = a_2. \tag{1'}$$

(ii) において，$\sinh\beta_n x$，$x\cosh\beta_n x$ を $-b\sim b$ の x 区間でフーリェーの sine 級数に展開すると，

$$\sinh\beta_n x = \sum_{m=1,3,5,\cdots}\frac{4n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cosh\frac{n\pi}{2}\sin\beta_m x.$$

$$x\cosh\beta_n x = \sum_{m=1,3,5,\cdots}2b(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh\frac{n\pi}{2} - \frac{2(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\sin\beta_m x$$

となり，これら２式を上記 (ii) に代入すると，

$$\sum p_n'\sin\beta_n x = \sum\beta_n\left\{A_n\beta_n\sinh\frac{n\pi}{2} + B_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\sin\beta_n x$$

$$+\sum\beta_n\Bigg[C_n\beta_n\sum_{m=1,3,5,\cdots}\frac{4n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cosh\frac{n\pi}{2}\sin\beta_m x$$

$$+D_n\Bigg\{\sum_{m=1,3,5,\cdots}\frac{4n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cosh\frac{n\pi}{2}\sin\beta_m x.$$

$$+\beta_n \sum_{m=1,3,5,\cdots} 2b(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2(n^2-m^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\sin\beta_m x\right\}\right](-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

上式が，x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$p_n' = \beta_n^2 \sinh\frac{n\pi}{2}\cdot A_n + \beta_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\cdot B_n$$

$$+\sum_{m=1,3,5,\cdots} C_m \beta_m^2 \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\cosh\frac{m\pi}{2}$$

$$+\sum_{m=1,3,5,\cdots} D_m \beta_m (-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+2m\pi\left(\frac{m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{2(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}. \tag{2}$$

(iii) より，

$$b_2^{(n)} = -\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot q_n. \tag{3}$$

及び

$$q_n = -\beta_n^2\left(C_n\cosh\frac{n\pi}{2}+D_n\frac{b}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right). \tag{4}$$

(iv) において，$\sinh\beta_n y$, $y\cosh\beta_n y$ を $-h\sim h$ の y 区間でフーリェーの sine 級数に展開すると，(ii) と全く同様にして，次の関係式が必要となる.

$$q_n' = \sum_{m=1,3,5,\cdots}\beta_m^2(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+\sum_{m=1,3,5,\cdots}\beta_m(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+2m\pi\left(\frac{m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{2(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}\cdot B_m$$

$$+C_n\beta_n^2\sinh\frac{n\pi}{2}+D_n\beta_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right). \tag{5}$$

板と横梁との連続条件

(V) $Ev_{y=\pm h/2}-Ev_{x=0,\ y=\pm h/2}-E\delta_P=0$ より，$E\left(\dfrac{\partial^5 v}{\partial x^5}\right)_{y=\pm h/2}-E\dfrac{d^5\delta_P}{dx^5}=0$ として，

$$\sum \beta_n^5 \left\{ A_n \overline{1+\nu} \sinh \frac{n\pi}{2} + B_n \left(\overline{1+\nu} \frac{h}{2} \cosh \frac{n\pi}{2} - \frac{1-\nu}{\beta_n} \sinh \frac{n\pi}{2} \right) \right\} \cos \beta_n x$$

$$+ \sum \beta_n^4 \Big[C_n \overline{1+\nu} \beta_n \sinh \beta_n x + D_n \{ 2 \sinh \beta_n x$$

$$+ \overline{1+\nu} (5 \sinh \beta_n x + \beta_n x \cosh \beta_n x) \} \Big] (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{I} \left(e\, t \sum p_n' \beta_n \sin \beta_n x - t \sum p_n \sin \beta_n x + \frac{4kw_0}{\pi} \sum \frac{1}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \beta_n x \right) = 0$$

ここで，$\sinh \beta_n x$，$x \cosh \beta_n x$ を $-b \sim b$ の x 区間でフーリェーの cosine 級数に展開すると，

$$\sinh \beta_n x = \sum_{m=1,3,5,\cdots} \frac{4n}{\pi (m^2+n^2)} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cosh \frac{n\pi}{2} \sin \beta_m x$$

$$x \cosh \beta_n x = 2b \sum_{m=1,3,5,\cdots} \left(\frac{n}{\pi (m^2+n^2)} \sinh \frac{n\pi}{2} - \frac{2(n^2-m^2)}{\pi^2 (m^2+n^2)^2} \cosh \frac{n\pi}{2} \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \beta_m x.$$

これら，２式を上式に代入して，x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$- \beta_n^5 \left\{ A_n \overline{1+\nu} \sinh \frac{n\pi}{2} + B_n \left(\overline{1+\nu} \frac{h}{2} \cosh \frac{n\pi}{2} - \frac{1-\nu}{\beta_n} \sinh \frac{n\pi}{2} \right) \right\}$$

$$+ \sum C_m \beta_m{}^5 \overline{1+\nu} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{4n}{\pi (m^2+n^2)} \cosh \frac{n\pi}{2}$$

$$- \frac{1}{I} \left(e\, t\, p_n' \beta_n - t\, p_n + \frac{4kw_0}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right)$$

$$+ \sum D_m (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \left\{ 2(3+2\nu) \beta_m{}^4 \frac{4n}{\pi(m^2+n^2)} \cosh \frac{m\pi}{2} \right.$$

$$\left. + \overline{1+\nu} \cdot 2h\, \beta_m{}^5 \left(\frac{n}{\pi(m^2+n^2)} \sinh \frac{m\pi}{2} - \frac{4mn}{\pi^2 (m^2+n^2)^2} \cosh \frac{m\pi}{2} \right) \right\} = 0. \qquad (6)$$

(vi)　$Eu_{y=\pm h/2} - E\delta p = 0$ より，$E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y=\pm h/2} - E\frac{d^2 \delta p}{dx^2} = 0$ として，

$$- \sum \beta_n{}^2 \left\{ A_n \overline{1+\nu} \beta_n \cosh \frac{n\pi}{2} + B_n \left(2 \cosh \frac{n\pi}{2} + \overline{1+\nu} \frac{n\pi}{2} \sinh \frac{n\pi}{2} \right) \right\} \sin \beta_n x$$

$$-\frac{t}{A}\sum p_n' \sin\beta_n x = 0.$$

上式が，x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$\beta_n^2\left\{A_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2}+B_n\left(2\cosh\frac{n\pi}{2}+\overline{1+\nu}\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}+\frac{t}{A}p_n' = 0. \quad (7)$$

板と縦梁との連続条件

(vii) $Eu_{x=\pm b/2}-Eu_{x=\pm b/2,\,y=0}-E\delta_Q=0$ より，$E\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)_{x=\pm b/2}-E\frac{d^5\delta_Q}{dy^5}=0$ として，

$$\sum\beta_n^4\left\{A_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\sinh\beta_n y+B_n(\overline{7+5\nu}\sinh\beta_n y+\overline{1+\nu}\,\beta_n y\cosh\beta_n y)\right\}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+\sum\beta_n^5\left\{C_n\overline{1+\nu}\sinh\frac{n\pi}{2}+D_n\left(\overline{1+\nu}\,\frac{b}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}-\frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\sin\beta_n y$$

$$-\frac{t}{I}\left(\sum q_n\sin\beta_n y-e\sum q_n'\,\beta_n\sin\beta_n y\right)=0,$$

ここで，$\sinh\beta_n y$，$y\cosh\beta_n y$ を $-h\sim h$ の y 区間でフーリエーの sine 級数に展開して，上式が y の値如何に関せず，成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$\sum_m \beta_m{}^5\,\overline{1+\nu}\,(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+\sum_m\beta_m^4\,(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{\overline{7+5\nu}\cdot 4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+2h\,\overline{1+\nu}\,\beta_m\left(\frac{m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{2(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}B_m$$

$$+\beta_n{}^5\left\{\overline{1+\nu}\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot C_n+\left(\overline{1+\nu}\,\frac{b}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}-\frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)D_n\right\}$$

$$+\frac{e\,t}{I}\beta_n q_n'-\frac{t}{I}q_n=0, \quad (8)$$

(viii) $Ev_{x=\pm b/2}-E\delta_Q'=0$ より，$E\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{x=\pm b/2}-E\frac{d^2\delta_Q'}{dy^2}=0$ として，

$$\sum\beta_n^2\left\{C_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2}+D_n\left(2\cosh\frac{n\pi}{2}+\overline{1+\nu}\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\sin\beta_n y$$

$$+\frac{t}{A}\sum q_n'\sin\beta_n y=0,$$

上式が，y の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$\frac{t}{A}q_n' + \beta_n^2\left\{C_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2} + D_n\left(2\cosh\frac{n\pi}{2} + \overline{1+\nu}\,\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = 0. \tag{9}$$

平板の変位（u 及び v），（Iと同様）

$$Eu = \sum\left\{A_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\beta_n y + B_n(2\cosh\beta_n y + \overline{1+\nu}\,\beta_n y\sinh\beta_n y)\right\}\sin\beta_n x$$

$$-\sum\beta_n\left\{C_n\overline{1+\nu}\sinh\beta_n x + D_n\left(\overline{1+\nu}\,x\cosh\beta_n x - \frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\beta_n x\right)\right\}\cos\beta_n y$$

$$+(b_2-\nu a_2)x.$$

及び

$$Ev = -\sum\beta_n\left\{A_n\overline{1+\nu}\sinh\beta_n y + B_n\left(\overline{1+\nu}\,y\cosh\beta_n y - \frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\beta_n y\right)\right\}\cos\beta_n x$$

$$+\sum\left\{C_n\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\beta_n x + D_n(2\cosh\beta_n x + \overline{1+\nu}\,\beta_n x\sinh\beta_n x)\right\}\sin\beta_n y$$

$$+(a_2-\nu b_2)y.$$

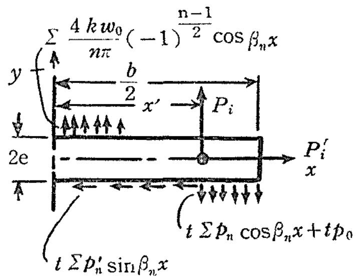
横梁の変位の計算（δ_P 及び $\delta_{\bar{P}}$），（Iと同様）

$$U = \frac{1}{2AE}\int_0^{x'}\left[P_i' - t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\beta_n\zeta\cdot d\zeta\right]^2 dx$$

$$+\frac{1}{2IE}\int_0^{x'}\Big[-P_i(x'-x) + e\,t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\beta_n\zeta\cdot d\zeta$$

$$+t\sum\int_x^{b/2}(p_0^{(n)} + p_n\cos\beta_n\zeta)(\zeta-x)\,d\zeta$$

$$-\sum\frac{4kw_0}{n\pi}\int_x^{b/2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\zeta-x)\cos\beta_n\zeta\cdot d\zeta\Big]^2 dx.$$



第9図

$$= \frac{1}{2AE}\int_0^{x'}\left[P_i' - t\sum\frac{p_n'}{\beta_n}\cos\beta_n x\right]^2 dx$$

$$+\frac{1}{2IE}\int_0^{x'}\Big[-P_i(x'-x) + e\,t\sum\frac{p_n'}{\beta_n}\cos\beta_n x + t\sum p_n\Big\{\left(\frac{b}{2}-x\right)\frac{1}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\beta_n^2}\cos\beta_n x\Big\} + t\sum p_0^{(n)}\left(\frac{b^2}{8}+\frac{x^2}{2}-\frac{bx}{2}\right)$$

$$+\sum\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\beta_n}\left\{\frac{1}{\beta_n}\cos\beta_n x - \left(\frac{b}{2}-x\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right\}\Big]^2 dx$$

したがって，

$$\delta_P=\frac{\partial U}{\partial P_{i(P_i=0)}}=\frac{1}{IE}\int_0^{x'}\Big[e\,t\sum\frac{p_n'}{\beta_n}\cos\beta_n x+t\sum\frac{p_n}{\beta_n}\Big\{\Big(\frac{b}{2}-x\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\frac{1}{\beta_n}\cos\beta_n x\Big\}$$

$$+\sum\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\beta_n}\Big\{\frac{1}{\beta_n}\cos\beta_n x-\Big(\frac{b}{2}-x\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big\}$$

$$+t\sum p_0{}^{(n)}\Big(\frac{b^2}{8}-\frac{bx}{2}+\frac{x^2}{2}\Big)\Big]^2(x-x')\,dx.$$

$$=\frac{1}{IE}\Big[e\,t\sum\frac{p_n'}{\beta_n^3}(\cos\beta_n x-1)+t\sum\frac{p_n}{\beta_n}\Big\{\Big(\frac{x^3}{6}-\frac{bx^2}{4}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\frac{1}{\beta_n^3}(\cos\beta_n x-1)\Big\}$$

$$+\frac{4kw_0}{\pi}\sum\frac{1}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big\{\frac{1}{\beta_n{}^4}(\cos\beta_n x-1)-\frac{1}{\beta_n}\Big(\frac{x^3}{6}-\frac{bx^2}{4}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big\}$$

$$-t\sum p_0{}^{(n)}\Big(\frac{x^4}{24}-\frac{bx^3}{12}+\frac{b^2x^2}{16}\Big)\Big].$$

よって，

$$E\delta_P=\frac{1}{I}\Big[et\sum\frac{p_n'}{\beta_n^3}(\cos\beta_n x-1)+t\sum\frac{p_n}{\beta_n}\Big\{\Big(\frac{x^3}{6}-\frac{bx^2}{4}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\frac{1}{\beta_n{}^3}(\cos\beta_n x-1)\Big\}$$

$$+\frac{4kw_0}{\pi}\sum\frac{1}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big\{\frac{1}{\beta_n^4}(\cos\beta_n x-1)-\frac{1}{\beta_n}\Big(\frac{x^3}{6}-\frac{bx^2}{4}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big\}$$

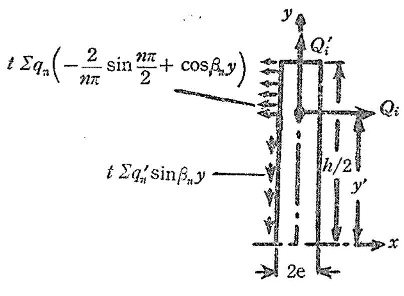
$$-t\sum p_0{}^{(n)}\Big(\frac{x^4}{24}-\frac{bx^3}{12}+\frac{b^2x^2}{16}\Big)\Big].$$

同様にして

$$\delta_P'=\frac{\partial U}{\partial P_i'{}_{(P_i'=0)}}=\frac{1}{AE}\int_0^{x'}\Big[-t\sum\frac{p_n'}{\beta_n}\cos\beta_n x\Big]dx=\frac{-t}{AE}\sum\frac{p_n'}{\beta_n^2}\sin\beta_n x.$$

よって，

$$E\,\delta_P'=\frac{-t}{A}\sum\frac{p_n'}{\beta_n^2}\sin\beta_n x.$$



第10図

縦梁の変位の計算 (δ_Q 及び δ_Q')

$$W=\frac{1}{2AE}\int_0^{y'}\Big[Q_i'-t\sum\int_y^{h/2}q_n'\sin\beta_n\xi\cdot d\xi\Big]^2dy$$

$$+\frac{1}{2IE}\int_0^{y'}\Big[-Q_i(y'-y)$$

$$+et\sum\int_y^{h/2} q_n' \sin\beta_n\xi\cdot d\xi + t\sum\int_y^{h/2} q_n(\xi-y)\Big(-\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}+\cos\beta_n\xi\Big)d\xi\Big]^2 dy$$

$$=\frac{1}{2AE}\int_0^{y'}\Big[Q_i'-t\sum\frac{q_n'}{\beta_n}\cos\beta_n y\Big]^2 dy+\frac{1}{2IE}\int_0^{y'}\Big[-Q_i(y'-y)+et\sum\frac{q_n'}{\beta_n}\cos\beta_n y$$

$$+t\sum q_n\Big\{-\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^2}{2}-\frac{hy}{2}+\frac{h^2}{8}\Big)+\frac{1}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{h}{2}-y\Big)-\frac{1}{\beta_n{}^2}\cos\beta_n y\Big\}\Big]^2 dy$$

$$\delta_Q=\frac{\partial W}{\partial Q_{i(Qi=0)}}=\frac{1}{IE}\int_0^{y'}\Big[et\sum\frac{q_n'}{\beta_n}\cos\beta_n y+t\sum q_n\Big\{-\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^2}{2}-\frac{hy}{2}+\frac{h^2}{8}\Big)$$

$$+\frac{1}{\beta_n}\Big(\frac{h}{2}-y\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\frac{1}{\beta_n^2}\cos\beta_n y\Big\}\Big](y-y')\,dy$$

$$=\frac{1}{IE}\Big[et\sum\frac{q_n'}{\beta_n^3}(\cos\beta_n y-1)+t\sum q_n\Big\{\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^4}{24}+\frac{hy^3}{12}+\frac{h^2y^2}{16}\Big)$$

$$+\frac{1}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^3}{6}-\frac{hy^2}{4}\Big)-\frac{1}{\beta_n^4}(\cos\beta_n y-1)\Big\}\Big]$$

よって，

$$E\delta_Q=\frac{t}{I}\Big[e\sum\frac{q_n'}{\beta_n^3}(\cos\beta_n y-1)+\sum q_n\Big\{\frac{1}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^4}{12}+\frac{hy^3}{6}+\frac{h^2y^2}{8}\Big)$$

$$+\frac{1}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{y^3}{6}-\frac{hy^2}{4}\Big)-\frac{1}{\beta_n^4}(\cos\beta_n y-1)\Big\}\Big]$$

同様にして，

$$\delta_Q'=\frac{\partial W}{\partial Q_i'{}_{(Q_i'=0)}}=-\frac{t}{AE}\sum\frac{q_n'}{\beta_n^2}\sin\beta_n y.$$

したがって，

$$E\delta_Q'=-\frac{t}{A}\sum\frac{q_n'}{\beta_n^2}\sin\beta_n y.$$

次に，以上10個の諸条件式を纏めると次の如くなる：

$$p_n=-\beta_n^2\Big(\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot A_n+\frac{h}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot B_n\Big). \tag{1}$$

$$p_0=a_2=\sum\frac{2}{n\pi t}\Big(\frac{4kw_0}{n\pi}-t(-1)^{\frac{n-1}{2}}p_n\Big). \tag{2}$$

$$p_n'=\beta_n^2\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot A_n+\beta_n\Big(\sinh\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\Big)\cdot B_n$$

$$+\sum \beta_m^2 \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \cosh\frac{m\pi}{2}\cdot C_m$$

$$+\sum \beta_m (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \left\{ \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2} \right.$$

$$\left. + 2m\left(\frac{m}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2} - \frac{2(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\} D_m. \tag{3}$$

$$b_2^{(n)} = -\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} q_n. \tag{4}$$

$$q_n = -\beta_n^2\left(\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot C_n + \frac{b}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot D_n\right). \tag{5}$$

$$q_n' = \sum \beta_m^2 (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+\sum \beta_m (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \left\{ \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2} \right.$$

$$\left. + 2m\left(\frac{m}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2} - \frac{2(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\} B_m$$

$$+\beta_n^2\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot C_n + \beta_n\left(\sinh\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{2}\right) D_n. \tag{6}$$

$$\beta_n^5\left\{\overline{1+\nu}\sinh\frac{n\pi}{2}\cdot A_n + \left(\overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\cosh\frac{n\pi}{2} - \frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)B_n\right\}$$

$$-\sum \beta_m^5\, \overline{1+\nu}\, (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{4n}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2}\cdot C_m$$

$$-\sum \beta_m^4 (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \left\{ \frac{8n(3+2\nu)}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{n\pi}{2} \right.$$

$$\left. + \beta_m \frac{2nh\,\overline{1+\nu}}{\pi(m^2+n^2)}\left(\sinh\frac{m\pi}{2} - \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\} D_m$$

$$+\frac{1}{I}\left(e\,t\,\beta_n\,p_n' - t\,p_n + \frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right) = 0. \tag{7}$$

$$\beta_n^2\left\{\beta_n\,\overline{1+\nu}\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot A_n + \left(2\cosh\frac{n\pi}{2} + \overline{1+\nu}\,\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)B_n\right\} + \frac{t}{A}p_n' = 0. \tag{8}$$

$$\sum \beta_m^5\, \overline{1+\nu}\, (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{4m}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+ \sum \beta_m^4 (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \left\{ \frac{4\cdot\overline{7+5\nu}m}{\pi(m^2+n^2)} \cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left. + 2m\,\overline{1+\nu}\left(\frac{m}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2} - \frac{2(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\} B_m$$

$$+ \beta_n^5\left\{\overline{1+\nu}\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot C_n + \left(\overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\cosh\frac{n\pi}{2} - \frac{1-\nu}{\beta_n}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)D_n\right\}$$

$$+\frac{e\,t}{I}\beta_n q_n' - \frac{t}{I}q_n = 0. \tag{9}$$

$$\beta_n^2\left\{\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2}\cdot C_n + \left(2\cosh\frac{n\pi}{2} + \overline{1+\nu}\,\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)D_n\right\} + \frac{t}{A}q_n' = 0. \tag{10}$$

但し，上式中の $\sum$ は $\sum\limits_{m=1,3,5\cdots}$ を意味する．

以上，10 個の方程式群より，A_n, B_n, C_n, D_n, b_2, p_0, p_n, p_n', q_n 及び q_n' の 10 個の未知群を解くことが出来る．

ここで，上記方程式群より根を求めるため p_n, p_n', q_n, q_n' を消去すると，(11), (12) (13), (14) の A_n, B_n, C_n 及び D_n に関する方程式となる．

すなわち，(7) に (1), (8) を代入して p_n, p_n' を消去すると，

$$\beta_n^2\left\{\overline{1+\nu}\,\beta_n^3\sinh\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{I}\left(t - \overline{1+\nu}\,e\,A\,\beta_n^2\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right\}A_n.$$

$$-\beta_n^3\left\{\left(\overline{1-\nu}\,\beta_n + \overline{1+\nu}\,\frac{eA}{I}\cdot\frac{n\pi}{2} - \frac{th}{2I\beta_n}\right)\sinh\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2eA}{I} - \overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\,\beta_n^2\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right\}B_n$$

$$+\sum\beta_m^5(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4\cdot\overline{1+\nu}\,m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot C_m$$

$$+\sum\beta_m^4\,(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{2\cdot\overline{1+\nu}\,m^2}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2} + \frac{8m\left(\overline{3+2\nu}m^2 + \overline{4+3\nu}n^2\right)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right\}D_m$$

$$+\frac{4kw_0}{n\pi I}(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0. \tag{11}$$

(10) に (6) を代入して, q_n' を消去すると,

$$\frac{t}{A}\sum\beta_m^2(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+\frac{t}{A}\sum\beta_m(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+2m\left(\frac{m}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{2(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}B_m$$

$$+\left(\frac{t}{A}\sinh\frac{n\pi}{2}+\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2}\right)\beta_n^2\cdot C_n$$

$$+\left\{\left(\frac{t}{A}+\overline{1+\nu}\,\frac{n\pi}{2}\beta_n\right)\sinh\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{t}{A}\frac{n\pi}{2}+2\beta_n\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right\}\beta_n D_n=0\,. \tag{12}$$

(3), (8) より p_n' を消去すると,

$$\beta_n^2\left(\overline{1+\nu}\,\beta_n\cosh\frac{n\pi}{2}+\frac{t}{A}\sinh\frac{n\pi}{2}\right)\cdot A_n+\beta_n\left\{\left(\frac{t}{A}+\overline{1+\nu}\,\beta_n\frac{n\pi}{2}\right)\sinh\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{A}\frac{n\pi}{2}+2\beta_n\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right\}B_n+\frac{t}{A}\sum\beta_m^2(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot C_m$$

$$+\frac{t}{A}\sum\beta_m(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{4m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+2m\left(\frac{m}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{2(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}D_m=0\,. \tag{13}$$

(9) に (5), (10) を代入して q_n, q_n' を消去すると,

$$\sum\beta_m^5(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\frac{4\cdot\overline{1+\nu}\,m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\cdot A_m$$

$$+\sum\beta_m^4(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\left\{\frac{4\cdot\overline{7+5\nu}\,m}{\pi(m^2+n^2)}\cosh\frac{m\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\overline{1+\nu}\left(\frac{2m^2}{m^2+n^2}\sinh\frac{m\pi}{2}-\frac{4m(m^2-n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2}\cosh\frac{m\pi}{2}\right)\right\}B_m$$

$$+\beta_n^2\left\{\overline{1+\nu}\,\beta_n^3\sinh\frac{n\pi}{2}-\left(\overline{1+\nu}\,\frac{eA}{I}\beta_n^2-\frac{t}{I}\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right\}C_n$$

$$+\beta_n^3\Big\{\Big(\overline{1+\nu}\,\frac{b}{2}\beta_n^2-\frac{2eA}{I}\Big)\cosh\frac{n\pi}{2}-\Big(\overline{1-\nu}\,\beta_n-\frac{bt}{2I\beta_n}+\overline{1+\nu}\,\frac{eAn\pi}{2I}\Big)\sinh\frac{n\pi}{2}\Big\}D_n=0. \tag{14}$$

以上，(11)，(12)，(13)，(14) の4式を連立して解くことにより， A_n, B_n, C_n, D_n の根が決定出来る．そこで，上式に I と同一の数値例を用いて，計算を行うと，第4表の如く 20元連立一次方程式 を得る．

20元連立方程式を解くと，それらの根は第5表の如く求まる．

第5表　20元連立方程式の根（A_n, B_n, C_n, D_n）の値

$A_1=+2.025\,442\times10^{3}$	$B_1=-5.675\,637\times10^{1}$	$C_1=+1.014\,157\times10^{3}$	$D_1=-3.107\,972\,3\times10^{1}$
$A_3=-4.832\,347\times10^{0}$	$B_3=+1.844\,682\times10^{-1}$	$C_3=-3.589\,780\times10^{0}$	$D_3=+1.368\,826\times10^{-1}$
$A_5=+2.733\,126\times10^{-2}$	$B_5=-1.145\,633\times10^{-3}$	$C_5=+1.997\,504\times10^{-2}$	$D_5=-8.346\,129\times10^{-4}$
$A_7=-2.438\,301\times10^{-4}$	$B_7=+1.067\,735\times10^{-5}$	$C_7=-1.975\,374\times10^{-4}$	$D_7=+8.620\,083\times10^{-6}$
$A_9=+2.889\,819\times10^{-6}$	$B_9=-1.297\,214\times10^{-7}$	$C_9=+2.254\,000\times10^{-6}$	$D_9=-1.006\,688\times10^{-7}$

よって，上記根を (1) に代入して，p_n, (3) に代入して， p_n', (5) より q_n 及び (6) より q_n' を求めると第6表の如くなる．

第6表　p_n, p_n', q_n. q_n' の値

$p_1=-15.235\,77$	$p_1'=+3.020\,06$	$q_1=-6.873\,11$	$q_1'=+3.905\,088$
$p_3=\ +3.533\,93$	$p_3'=-0.864\,588$	$q_3=+2.634\,65$	$q_3'=-0.584\,914$
$p_5=-0.877\,64$	$p_5'=+0.105\,875\,4$	$q_5=-0.652\,041$	$q_5'=-0.019\,85$
$p_7=+0.272\,812$	$p_7'=+0.039\,055$	$q_7=+0.226\,46$	$q_7'=+0.097\,93$
$p_9=-0.101\,795$	$p_9'=-0.062\,02$	$q_9=-0.082\,922$	$q_9'=-0.102\,22$

又，a_2 は (2) より　$a_2=\sum a_2^{(n)}=p_0=2.60167$

及び b_2 は (4) より　$b_2=\sum b_2^{(n)}=5.045$

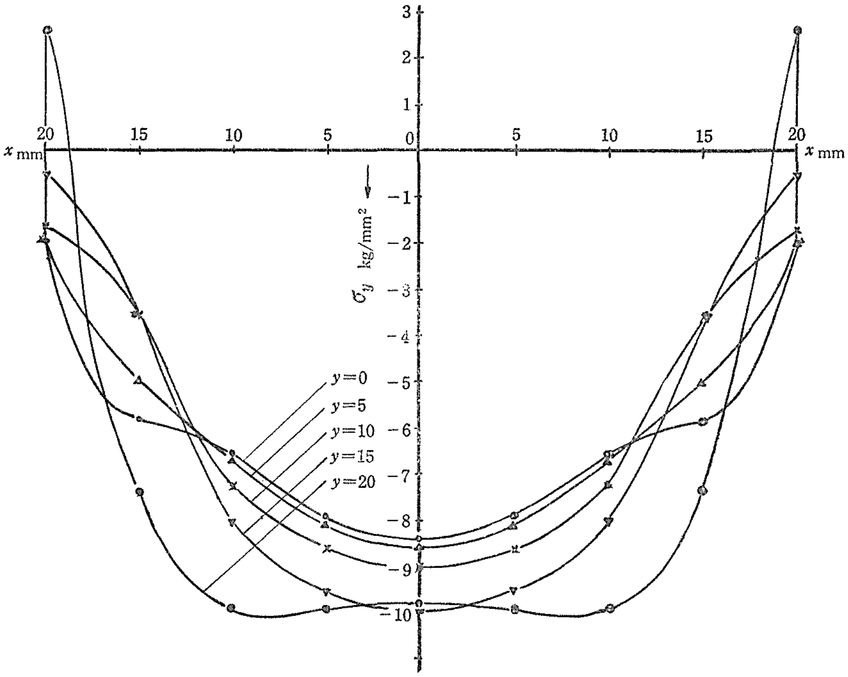
以上で，すべての根が求まったので，各応力 σ_y, σ_x, τ_{xy} を計算して，図に画くと第11, 12, 13 図 の如く示される．

第4表　20元連立一次方程式 II (1) 未知数 ($A_1, A_3 \cdots A_9, B_1, B_3 \cdots B_9, C_1, C_3 \cdots C_9, D_1, D_3 \cdots D_9$)

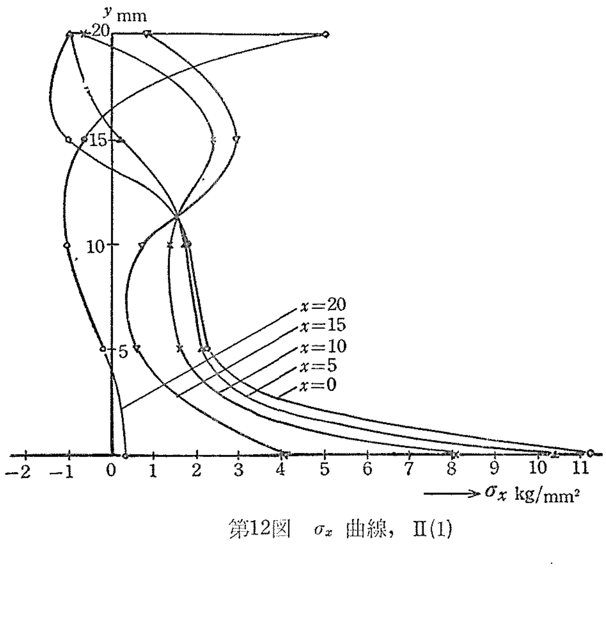
A_1	A_3	A_5	A_7	A_9	B_1	B_3	B_5	B_7	B_9
2.288×10^{-4}					0.001 735				
	−0.101 813 6					−3.611 93			
		−19.768 45					−572.808 53		
			−1 393.513 1					−39 681.923 8	
				−57 958.643					−1 766 883.075
-6.569×10^{-4}	0.078 69	−3.242 24	107.055 7	−3 210.518	−0.020 41	1.373 20	−65.563 37	2 148.917 3	−64321.256
1.314×10^{-4}	−0.043 72	2.479 37	−92.289 5	2 925.143 9	0.005 421	−1.059 76	52.929 83	−2 000.510 5	59 330.524
-0.505×10^{-4}	0.023 145	−1.685 968	72.334 9	−2 483.612 1	−0.002 164	0.607 28	−38.012 65	1 535.598 6	−53 002.308 8
0.263×10^{-4}	−0.013 57	1.139 167	−54.620 37	2 025.100 2	0.001 138	−0.368 604	26.625 05	−1 191.755 1	42 661.708 7
-0.16×10^{-4}	0.008 744	−0.795 27	41.175 3	−1 625.080 1	−0.000 697	0.241 64	−18.997 37	916.835 5	−34 800.616 7
-25.267×10^{-4}					−0.092 63				
	−1.152 54					−30.103 07			
		−114.640 6					−2 723.778 1		
			−7 039.224 4					−159 894.331	
				−339 641.983					−7 514 562.01
6.206×10^{-6}	−0.020 07	3.828 77	−346.903 23	22 110.964 0	6.305×10^{-4}	−0.883 38	131.325 07	−10 458.001 42	616 228.690 1
-1.241×10^{-6}	0.011 15	−2.927 88	299.054 50	−20 145.545 0	-1.387×10^{-4}	0.533 29	−103.798 72	9 162.573 62	−566 457.718 3
0.477×10^{-6}	−0.005 90	1.990 96	−234.394 07	17 104.707 5	0.541×10^{-4}	−0.293 67	72.968 99	−7 333.687 23	487 529.265 6
-0.248×10^{-6}	0.003 46	−1.345 25	176.991 45	−13 946.915 7	-0.282×10^{-4}	0.175 37	−50.414 38	5 642.748 35	−403 090.765 8
$0.151\,4\times10^{-6}$	−0.002 23	0.939 13	−133.424 32	11 191.970 3	0.173×10^{-4}	−0.114 061	35.682 76	−4 132.308 3	322 493.638 1

第4表続き

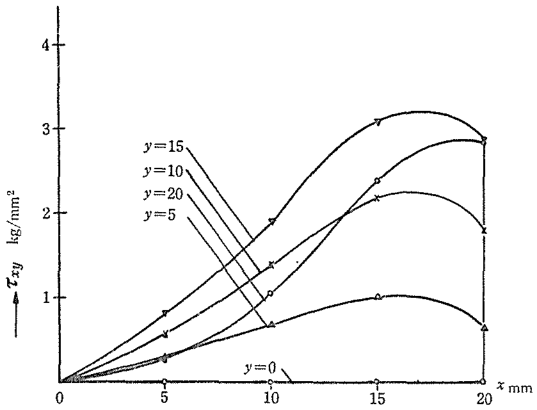
C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	D_1	D_3	D_5	D_7	D_9			
6.206×10^{-6}	−0.020 07	3.828 78	−346.903 23	22 110.964 0	6.305×10^{-4}	−0.883 38	131.325 07	−10 458.001 4	616 228.690 1	=	0.235 785	(1)
-1.241×10^{-6}	0.011 15	−2.927 89	299.054 5	−20 145.544 9	-1.387×10^{-4}	0.533 29	−103.798 72	9 162.573 6	−566 457.718 3	=	−0.078 595	(2)
$0.477\,4\times10^{-6}$	−0.005 90	1.990 965	−234.394 07	17 104.707 5	0.541×10^{-4}	−0.293 67	72.968 99	−7 333.687 2	487 529.265 6	=	0.047 . 57	(3)
-0.248×10^{-6}	0.003 46	−1.345 247	176.991 45	−13 946.915 7	-0.282×10^{-4}	0.175 37	−50.414 38	5 642.748 3	−403 090.765 9	=	−0.033 684	(4)
$0.151\,4\times10^{-6}$	−0.002 23	0.939 134	−133.424 32	11 191.970 3	$0.172\,6\times10^{-4}$	−0.114 061	35.682 76	−4 132.308 3	322 493.638 1	=	0.026 198	(5)
−0.002 527					−0.092 63					=	0	(6)
	−1.152 54					−30.103 07				=	0	(7)
		−114.640 6					−2 723.778 1			=	0	(8)
			−7 039.224 3					−159 894.331		=	0	(9)
				−339 641.983					−7 514 562.01	=	0	(10)
-6.569×10^{-4}	0.078 69	−3.242 24	107.055 7	−3 210.518	−0.020 413	1.373 20	−65.563 37	2 148.917 3	−65 321.256	=	0	(11)
1.314×10^{-4}	−0.043 72	2.479 37	−92.289 5	2 925.143 9	0.005 421	−1.059 76	52.929 83	−2 000.510 5	59 330.524	=	0	(12)
-0.505×10^{-4}	0.023 14	−1.685 97	72.334 9	−2 483.612 1	−0.002 164	0.607 28	−38.012 65	1 535.598 6	−53 002.308 8	=	0	(13)
0.263×10^{-4}	−0.013 57	1.139 167	−54.620 4	2 025.100 2	0.001 138	−0.368 60	26.625 05	−1 191.755 1	42 661 .708 7	=	0	(14)
-0.16×10^{-4}	0.008 74	−0.795 27	41.175 3	−1 625.080 1	−0.000 697	0.241 64	−18.997 37	916.835 5	−34 800.616 7	=	0	(15)
2.288×10^{-4}					0.001 735					=	0	(16)
	−0.101 814					−3.611 93				=	0	(17)
		−19.768 45					−572.808 5			=	0	(18)
			−1 393.513 1					−39 681.924		=	0	(19)
				−57 958.643					−1 766 883.07	=	0	(20)



第11図 σ_y 曲線, II(1)



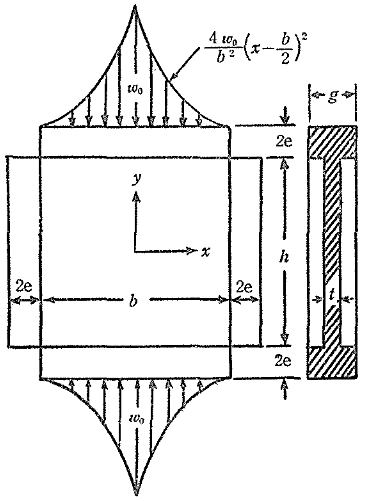
第12図 σ_x 曲線, II(1)



第13図　τ 曲線，II(1)

(2) 変分布対称荷重 $\sum \frac{4w_0}{(n\pi)^2} \cos \alpha_n x$ を受ける場合

荷重は I と同一の $f(x)$ の cosine 項 $\sum \frac{4w_0}{(n\pi)^2} \cos \alpha_n x$ がかかるものとする．（第 14 図 参照）



第14図

応 力 関 数 F_2；（I の F_2 と同様）

$$F_2 = \sum (A_n \cosh \alpha_n y + B_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x$$
$$+ \sum (C_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \cos \alpha_n y$$
$$+ \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{b_2}{2} y^2.$$

とおくことが出来る．ただし　$\alpha_n = \frac{2n\pi}{b} = \frac{2n\pi}{h}$.

したがって，各応力は夫々，次の如くなる：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = \sum \alpha_n \{A_n \alpha_n \cosh \alpha_n y + B_n (2\cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y)\} \cos \alpha_n x$$
$$- \sum \alpha_n^2 (C_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \cos \alpha_n y + b_2. \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = - \sum \alpha_n^2 (A_n \cosh \alpha_n y + B_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x$$
$$+ \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \cosh \alpha_n x + D_n (2\cosh \alpha_n x + \alpha_n x \sinh \alpha_n x)\} \cos \alpha_n y + a_2. \qquad \text{(b)}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\cdot\partial y}=\sum\alpha_n\{A_n\,\alpha_n\sinh\alpha_n y+B_n(\sinh\alpha_n y+\alpha_n y\cosh\alpha_n y)\}\sin\alpha_n x$$

$$+\sum\alpha_n\{C_n\,\alpha_n\sinh\alpha_n x+D_n(\sinh\alpha_n x+\alpha_n x\cosh\alpha_n x)\}\sin\alpha_n y. \tag{c}$$

周 辺 条 件

(i) $\sigma_{y(y=\pm h/2)}=\sum p_n\cos\alpha_n x$

すなわち,

$$\sum p_n\cos\alpha_n x=-\sum\left(A_n\cosh n\pi+B_n\frac{h}{2}\sinh n\pi\right)\alpha_n^2\cos\alpha_n x$$

$$+\sum\alpha_n(-1)^n\{C_n\,\alpha_n\cosh\alpha_n x+D_n(2\cosh\alpha_n x+\alpha_n x\sinh\alpha_n x)\}+a_2,$$

上式中の $\cosh\alpha_n x$, $x\sinh\alpha_n x$ を $-b/2\sim b/2$ の x 区間で cosine 級数に展開すると,

$$\cosh\alpha_n x=\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi+\sum_m\frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m x,$$

$$x\sinh\alpha_n x=\sum_m\left\{\frac{nb}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^m\cosh n\pi-1\}\right.$$

$$\left.+\frac{b(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^m\sinh n\pi\right\}\cos\alpha_m x+\frac{1}{\alpha_n}\cosh n\pi-\frac{2}{b\alpha_n^2}\sinh n\pi.$$

これら, 2式を上式に代入して整頓すると,

$$\sum p_n\cos\alpha_n x=-\sum\left(A_n\cosh n\pi+B_n\frac{h}{2}\sinh n\pi\right)\alpha_n^2\cos\alpha_n x$$

$$+\sum(-1)^n\alpha_n\left\{C_n\frac{2}{b}\sinh n\pi+D_n\left(\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi+\cosh n\pi\right)\right\}+a_2$$

$$+\sum(-1)^n\alpha_n^2\,C_n\sum_m\frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m x$$

$$+\sum 2(-1)^n\alpha_n\,D_n\sum_m\frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m x$$

$$+\sum(-1)^n\alpha_n^2\,D_n\sum_m\left\{\frac{nb}{\pi(m^2+n^2)}\{(-1)^m\cosh n\pi-1\}\right.$$

$$\left.+\frac{b(m^2-n^2)}{\pi^2(m^2+n^2)^2}(-1)^m\sinh n\pi\right\}\cos\alpha_m x$$

この関係式が, x の値如何に関せず成立するためには, 次の2つの関係式が必要となる:

すなわち，

$$p_n = -A_n\alpha_n^2\cosh n\pi - B_n\frac{h}{2}\alpha_n^2\sinh n\pi + \sum_m C_m\alpha_m^2\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi$$

$$+\sum_m D_m\alpha_m{}^2\frac{b}{\pi(m^2+n^2)}\Big\{m\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\}$$

$$+(-1)^{m+n}\frac{m^2+3n^2}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\Big\}. \qquad (1)$$

および

$$C_n\alpha_n{}^2\frac{(-1)^n}{n\pi}\sinh n\pi + D_n\alpha_n(-1)^n\left(\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi+\cosh n\pi\right)+a_2=0. \qquad (2)$$

(ii) $y=\pm h/2$ で，$\tau_{xy}=\sum p_n'\sin\alpha_n x$

すなわち，

$$\sum p_n'\sin\alpha_n x = \sum\alpha_n\{A_n\alpha_n\sinh n\pi + B_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi)\}\sin\alpha_n x,$$

上式が x の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$p_n' = A_n\alpha_n^2\sinh n\pi + B_n\alpha_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi). \qquad (3)$$

(iii) $x=\pm b/2$ で，$\sigma_x=\sum q_n\cos\alpha_n y$

$$\sum q_n\cos\alpha_n y = \sum\alpha_n(-1)^n\{A_n\alpha_n\cosh\alpha_n y + B_n(2\cosh\alpha_n y + \alpha_n y\sinh\alpha_n y)\}$$

$$-\sum\alpha_n^2\left(C_n\cosh n\pi + D^n\frac{b}{2}\sinh n\pi\right)\cos\alpha_n y + b_2,$$

ここで，前同様 $\cosh\alpha_n y$，$y\sinh\alpha_n y$ を $-h/2\sim h/2$ の y 区間で cosine 級数に展開すると，

$$\cosh\alpha_n y = \frac{1}{n\pi}\sinh n\pi + \sum_m\frac{2n(-1)^m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh n\pi\cos\alpha_m y,$$

$$y\sinh\alpha_n y = \sum_m\frac{b}{\pi(m^2+n^2)}\Big\{n\{(-1)^m\cosh n\pi - 1\}$$

$$+\frac{m^2-n^2}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^m\sinh n\pi\Big\}\cos\alpha_m y + \frac{1}{\alpha_n}\cosh n\pi - \frac{2}{b\alpha_n^2}\sinh n\pi.$$

以上，2式を上式に代入して，y の値如何に関せず成立するためには，次の2つの関係式が必要となる：

$$A_n\alpha_n^2\frac{(-1)^n}{n\pi}\sinh n\pi + B_n\alpha_n(-1)^n\left(\frac{1}{n\pi}\sinh n\pi + \cosh n\pi\right) + b_2 = 0. \qquad (4)$$

$$q_n = \sum_m A_m \alpha_m{}^2 \frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)} \sinh m\pi$$

$$+ \sum_m B_m \alpha_m \left\{ \frac{2m^2}{m^2+n^2} \{(-1)^{m+n} \cosh m\pi - (-1)^m\} \right.$$

$$\left. + \frac{2m(m^2+3n^2)}{\pi(m^2+n^2)^2} (-1)^{m+n} \sinh m\pi \right\} - C_n \alpha_n{}^2 \cosh n\pi - \frac{b}{2} D_n \alpha_n{}^2 \sinh n\pi. \quad (5)$$

(iv) $x = \pm b/2$ で，$\tau_{xy} = \sum q'_n \sin \alpha_n y$.

$$\sum q'_n \sin \alpha_n y = \sum \alpha_n \{C_n \alpha_n \sinh n\pi + D_n(\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi)\} \sin \alpha_n y,$$

上式が，y の値如何に関せず成立するためには，次の式が必要となる：

$$q_n' = C_n \alpha_n{}^2 \sinh n\pi + D_n \alpha_n (\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi). \quad (6)$$

板と横梁との連続条件（Iの第2図参照）

(v) $Ev_{y=\pm h/2} - Ev_{x=0,\ y=\pm h/2} - E\delta_P = 0$ より $E\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)_{y=\pm h/2} - E\frac{d^4 \delta_P}{dx^4} = 0$ として，

$$\sum \alpha_n^5 \left\{ A_n \overline{1+\nu} \sinh n\pi + B_n \left(\overline{1+\nu} \frac{h}{2} \cosh n\pi - \frac{1-\nu}{\alpha_n} \sinh n\pi \right) \right\} \cos \alpha_n x$$

$$+ \frac{1}{I} \left\{ e\,t \sum \alpha_n p'_n \cos \alpha_n x - t \sum p_n \cos \alpha_n x + \sum \frac{4w_0}{(n\pi)^2} \cos \alpha_n x \right\} = 0,$$

上式が x の値如何に関せず成立するためには次の関係式が必要となる：

$$\alpha_n^5 \left\{ A_n \overline{1+\nu} \sinh n\pi + B_n \left(\overline{1+\nu} \frac{h}{2} \cosh n\pi - \frac{1-\nu}{\alpha_n} \sinh n\pi \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{I} \left(e\,t\,\alpha_n p'_n - t\,p_n + \frac{4w_0}{(n\pi)^2} \right) = 0. \quad (7)$$

(vi) $Eu_{y=\pm h/2} - E\delta'_P = 0$, より $E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y=\pm h/2} - E\frac{d^2 \delta'_P}{dx^2} = 0$, として，

$$\sum \alpha_n{}^2 \left\{ A_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \cosh n\pi + B_n \left(2\cosh n\pi + \overline{1+\nu} \frac{h}{2} \alpha_n \sinh n\pi \right) \right\} \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum \alpha_n{}^2 (-1)^n \left\{ C_n \overline{1+\nu}\, \alpha_n \sinh \alpha_n x + D_n \left(\overline{1+\nu}\, \alpha_n x \cosh \alpha_n x + \overline{1+3\nu} \sinh \alpha_n x \right) \right\}$$

$$+ \frac{t}{A} \sum p'_n \sin \alpha_n x = 0.$$

ここで，$\sinh\alpha_n x$，$x\cosh\alpha_n x$ を $-b/2\sim b/2$ の x の区間で，sine 級数に展開して，それら2式を上式に代入し，その式が x の値如何に関せず成立するためには次の関係式が必要となる：

$$\alpha_n^2\{A_n\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi+B_n(2\cosh n\pi+\overline{1+\nu}\,n\pi\sinh n\pi)\}$$

$$+\sum_m\alpha_m^2(-1)^{m+n}\Big\{-\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,(C_m\overline{1+\nu}\,\alpha_m+D_m\overline{1+3\nu})$$

$$+D_m\frac{\overline{1+\nu}\,2mn}{m^2+n^2}\Big(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi-\cosh m\pi\Big)\Big\}+\frac{t}{A}p_n'=0. \tag{8}$$

板と縦梁との連続条件（(d)，(f) 式及び第15図参照）

(vii)　$Eu_{x=\pm b/2}-Eu_{x=\pm b/2,\,y=0}-E\delta_Q=0$．より，$E\Big(\dfrac{\partial^4u}{\partial y^4}\Big)_{x=\pm b/2}-E\dfrac{d^4\delta_Q}{dy^4}=0$，として

$$\sum\alpha_n^5\Big\{C_n\overline{1+\nu}\sinh n\pi+D_n\Big(\overline{1+\nu}\;\frac{b}{2}\cosh n\pi-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\Big)\Big\}\cos\alpha_n y$$

$$+\frac{t}{I}\alpha_n^2\Big(e\,t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}-t\sum\frac{q_n}{\alpha_n^2}\Big)\cos\alpha_n y=0,$$

上式が，y の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

$$\alpha_n^5\Big\{C_n\overline{1+\nu}\sinh n\pi+D_n\Big(\overline{1+\nu}\;\frac{b}{2}\cosh n\pi-\frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\Big)\Big\}$$

$$+\frac{1}{I}(e\,t\,\alpha_n q_n'-t\,q_n)=0. \tag{9}$$

(viii)　$Ev_{x=\pm b/2}-E\delta_Q'=0$，より $E\Big(\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}\Big)_{x=\pm b/2}-E\dfrac{d^2\delta_Q}{dy^2}=0$．として，

$$\sum\alpha_n^2(-1)^n\{A_n\overline{1+\nu}\,\alpha_n\sinh\alpha_n y+B_n(\overline{1+\nu}\,\alpha_n y\cosh\alpha_n y+\overline{1+3\nu}\sinh\alpha_n y)\}$$

$$+\sum\alpha_n^2\{C_n\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi+D_n(2\cosh n\pi+\overline{1+\nu}\,n\pi\sinh n\pi)\}\sin\alpha_n y$$

$$+\frac{t}{A}\sum q_n'\sin\alpha_n y=0$$

ここで，$\sinh\alpha_n y$，$y\cosh\alpha_n y$ を $-h/2\sim h/2$ の y の区間で sine 級数に展開して，y の値如何に関せず成立するためには，次の関係式が必要となる：

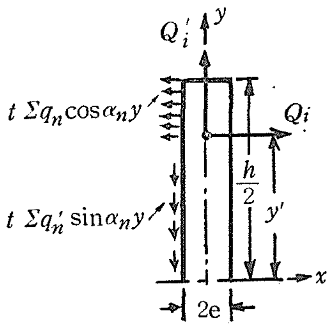
$$\sum_m\alpha_m^2(-1)^{m+n}\Big\{\frac{2n}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\,(A_m\overline{1+\nu}\,\alpha_m+B_m\overline{1+3\nu})$$

$$-B_m\frac{\overline{1+\nu}\,2mn}{m^2+n^2}\Big(\frac{2m}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi-\cosh m\pi\Big)\Big\}$$

$$-\alpha_n^2\{C_n\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi+D_n(2\cosh n\pi+\overline{1+\nu}\,n\pi\sinh n\pi)\}-\frac{t}{A}q_n=0. \quad (10)$$

縦梁の変位の計算 (δ_Q 及び δ_Q')

第15図の如く，各変位方向に仮想荷重 Q_i, Q_i' を考え，縦梁の全歪エネルギー W を計算して，カスチリアノの定理



第15図

$$\delta_Q=\frac{\partial W}{\partial Q_{i(Q_i=0)}},\text{および}\ \delta_Q'=\frac{\partial W}{\partial Q'_{i(Q_i'=0)}}$$

より求めることは前同様である．

すなわち，

$$W=\frac{1}{2AE}\int_0^{y'}\left(Q_i'-t\sum\int_y^{h/2}q_n'\sin\alpha_n\xi\cdot d\xi\right)^2dy$$

$$+\frac{1}{2IE}\int_0^{y'}\left\{-Q_i(y'-y)+e\,t\sum\int_y^{h/2}q_n'\sin\alpha_n\xi\cdot d\xi\right.$$

$$\left.+t\sum\int_y^{h/2}q_n(\xi-y)\cos\alpha_n\xi\cdot d\xi\right\}^2dy$$

$$=\frac{1}{2AE}\int_0^{y'}\left\{Q_i'-t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}\right\}^2dy$$

$$+\frac{1}{2IE}\int_0^{y'}\left\{-Q_i(y'-y)+e\,t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}\right.$$

$$\left.-t\sum\frac{q_n}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}\right\}^2dy$$

したがって，

$$\delta_Q=\frac{\partial W}{\partial Q_{i(Q_i=0)}}=\frac{1}{IE}\int_0^{y'}\left\{e\,t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}\right.$$

$$\left.-t\sum\frac{q_n}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}\right\}(y-y')\,dy$$

$$=\frac{t}{IE}\sum\left\{\frac{1}{\alpha_n^2}(\cos\alpha_n y-1)+(-1)^n\frac{y^2}{2}\right\}\left(e\frac{q_n'}{\alpha_n}-\frac{q_n}{\alpha_n^2}\right),$$

よって

$$E\,\delta_Q=\frac{1}{I}\left\{\left(e\,t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}-t\sum\frac{q_n}{\alpha_n^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha_n^2}\cos\alpha_n y-\frac{1}{\alpha_n^2}+(-1)^n\frac{y^2}{2}\right)\right. \quad \text{(d)}$$

同様に

$$\delta_Q = \frac{\delta W}{\delta Q'_i}_{(Q'_i=0)} = -\frac{t}{AE}\sum \frac{q'_n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n y - (-1)^n y\right)$$

よって

$$E\,\delta_Q = \frac{t}{A}\sum \frac{q'_n}{\alpha_n}\left((-1)^n y - \frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n y\right). \tag{e}$$

板の変位の計算（u 及び v）

$$Eu = \int \sigma_x\,dx - \nu\int \sigma_y\,dx + C_u, \qquad Ev = \int \sigma_y\,dy - \nu\int \sigma_x\,dy + C_v.$$

より求める．すなわち上式に (a), (b) 式の σ_x, σ_y を代入して積分を行い積分常数 C_u, C_v は変位の対称性により $x=0$ で，$u=0$．$y=0$ で，$v=0$．したがつて，$C_u=C_v=0$ となり，結局次の関係式となる：

$$\begin{aligned} Eu = &\sum\{A_n\,\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh\alpha_n y + B_n(2\cosh\alpha_n y + \overline{1+\nu}\,\alpha_n\,y\sinh\alpha_n y)\}\sin\alpha_n x \\ &-\sum\alpha_n\{C_n\,\overline{1+\nu}\sinh\alpha_n x + D_n(\overline{1+\nu}\,x\cosh\alpha_n x - \frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh\alpha_n x)\}\cos\alpha_n y \\ &+(b_2-\nu a_2)x. \end{aligned} \tag{f}$$

および

$$\begin{aligned} Ev = &-\sum\alpha_n\left\{A_n\,\overline{1+\nu}\sinh\alpha_n y + B_n\left(\overline{1+\nu}\,y\cosh\alpha_n y - \frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh\alpha_n y\right)\right\}\cos\alpha_n x \\ &+\sum\left\{C_n\,\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh\alpha_n x + D_n(2\cosh\alpha_n x + \overline{1+\nu}\,\alpha_n\,x\sinh\alpha_n x)\right\}\sin\alpha_n y \\ &+(a_2-\nu b_2)y. \end{aligned} \tag{g}$$

以上，10個の条件式を整頓して一括すると，次の如くなる：

$$\begin{aligned} p_n = &-\alpha_n{}^2\cosh n\pi\cdot A_n - \frac{h}{2}\alpha_n{}^2\sinh n\pi\cdot B_n + \sum_m \frac{2m\,(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\alpha_m{}^2\sinh m\pi\cdot C_m. \\ &+\sum_m \alpha_m{}^2\frac{b}{\pi(m^2+n^2)}\Big\{m\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi - (-1)^m\} \\ &\qquad + (-1)^{m+n}\frac{m^2+3n^2}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\Big\}D_m. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\alpha_n^2\frac{(-1)^n}{n\pi}\sinh n\pi\cdot C_n + (-1)^n\left(\frac{2}{b}\sinh n\pi + \alpha_n\cosh n\pi\right)D_n + a_2{}^{(n)} = 0. \tag{2}$$

$$p'_n = \alpha_n^2\sinh n\pi\cdot A_n + \alpha_n(\sinh n\pi + n\pi\cosh n\pi)B_n. \tag{3}$$

$$\alpha_n{}^2 \frac{(-1)^n}{n\pi} \sinh n\pi \cdot A_n + (-1)^n\left(\frac{2}{b} \sinh n\pi + \alpha_n \cosh n\pi\right)B_n + b_2{}^{(n)} = 0. \tag{4}$$

$$q_n = \sum_m \alpha_m \frac{4m^2(-1)^{m+n}}{b(m^2+n^2)} \sinh m\pi \cdot A_m$$

$$+ \sum_m \alpha_m \frac{2m}{m^2+n^2}\left\{m\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi - (-1)^m\}\right.$$

$$\left. + \frac{m^2+3n^2}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n} \sinh m\pi\right\}B_m - \alpha_n{}^2 \cosh n\pi \cdot C_n - \frac{b}{2}\alpha_n{}^2 \sinh n\pi \cdot D_n. \tag{5}$$

$$q_n' = \alpha_n{}^2 \sinh n\pi \cdot C_n + \alpha_n(\sinh n\pi + n\pi \cosh n\pi)D_n. \tag{6}$$

$$\overline{1+\nu}\,\alpha_n{}^5 \sinh n\pi \cdot A_n + \alpha_n{}^5\left(\overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\cosh n\pi - \frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\right)B_n$$

$$+ \frac{et}{I}\alpha_n p_n' - \frac{t}{I}p_n + \frac{4w_0}{I(n\pi)^2} = 0. \tag{7}$$

$$\overline{1+\nu}\,\alpha_n{}^3 \cosh n\pi \cdot A_n + \alpha_n^2(2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\,n\pi \sinh n\pi)B_n$$

$$- \sum_m \alpha_m{}^3 \frac{\overline{1+\nu}\,2n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n} \sinh m\pi \cdot C_m$$

$$+ \sum_m \frac{2n(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\alpha_m^2\left(\frac{\overline{1-\nu}\,m^2 - \overline{1+3\nu}\,n^2}{m^2+n^2}\sinh m\pi - \overline{1+\nu}\,m\pi\cosh m\pi\right)D_m$$

$$+ \frac{t}{A}p_n' = 0. \tag{8}$$

$$\overline{1+\nu}\,\alpha_n^5 \sinh n\pi \cdot C_n + \alpha_n^5\left(\overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\cosh n\pi - \frac{1-\nu}{\alpha_n}\sinh n\pi\right)D_n$$

$$- \frac{t}{I}q_n + \frac{et}{I}\alpha_n q_n' = 0. \tag{9}$$

$$\sum_m \alpha_m{}^3 \frac{\overline{1+\nu}\,2n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n} \sinh m\pi \cdot A_m$$

$$- \sum_m \alpha_m{}^2 \frac{2n(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\left(\frac{\overline{1-\nu}\,m^2 - \overline{1+3\nu}\,n^2}{m^2+n^2}\sinh m\pi - \overline{1+\nu}\,m\pi\cosh m\pi\right)B_m$$

$$- \overline{1+\nu}\,\alpha_n^3 \cosh n\pi \cdot C_n - \alpha_n{}^2(2\cosh n\pi + \overline{1+\nu}\,n\pi\sinh n\pi)D_n - \frac{t}{A}q_n' = 0. \tag{10}$$

以上，10個の方程式群より，根を求めるため，p_n, p_n', q_n 及び q_n' を消去して，A_n, B_n, C_n, D_n に関する式にすると，次の如くなる：

(7) に (1)，(3) を代入して，p_n，p_n' を消去すると，

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n^2\left\{\left(-\frac{e\,t}{I}-\overline{1+\nu}\,\alpha_n^2\right)\alpha_n \sinh n\pi-\frac{t}{I}\cosh n\pi\right\}A_n \\
&+\alpha_n^2\left\{\left(\overline{1-\nu}\,\alpha_n^2-\frac{e\,t}{I}-\frac{th}{2I}\right)\sinh n\pi-\left(\frac{e\,t}{I}n\pi+\overline{1+\nu}\,\frac{h}{2}\alpha_n^3\right)\cosh n\pi\right\}B_n \\
&+\frac{t}{I}\sum_m \alpha_m{}^2\,\frac{2m(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\sinh m\pi\cdot C_m \\
&+\frac{t}{I}\sum_m \alpha_m^2\,\frac{b}{\pi(m^2+n^2)}\Big\{m\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\} \\
&\qquad\qquad+\frac{m^2+3n^2}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\Big\}D_m-\frac{4w_0}{I(n\pi)^2}=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(8) に (3) を代入して p_n' を消去すると，

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n^2\left(\frac{t}{A}\sinh n\pi+\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi\right)A_n \\
&+\alpha_n\left\{\left(\overline{1+\nu}\,\frac{2(n\pi)^2}{b}+\frac{t}{A}\right)\sinh n\pi+\left(2\alpha_n+\frac{t}{A}n\pi\right)\cosh n\pi\right\}B_n \\
&-\sum_m \alpha_m^3\,\frac{\overline{1+\nu}\,2n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\cdot C_m \\
&+\sum_m \alpha_m^2\,\frac{2n(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\left(\frac{\overline{1-\nu}\,m^2-\overline{1+3\nu}\,n^2}{m^2+n^2}\sinh m\pi-\overline{1+\nu}\,m\pi\cosh m\pi\right)D_m=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(9)，(5)，(6) より，q_n．q_n' を消去すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{t}{I}\sum_m \alpha_m\,\frac{4m^2(-1)^{m+n}}{b(m^2+n^2)}\sinh m\pi\cdot A_m \\
&+\frac{t}{I}\sum_m \alpha_m\,\frac{2m}{m^2+n^2}\Big\{m\{(-1)^{m+n}\cosh m\pi-(-1)^m\} \\
&\qquad\qquad+\frac{m^2+3n^2}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\Big\}B_m \\
&-\alpha_n^2\left\{\left(\overline{1+\nu}\,\alpha_n^2+\frac{e\,t}{I}\right)\alpha_n\sinh n\pi+\frac{t}{I}\cosh n\pi\right\}\cdot C_n \\
&+\alpha_n^2\left\{\left(\frac{e\,t}{I}-\frac{bt}{2I}+\overline{1-\nu}\,\alpha_n^2\right)\sinh n\pi-\left(\frac{e\,t}{I}n\pi+\overline{1+\nu}\,\frac{b}{2}\alpha_n^3\right)\cosh n\pi\right\}D_n=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(10) と (6) より q'_n を消去する,

$$\sum_m \alpha_m^3 \frac{\overline{1+\nu}\,2n}{\pi(m^2+n^2)}(-1)^{m+n}\sinh m\pi\cdot A_m$$

$$-\sum_m \alpha_m^2 \frac{2n(-1)^{m+n}}{\pi(m^2+n^2)}\left(\frac{\overline{1-\nu}\,m^2-\overline{1+3\nu}\,n^2}{m^2+n^2}\sinh m\pi-\overline{1+\nu}\,m\pi\cosh m\pi\right)B_m$$

$$-\alpha_n^2\left(\frac{t}{A}\sinh n\pi+\overline{1+\nu}\,\alpha_n\cosh n\pi\right)C_n$$

$$-\alpha_n\left\{\left(\overline{1+\nu}\,n\pi\,\alpha_n+\frac{t}{A}\right)\sinh n\pi+\left(2\alpha_n+\frac{t}{A}n\pi\right)\cosh n\pi\right\}D_n=0. \quad (14)$$

以上, (11), (12), (13), (14) の方程式によって, A_n, B_n, C_n, D_n の4群の根を求めることが出来る. すなわち $n=1\cdots\cdots5$ 項まで採り, I と同一の数値例を用いて計算を行うと, 20個の未知数をもつ, 20元一次方程式を得る. 20元方程式は 第7表 に示す.

この方程式を連立して解くと, 各根 A_n, B_n, C_n, D_n は, 第8表 の如くなる:

第8表 根 A_n, B_n, C_n, D_n

$A_1=+5.03623\times10$	$B_1=-1.63394\times10^0$	$C_1=+8.84963\times10$	$D_1=-3.40022\times10^0$
$A_2=+1.95563\times10^{-1}$	$B_2=-7.95427\times10^{-3}$	$C_2=-1.32606\times10^{-1}$	$D_2=+5.21538\times10^{-3}$
$A_3=+3.89890\times10^{-4}$	$B_3=-1.88535\times10^{-5}$	$C_3=+7.26055\times10^{-4}$	$D_3=-3.05656\times10^{-5}$
$A_4=-2.34448\times10^{-5}$	$B_4=+1.25966\times10^{-6}$	$C_4=-5.94608\times10^{-6}$	$D_4=+2.60492\times10^{-7}$
$A_5=+1.94146\times10^{-7}$	$B_5=-9.93462\times10^{-9}$	$C_5=+8.57853\times10^{-8}$	$D_5=-3.90657\times10^{-9}$

次に, 上記根を (1), (3), (5), (6) に夫々代入して p_n, p'_n, q_n, q_n' を求めると第9表の如くなる:

第9表 p_n, p_n', q_n, q_n' の値

$p_1=-7.6743$	$p_1'=+2.0400$	$q_1=-5.93360$	$q_1'=-0.38579$
$p_2=+0.14671$	$p_2'=+0.29483$	$q_2=+0.74783$	$q_2'=-0.30909$
$p_3=-0.88923$	$p_3'=-0.03741$	$q_3=-0.15787$	$q_3'=+0.06863$
$p_4=+0.31661$	$p_4'=+0.21244$	$q_4=+0.004167$	$q_4'=-0.018207$
$p_5=-0.35702$	$p_5'=-0.03519$	$q_5=-0.015664$	$q_5'=+0.005484$

又, a_2 は (2) より $a_2=\sum a_2^{(n)}=0.$

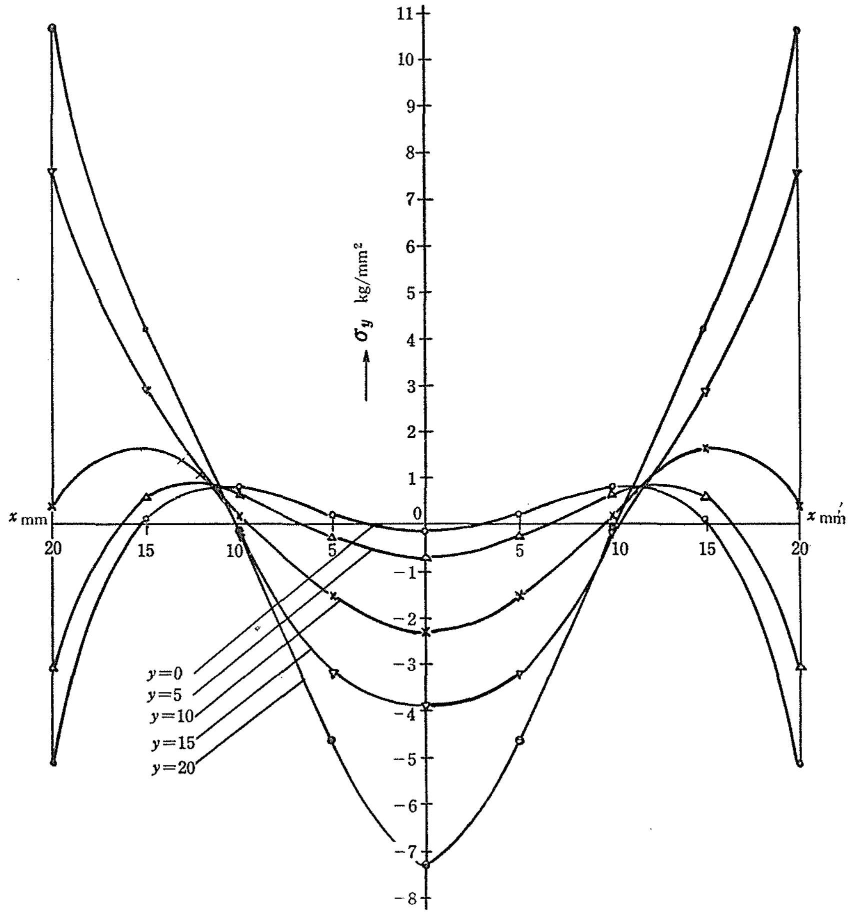
および b_2 は (4) より

$$b_2^{(1)} = 0.5256\ ,\quad b_2^{(2)} = -4.84\times10^{-2}\ ,\quad b_2^{(3)} = 0.68\times10^{-3}\ ,$$

$$b_2^{(4)} = -12.67\times10^{-3}\ ,\quad b_2^{(5)} = 0.61\times10^{-3}$$

したがって $\qquad b_2 = \sum b_2^{(n)} = 0.4658$

以上で，すべての根が求まつたので，各応力を計算して図に示すと 第16〜21図 の如くなる：



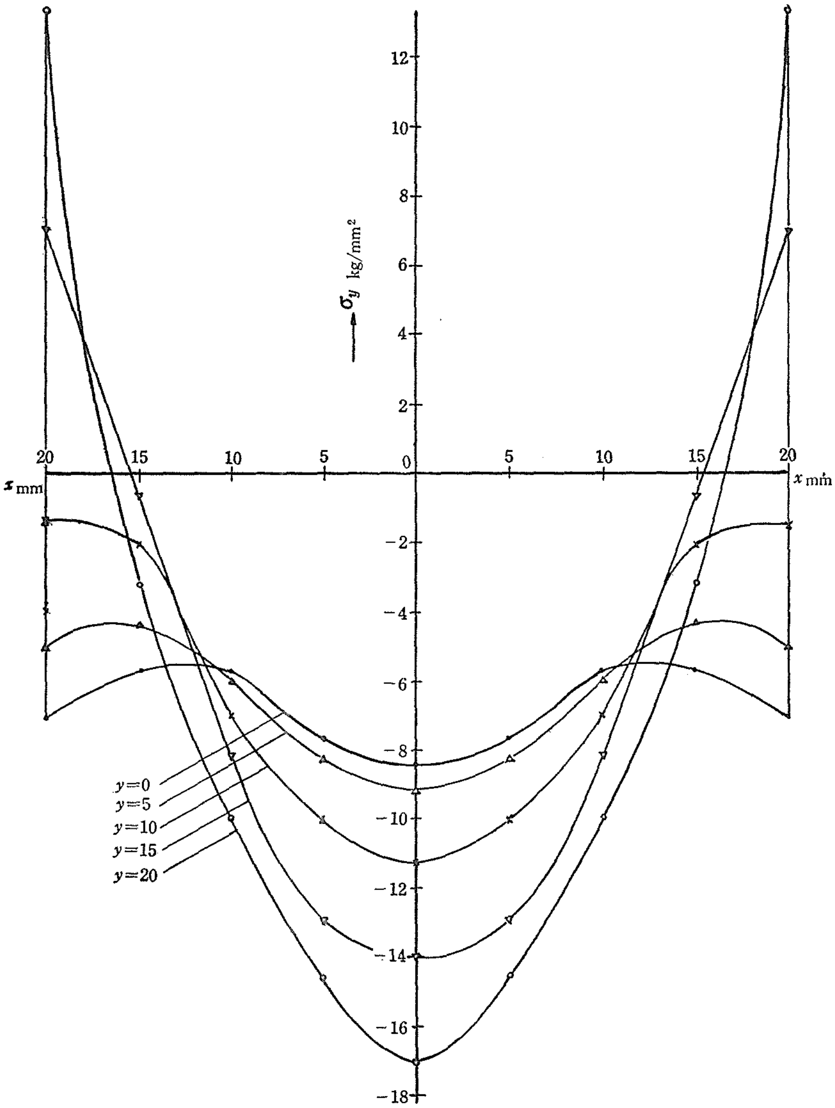
第16図　σ_y 曲線，II(2)

第7表 20元1次連立方程式 II (2)

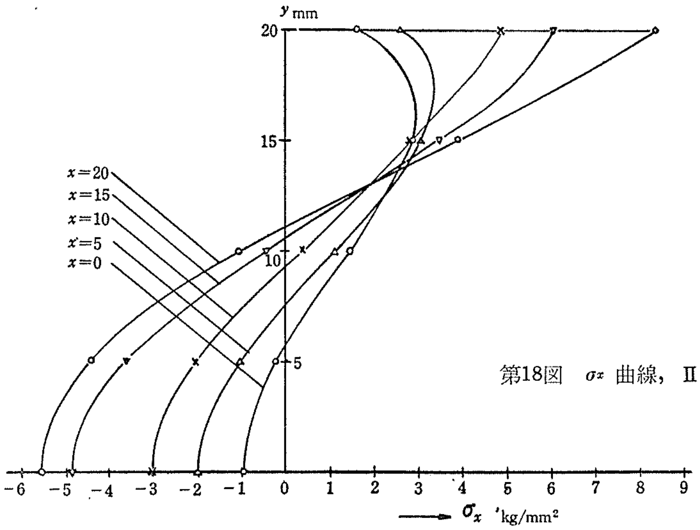
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	C_1
0.007 90					0.181 646 2					−0.002 015 6
	0.075 52					5.097 640				0.149 536 9
		−113.375 0					−1 962.974			−5 839 402
			−14 623.53					−273 055.0		188.414 16
				−1 136 335.0					−21 706 560.	−5 567.951
0.039 409					1.233 513					−0.018 522
	9.030 686					227.855 5				1.374 119
		751.153 8					17 580.25			−53 659 38
			42 460.17					956 402.65		1 731.368
				1 953 167.6					42 982 837.4	−51 175.69
−0.002 016	0.000 806	−0.000 403	0.000 237	−0.000 155	−0.069 617	0.028 134	−0.015 976	0.008 701	−0.006 266	0.007 90
0.149 540	−0.093 460	0.057 514	−0.037 384	0.025 782	3.668 280	−2.457 21	1.591 13	−1.054 28	0.741 129	
−5.839 42	4.491 80	−3.244 12	2.335 77	−1.717 440	−131.675 9	105.219 9	−78.660 52	58.008 42	−43.358 96	
188.418 8	−160.152 0	128.121 6	−100.095 0	78.122 13	4 103.413	−3 559.831	2 913.151	−2 320.477	1 838.418	
−5 567.959	4 991.961	−4 257.821	3 530.860	−2 895.334	−118 992.6	107 947.5	−93 447.5	78 621.62	−65 279.01	
−0.018 522	0.014 818	−0.011 113	0.008 716	−0.007 124	−1.002 67	0.397 593	−0.312 344	0.249 545	−0.205 802	0.039 409
1.374 119	−1.717 648	1.585 521	−1.374 119	1.184 593	26.876 92	−36.876 61	35.981 05	−32.125 66	28.162 39	
−53.659 38	82.552 81	−89.433 01	85.855 01	−78.910 95	−1 018.003	1 664.529	−1 876.223	1 852.197	−1 734.293	
1 731.368	−2 943.327	3 531.992	−3 679.158	3 589.387	33 446.52	−58 217.86	71 504.58	−76 285.66	75 678.76	
−51 175.69	91 744.47	−117 378.3	129 782.7	−133 028.6	−993 228.7	1 804 414.0	−2 346 208.0	2 635 669.0	−2 738 742.0	

第7表続き

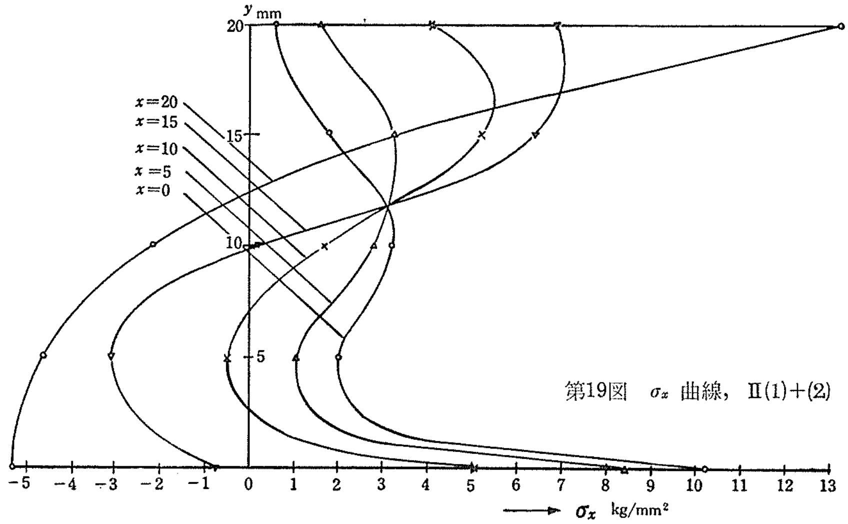
C_2	C_3	C_4	C_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
0.000 806 3	−0.000 403	0.000 237	−0.000 1646	−0.069 617	0.028 134	−0.015 976	0.008 700	−0.006 266	=0.225 2	(1)
−0.093 460 6	0.057 514 1	−0.037 384	0.025 782	3.668 28	−2.457 20	1.591 130	−1.054 28	0.741 128	=0.056 3	(2)
4.491 853	−3.244 120	2.335 766	−1.717 477	−131.672 3	105.219 5	−78.660 51	58.008 39	−43.358 99	=0.025 0	(3)
−160.152 12	128.121 7	−100.095 1	78.122 20	4 103.417	−3 559.829	2 913.150	−2 320.476	1 838.418	=0.014 1	(4)
4 991.920	−4 257.851	3 530.861	2 895.335	−118 992.6	107 947.3	−93 447.3	78 620.63	−65 278.98	=0.009 0	(5)
0.014 818	−0.011 113	0.008 716	−0.007 124	−0.426 248	0.397 597	−0.312 348	0.303 563	−0.205 805	=0	(6)
−1.717 648	1.585 521	−1.374 119	1.184 593	21.426 31	−36.876 64	42.386 66	−32.125 68	28.162 86	=0	(7)
82.552 81	−89.433 01	85.855 01	−78.910 95	−1 034.647	1 664.531	−1 876.232	1 852.200	−1 734.307	=0	(8)
−2 943.327	3 531.992	−3 679.158	3 589.387	33 467.77	−58 217.91	71 660.32	−76 285.73	75 678.32	=0	(9)
91 744.47	−117 378.3	129 782.7	−133 028.6	−993 229.2	1 804 213.9	−1 939 941.4	2 635 645.7	−2 738744.8	=0	(10)
				0.181 646					=0	(11)
0.075 52					5.097 70				=0	(12)
	−113.375 8					−1 961.901			=0	(13)
		−14 623.54					−273 054.9		=0	(14)
			−1 136 336.0					−21 706 552.0	=0	(15)
				1.233 513					=0	(16)
9.030 686					227.855 5				=0	(17)
	751.153 8					17 580.19			=0	(18)
		42 460.17					956 403.4		=0	(19)
			1 953 167.6					42 982 829.9	=0	(20)



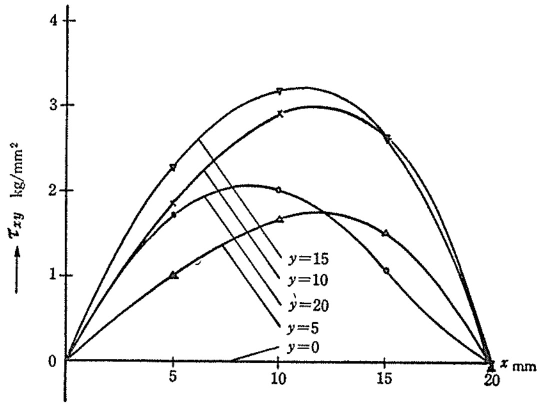
第17図　σ_y 曲線，II(1)+(2)



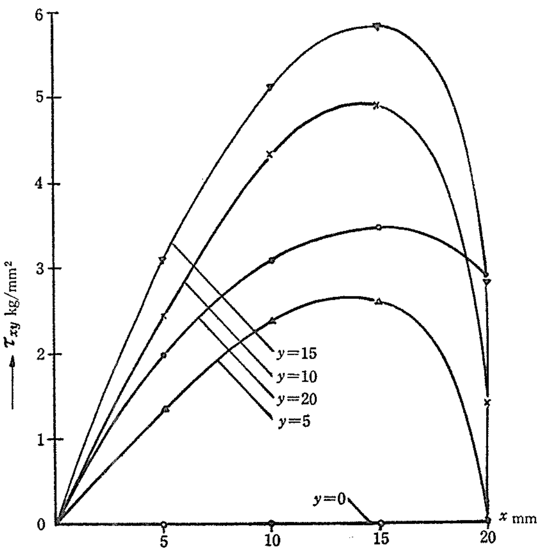
第18図 σ_x 曲線，Ⅱ(2)



第19図 σ_x 曲線，Ⅱ(1)+(2)



第20図 τ 曲線，Ⅱ(2)



第21図 τ 曲線，II(1)+(2)

梁 の 強 度 II (1) (等分布荷重の場合)

軸力，($N\,kg$)；曲げモーメント，($M\,kg-mm$)；剪断力，($F\,kg$)；

(a) 横 梁

i) $$\mathrm{N} = -\,t\int_x^{b/2} p'_n \sin\beta_n\zeta\cdot d\zeta = -\,t\sum\frac{p'_n}{\beta_n}\cos\beta_n x.$$

ii) $$\mathrm{M} = e\,t\sum\int_x^{b/2} p'_n\sin\beta_n\zeta\cdot d\zeta + t\sum\int_x^{b/2}(\zeta-x)(p_0^{(n)}+p_n\cos\beta_n\zeta)\,d\zeta$$

$$-\sum\frac{4kw_0}{n\pi}\int_x^{b/2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\zeta-x)\cos\beta_n\zeta\cdot d\zeta.$$

$$= e\,t\sum\frac{p'_n}{\beta_n}\cos\beta_n x + t\sum\frac{p_n}{\beta_n}\left\{\left(\frac{b}{2}-x\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{\beta_n}\cos\beta_n x\right\}$$

$$+\,t\sum p_0^{(n)}\left(\frac{b^2}{8}-\frac{bx}{2}+\frac{x^2}{2}\right)+\sum\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{\beta_n^2}\cos\beta_n x-\left(\frac{b}{2}-x\right)\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\beta_n}\right\}.$$

iii) $$\mathrm{F} = \sum\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\int_x^{b/2}\cos\beta_n\zeta\cdot d\zeta - t\sum\int_x^{b/2}p_n\cos\beta_n\zeta\cdot d\zeta - t\,p_0\int_x^{b/2}d\zeta$$

$$= \sum\frac{4kw_0}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\beta_n}\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}-\sin\beta_n x\right)$$

$$-t\sum\frac{p_n}{\beta_n}\Big((-1)^{\frac{n-1}{2}}-\sin\beta_n x\Big)-t\,p_0\Big(\frac{b}{2}-x\Big).$$

(b) 縦 梁

i) $$\mathrm{N}=-t\sum\int_y^{h/2}q_n'\sin\beta_n\xi\cdot d\xi=-t\sum\frac{q_n'}{\beta_n}\cos\beta_n y.$$

ii) $$\mathrm{M}=-e\,t\sum\int_y^{h/2}q_n'\sin\beta_n\xi\cdot d\xi-t\sum\int_y^{h/2}q_n(\xi-y)\Big(\cos\beta_n\xi-\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big)d\xi$$

$$=-e\,t\sum\frac{q_n'}{\beta_n}\cos\beta_n y+t\sum q_n\Big\{\Big(\frac{h^2}{8}-\frac{hy}{2}+\frac{y^2}{2}\Big)\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$-\Big(\frac{h}{2}-y\Big)\frac{1}{\beta_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{\beta_n^2}\cos\beta_n y\Big\}.$$

iii) $$\mathrm{F}=-t\sum q_n\int_y^{h/2}\Big(\cos\beta_n\xi-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)d\xi$$

$$=t\sum q_n\Big\{\Big(\frac{h}{2}-y\Big)\frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\frac{1}{\beta_n}\Big((-1)^{\frac{n-1}{2}}-\sin\beta_n y\Big)\Big\}.$$

但し，(a), (b) の nは 1, 3, ……9 とする.

梁 の 強 度 II (2) (変分布対称荷重の場合)

(a) 横 梁

i) $$\mathrm{N}=-t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta=t\sum\frac{p_n'}{\alpha_n}\{(-1)^n-\cos\alpha_n x\}.$$

ii) $$\mathrm{M}=-e\,t\sum\int_x^{b/2}p_n'\sin\alpha_n\zeta\cdot d\zeta-t\sum\int_x^{b/2}p_n(\zeta-x)\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta$$

$$+\sum\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\int_x^{b/2}(\zeta-x)\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta.$$

$$=\sum\frac{1}{\alpha_n}\Big(\frac{tp_n}{\alpha_n}-e\,tp_n'-\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\frac{1}{\alpha_n}\Big)\{\cos\alpha_n x-(-1)^n\}$$

iii) $$\mathrm{F}=\int_x^{b/2}\frac{4w_0}{(n\pi)^2}\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta-t\sum\int_x^{b/2}p_n\cos\alpha_n\zeta\cdot d\zeta,$$

$$=-\sum\frac{1}{\alpha_n}\Big(\frac{4w_0}{(n\pi)^2}-t\,p_n\Big)\sin\alpha_n x.$$

(b) 縦 梁

i) $\mathrm{N}=-t\sum\int_y^{h/2} q_n' \sin\alpha_n\xi\cdot d\xi=-t\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}.$

ii) $\mathrm{M}=-et\sum\int_y^{h/2} q_n' \sin\alpha_n\xi\cdot d\xi-t\sum\int_y^{h/2} q_n(\xi-y)\cos\alpha_n\xi\cdot d\xi,$

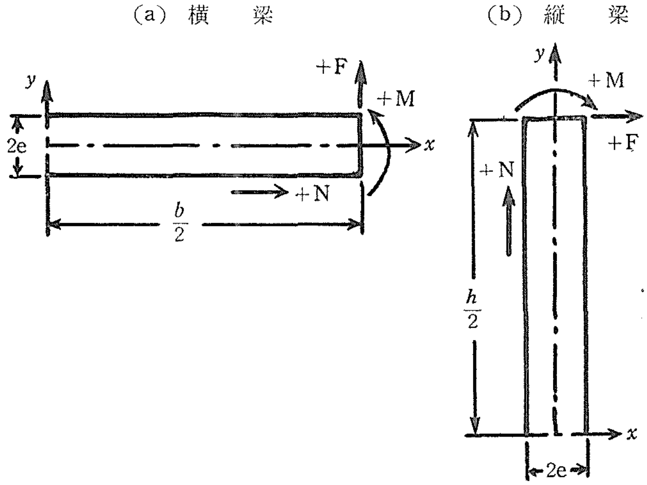
$$=et\sum\frac{q_n'}{\alpha_n}\{(-1)^n-\cos\alpha_n y\}+t\sum\frac{q_n}{\alpha_n^2}\{\cos\alpha_n y-(-1)^n\}.$$

iii) $\mathrm{F}=-t\sum\int_y^{h/2} q_n\cos\alpha_n\xi\cdot d\xi=t\sum\frac{q_n}{\alpha_n}\sin\alpha_n y.$

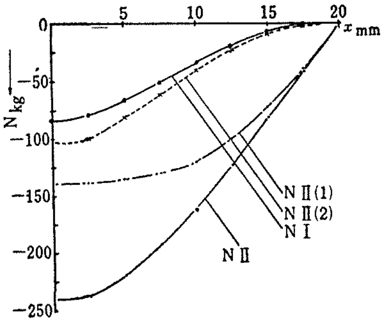
但し (a), (b) の n は 1, 2……5 とする.

次に I と同一の数値例を用いて, N, M, F を計算して図に画くと 第23～28図 の如くなる. 尚横梁の場合に I と比較のためそれ等を NI, MI, FI として併記した.

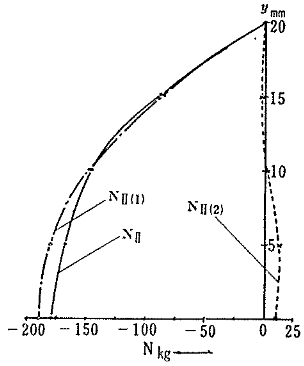
又梁の力 (N, M, F) は 第22図 の如く矢印を正にとることはIと同様である.



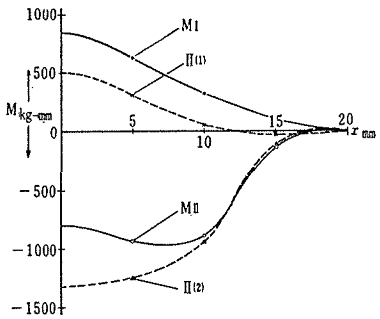
第 22 図



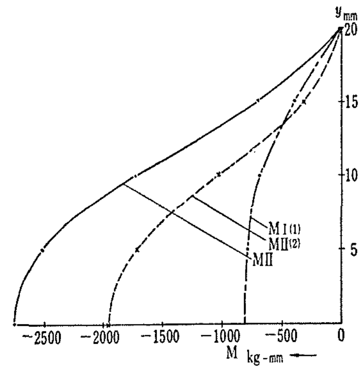
第23図　横梁の軸力（N）



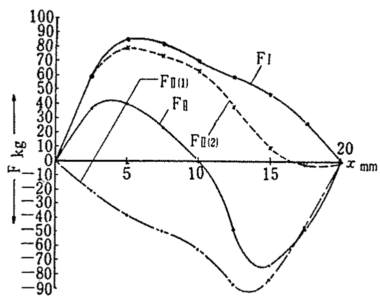
第24図　縦梁の軸力（N）



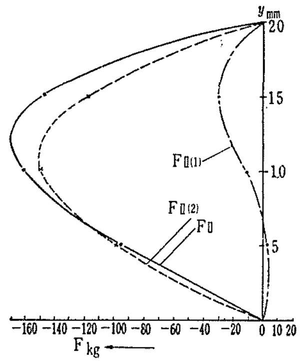
第25図　横梁のモーメント（M）



第26図　縦梁のモーメント（M）



第27図　横梁の剪断力（F）



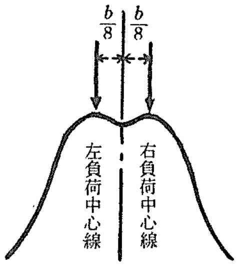
第28図　縦梁の剪断力（F）

実　　験

模型は数値例の2.5倍の寸法で，軟鋼材を用いて行った．なお歪測定は抵抗線歪計を使用した．

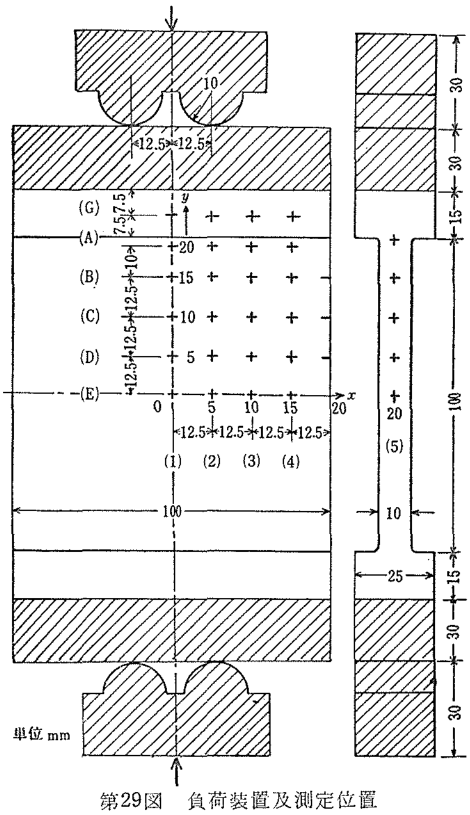
負荷装置

計算による分布荷重に近似させるため25×30の断面を有する中間材（軟鋼）を介して，第29図の如く一点荷重を分布するようにかけ，その分布状態を知るため縁材の4個所 ($G_1 \cdots G_4$) に歪計を取付けて測ったが，その結果と供試品の縁材と板とのつけ根附近の応力分布は共に右図のように荷重中心線上でピークを示し，結局計算値とは中心線部で喰違のあることを認めたので，その影響を受けない $y=0$, 10 の代表位置について σ_y の計算値と実験値との比較を行った．



歪測定位置

同じく第29図に示すように A, B, C, D, E の各等間隔について σ_x, σ_y を測った．



第29図　負荷装置及測定位置

結　　言

本報では応力解析を二種類（Ⅰ，Ⅱ）の縁材型式について試みた．

すなわち，Ⅰ と Ⅱ の違いは縦の縁材の有無であって，これら縁材並びに板の平面応力におよぼす影響について両者の計算並びに実験結果を並記図示して，明かにした．

以上の応力状態を考察して，綜合的に次の結論を下すことができる．

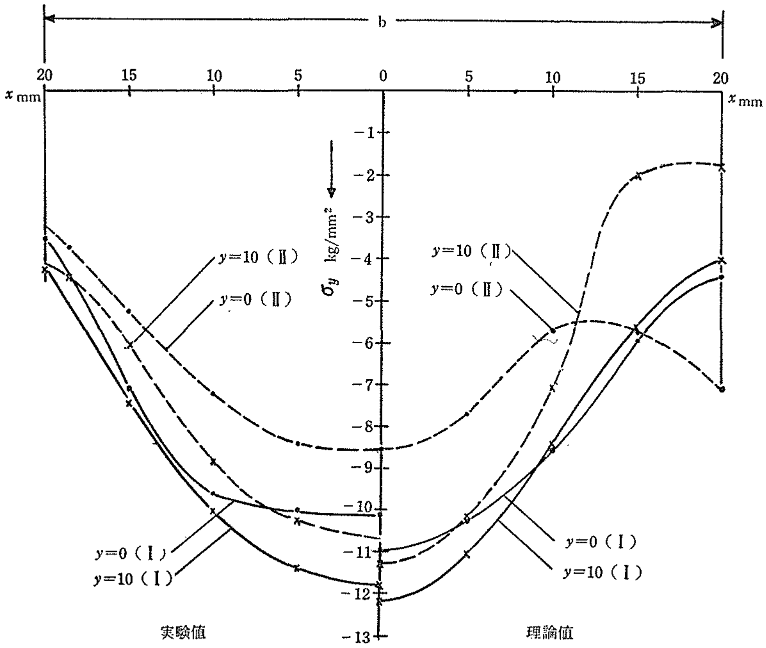
1　梁（横枠）の強度　第23, 25, 27図参照

軸力Nに就いては，Ⅰ，Ⅱ共に圧縮応力を受けているが，Ⅱの方が約3倍程大きい応力を生じている．曲げモーメントMは，符号Ⅰ(+) Ⅱ(−)でその値は略一致している．剪断力FはⅠ(+) Ⅱは(+，−)の符号をもち，値は前者が約2倍の大きさとなっている．

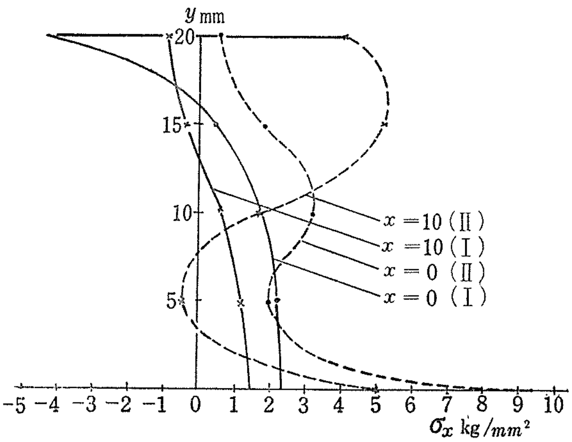
2　平板の強度　第30, 31, 32図参照

σ_x，τ_{xy} の両応力は共にⅡがⅠに比較して絶対的に大きく，また σ_y は両者共予測通りの分布傾向を示し，Ⅰでは中央に応力が集中してピークを生じ単調な分布をなしているが，Ⅱは端部で縦梁の影響を受けて応力が上昇して全体に波状を呈して平均化される傾きがある．

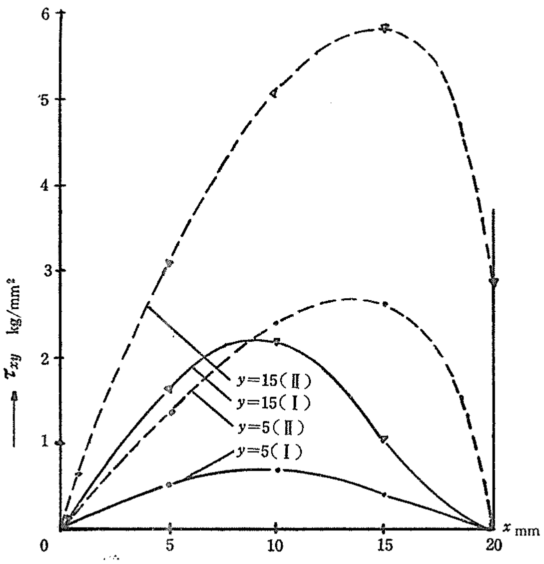
したがって，梁，板共にⅠの型式がⅡに対し強度的に優れていると云う興味ある結果を得た．この考え方は一般の矩形型構造にも適用されることと思う．



第30図　σ_y 曲線の比較図



第31図 σ_x 曲線の比較図



第32図 τ_{xy} 曲線の比較図

3　計算値と実験結果との比較

第30図は σ_y のそれら比較を $y=0$, $y=10$ の2つの代表位置について示したもので，定性的にも定量的にも一応よく一致している．σ_x については σ_y に比して，その絶対値が小さいこと，負荷状態は理論計算と実験とが相違するためその影響による推定が困難なこと，σ_x は荷重方向と垂直な応力であること，負荷時の状態，試験片の製作精度，実験技術等が微妙に絡みあって，定量的にはもちろん，定性的にも比較することが困難な結果となった．

以上の如き結果より，理論解においては級数の収束性並びに板と縁との連続条件の近似度，実験においては目的の応力に対する真実性が問題であり，これら二点を考え合わせ（この場合 σ_y について考慮すべきである）実用的には本理論解は充分両者の比較検討の資料を与えて呉れるものと思う．

以上の二つの構造に続いて縁材が四隅でピン結合された場合と剛節構造その他について目下計算をすすめている．

最後にこれらと実験結果とを対比して平板の wall effect につき検討を加える考えである．

本研究に当って種々御指導，御示唆を戴いた阪大教授，太田友弥博士，並びに実験に御協力を下さった川崎重工工作部長吉田俊夫博士，同寺井清係長およびその他の方々の御好意に厚く謝意を表する．なお本研究の計算並びに整理に終始努力を払って呉れた本学の原山守君と卒研生大日方三千雄，鎌倉巌両君の労力を多とする．

Summary

Strength of Square Plate with Flanges

Takeo MIYAIRI

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

For the purpose of knowing the stiffening effect of a plate inserted in the square frame work, this paper treats the boundary-value problem in which a square plate reinforced by a pair of beams is subjected to varying distributed compressive loads parallel to the edge of the plate. Apart from the problem of buckling of its plate, theoretical solutions are derived for the plate, together with for the bending of the beams, and they showed a fair approximation to the experiments.

From the results obtained, it can be concluded that the insertion of the plate does not always result in the reinforcement of the beams —— members of frame works ——, but that their strength is decreased greatly.