

# 音響系の電気回路網的特性表現

安 田 力\*

信州大学工学部通信工学教室

(昭和32年9月20日受理)

## 1. は し が き

音響濾波器, 共鳴器, スピーカーのホーン, 音響管など純音響学的構造をもつ音響伝送系, ならびにスピーカー, 受話器, マイクロホンなどのような音響機器の機械-音響変換系等の解析を行うために, 電気回路網の解析に用いている種々の手段を援用することは, 甚だ有効である。しかしこのとき, 系に唯一個の“energy の流れ口”があって, しかもその流れの様式が既定の分布でなされる場合の他は, 系の定常特性を単にありふれた音響インピーダンスとか機械インピーダンスなどの二端子網的な表現法によって記述することは不適当なのであって, 一般には energy の流れ口の個数や, energy の流れ方の様式の数に応じた端子の対をもつ多端子回路網と同様な取り扱いを必要とする。そのうちでも特に重要と考えられるのは入出力端子対が各1のもの即ち四端子回路のような場合で, 機械-音響系のもっとも簡単なものはこれに帰着する。

筆者はさきに機械振動系の定常特性を同様な観点からして電気回路網的にマトリックス表示する方法について説明し, それによって振動伝達系の伝送特性を求めたり, 他系との連成振動系を解析する方法などについて論じたが, その方法はほとんどみな音響系の解析にも利用できるものである。本文は音響系に設けられたいくつかの energy の流れ口における, 音圧と体積速度 (またはそれらを代表するように適当に定義された量) の間の定常状態における関係式をマトリックスの形で書いた場合, それと系の Green 関数とのつながりを論じ, マトリックスによる音響系の特性表示法の理論的根拠を明確にしようとした。本文で主としてとりあげた表現型式は, 音響インピーダンスとか機械インピーダンスなどを電気インピーダンスに類推するならば, 丁度電気回路網の  $Z$  マトリックス表示に対応している。

## 2. energy の流れ口 (端子) についての注意

着目する音響系の内部, またはその境界上にある特定個所から energy が系に出入りする場合には, その流れの状況は, 系が角周波数  $\omega$  の正弦的变化のみをしているとすれば, その場所におかれた音源がもっている容積速度とか, またはその場所の音圧とかの空間的な分布の形が, 予め一定の関数で与えられているときに限り, 唯一対の複素量の

\* 信州大学講師

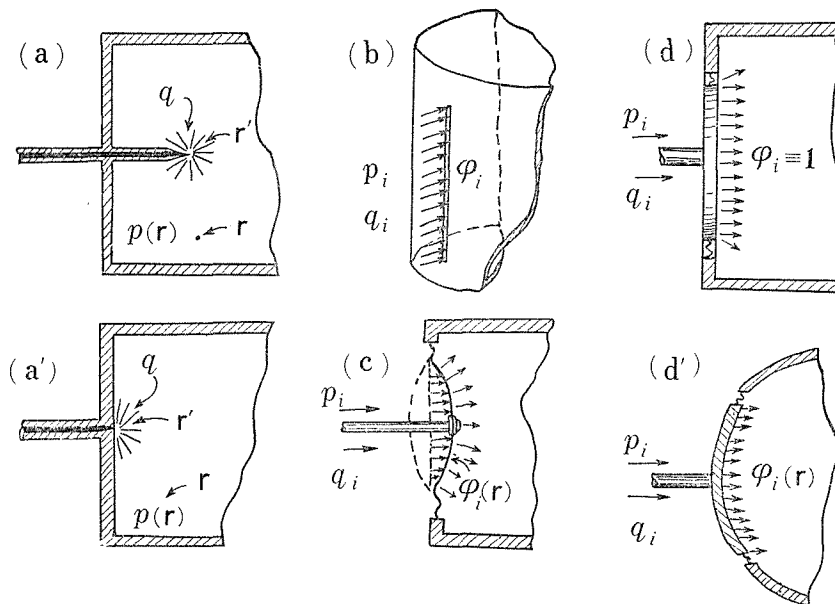
組で代表させることができる。たとえば均一な音圧  $p$  で系内に容積速度  $q$  の流体を送り込むときには、

$$P = \frac{1}{2} p \cdot q^* \quad (2-1)^{(*1)}$$

の power が系に加えられると考えることができる。ここに  $p, q$  はそれぞれ音圧および容積速度の各振巾（最大値）位相をもつ複素数である。

(2-1) の  $p, q$  としては、音圧、容積速度の代りに力と線速度といったような組をとることも差支えなく、流れ口の様相により (2-1) 式を満足する様に適当に規定すればよい。

2-1 駆動型式について 音響系に対する energy の供給の仕方のうち、理論的根拠をつけやすい型を考えると次の三つになる。(第2-1図)



第2-1図 音響系ならびに機械-音響系における energy の流れ口の簡単な例, (a), (a'): 点音源的な energy の流れ口, (b): 線状分布音源的流れ口, (c): 面状分布音源的流れ口, (d), (d'): ピストン音源的流れ口ただし (d') の場合は法線方向速度は場所によってちがう。

(a) 点音源による駆動 これは系の内部または外系との境界上に点音源をおいた場

(\*1): (イ)  $q^*$  で  $q$  の共役複素量を示すものとする。以下同様に \*印を共役複素量の記号として用いる。

(ロ) complex power のこの表わし方は、広く用いられる音響、機械、電気各インピーダンスの語意を合せるため、本文では力(音圧)-電圧、速度(容積速度)-電流の類推型式をとっていることによる。

合で、系内の音圧分布の立場からみれば source point が特異な点となり<sup>(\*)2)</sup>、したがって (2-1) 式のようにして source から系に供給される power の評価をすることができないが、波長に比べて充分小さな音源を系内に持込んだときの音源から相等離れた所における音場を考えるのに便利であるばかりでなく、後述の分布音源の場合の理論の根底になる Green 関数とは直接の関係がある。

(b) **線状分布音源による駆動** 系内または境界上にある曲線の上に既知の分布関数で分布した音源がある場合で、このときも前項と同様にその曲線の上はすべて音圧分布の特異点となり、音圧の値が有限の値に止まらないことになる。

(c) **面状分布音源による駆動** 系内または境界面上の一部に、容積速度の分布形が既知の関数で表わせるような面分布音源で駆動する場合で、このときには前 2 項と異なって音源上で音圧は特異な値をとらない。したがってこの場合には駆動個所からの power の流入は適当な  $p, q$  の定義によって、(2-1) 式のように表わすことができる。

たとえば境界壁面の一部  $S$  が法線方向に振動するときにはその面から系に音響 energy が供給されることになるが、その運動壁の速度分布  $v(r)$  が前もって

$$v(r) = q \cdot \varphi(r) \dots\dots\dots(2-2)$$

のように、振巾位相を代表する  $q$  と空間分布を表わす分布関数  $\varphi(r)$  の積の形で表わされているとすれば、その面における力の振巾位相の代表量  $p$  をつぎのように約束すると (2-1) が満足される。

即ち実際に系からこの壁面上に加わる反力 (音圧) の分布を関数  $p(r)$  で表わせば、このとき系への流入 power  $P$  は、 $p, q$  をいずれも最大値 (勿論位相もふくむ) とすれば、

$$P = \frac{1}{2} \iint_S p(r) \cdot v^*(r) dS_r \dots\dots\dots(2-3)$$

になる筈で、之に (2-2) を代入すれば、

$$P = \frac{1}{2} q^* \cdot \left\{ \iint_S p(r) \cdot \varphi^*(r) ds_r \right\} \dots\dots\dots(2-4)$$

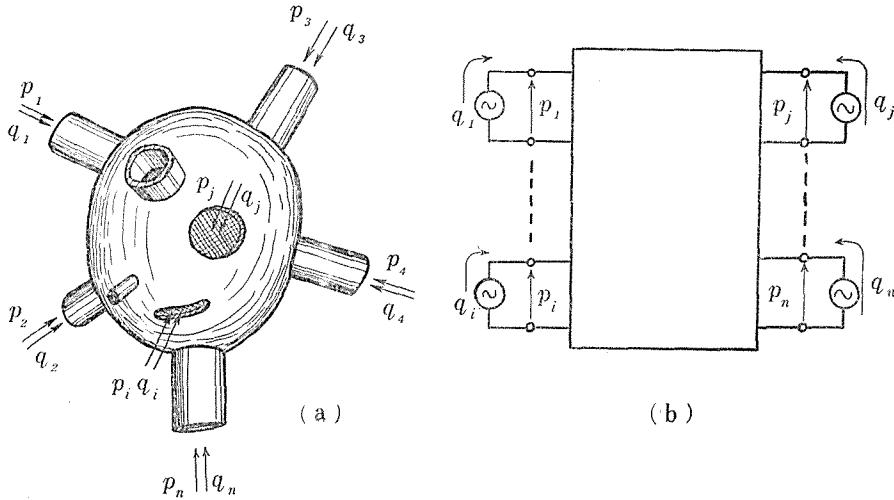
となる。したがってこのような流れ口においては力 (音圧) の代表量として

$$p = \iint_S p(r) \cdot \varphi_i^*(r) dS_r \dots\dots\dots(2-5)$$

をとれば (2-1) が満足されることになる。

---

(\*)2): 附録参照



第2-2図 いくつかの energy の流れ口をもつ音響系(a)と、その等価多端子電気回路 (b)

2-2 音響系のマトリックス表示の概要 前節のように energy の流れ口における力(音圧)や速度(容積速度)の代表量を定義するとし、 $n$  個の流れ口をもつ音響系におけるそれらの値を  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , および  $q_1, q_2, \dots, q_n$  と記せば、重ね合せの原理が成立つとみて次のマトリックス表示ができる。

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \dots\dots(2-6)$$

以下簡単にこれを次のように書くことにする。

$$p = Z \cdot q \quad \dots\dots(2-6a)$$

ここに  $Z$  はその対角線要素  $Z_{ii}$  等が音響インピーダンスまたは機械インピーダンスの dimension をもつことになるので、その語感からして力(音圧)-電圧、速度(容積速度)-電流の analogy によつた等価電気回路の用語をそのまま採用し、 $Z$ マトリックスまたは開放インピーダンスマトリックスと呼ぶことにする。通常の音響系では相反性が成立し、

$$Z_{ji} = Z_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (2-7)$$

となる。<sup>(\*)3)</sup>

もし流れ口のなかに前項の(a), (b)で示されるような駆動様式即ち点音源的または線状分布音源的のものがある場合には、そのような流れ口に対する  $Z$  マトリックスの対角線要素 (開放駆動点インピーダンス) は有限の値をとらないこととなる。<sup>(\*)4)</sup>

$Z$  マトリックスが逆マトリックスをもつならば、そのマトリックス

$$Y = Z^{-1} \quad \dots\dots\dots(2-8)$$

を、電気回路の場合のように、 $Y$  マトリックスまたは短絡アドミタンスマトリックスと呼ぶことにする。これによれば、(2-6) の関係式は

$$q = Y \cdot p \quad \dots\dots\dots(2-9)$$

と書きかえられることになる。

このような両マトリックスの他に種々の表示法が考えられるが、いずれも電気回路網の関係式によって上のマトリックスから導かれる。またこれ等の特性量についての物理的意義の説明は文献(1)に述べられていることと大差ない。

### 3. 音響系の $Z$ マトリックスと系の point source 応答函数の関係

本章では音響系の特性を示す諸表示のうち、とくに  $Z$  マトリックスの性質を、系を支配する Helmholtz 方程式(定常波動方程式)の point source 応答函数(これが Green 函数に帰着する)との関係を中心にして述べ、その函数がもつ諸性質が  $Z$  マトリックスにどのように現れるかを示した。

3-1 点音源による音響系の定常応答 着目する系は一様な密度  $\rho$ 、一様な音速  $c$  をもつ無損失流体から成り、系内は次の波動方程式で支配されるものとしよう。<sup>(6)</sup>

$$\nabla^2 \tilde{p}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p}(\mathbf{r}, t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) \quad \dots\dots(3-1)$$

ここに  $\tilde{p}(\mathbf{r}, t)$  は系内の音圧分布を示す場所  $\mathbf{r}$  と時間  $t$  との函数、また  $q(\mathbf{r}, t)$  は音源の分布を表わす函数である。 $q$  の大きさは音源の強さ (strength of source) 即ち音源の単位容積 (三次元的分布音源の場合) が排出する容積速度を表わす。

系の定常状態のみに着目するものとすれば、 $\tilde{p}, q$  の時間的変化部分が  $\exp(j\omega t)$  の形であるとして、(3-1) 式は空間的函数に関するつぎのような式に書きかえられることになる。

(\*)3): 規準函数が実数値で与えられ (境界壁面が剛壁なら勿論実数値をとる), 且つ  $i, j$  二つの流れ口に対する分布函数  $\varphi_i, \varphi_j$  が実数値をとる場合には (2-7) が成立する。

(\*)4): 附録参照

$$(\nabla^2 + k^2) p(\mathbf{r}) = -j\omega \cdot \rho \cdot q(\mathbf{r}) \quad \dots\dots\dots(3-2)$$

ただし

$$k = \omega/c$$

この式の中の  $p$ ,  $q$  はいずれも場所のみの函数で、各部の音圧と音源の強さの分布の關係はこの (3-2) 式によって規定されることになる。

一方いま Dirac の delta 函数を  $\delta(\mathbf{r})$  <sup>(7),(8)</sup> で表わすとき、系内で非同次の Helmholtz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots(3-3)$$

をみだし、上の  $p(\mathbf{r})$  と同一の形の線型同次の境界条件を満足するような Green 函数 <sup>(7),(8)</sup>  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  が存在するとすれば、いま  $\mathbf{r}'$  点に単位の強さ (容積速度) の点音源を持って来たときに系内の任意の点  $\mathbf{r}$  に発生する音圧  $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は (3-2) 式において

$$q(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots(3-4)$$

とおくことになるから、それと (3-3) 式とを比較することにより直ちに

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega \cdot \rho \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots(3-5)$$

であることがわかる。したがって二点  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  間の伝達インピーダンス <sup>(6)</sup>  $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は

$$Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{1} = j\omega \cdot \rho \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots(3-6)$$

となつて、それは単に source point を  $\mathbf{r}'$  とし、observation point を  $\mathbf{r}$  とする Green 函数の  $j\omega \cdot \rho$  倍のものとなる。したがつて Green 函数がそなえている色々な性質は、ほとんどそのままこの伝達インピーダンスの性質にもなることがわかる。それらの性質のうち特記すべきものは  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  の場合即ち source point の近傍における音圧の大きさの特異性である。附録に示すように、これら  $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  または  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の値は  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  のとき一定確定値に収束せず、その近傍で  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  の程度に限りなく増大する。

3-2 線状分布音源による系の定常応答 線密度が  $q(\mathbf{r}) = q_i \cdot \varphi_i(\mathbf{r})$  で系内部またはその境界近くにある曲線  $C_i$  の上に分布しているような線状分布音源で系を駆動する場合の、定常応答を考える。

このとき系内の任意点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  は Green 函数に対する知識により直ちに

(\*5): Green 函数の定義として、境界上で  $G=0$  を要求するものもあるが近頃では線型同次の境界条件を満足するものにも一般にこの名称を用いるようになっている。<sup>(16)</sup>

(\*6): この場合  $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は音響インピーダンスの dimension をもっている。

$$p(\mathbf{r}) = j\omega \cdot \rho \cdot q_i \int_{C_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds_{r'} \quad \dots\dots\dots(3-7)$$

であることがわかる。したがってこのとき、線状分布音源  $C_i$  と任意点  $\mathbf{r}_j$  との間の伝達インピーダンスを  $Z(\mathbf{r}_j, C_i) = p(\mathbf{r}_j)/q_i$  と規約すればそれは、

$$Z(\mathbf{r}_j, C_i) = j\omega \cdot \rho \int_{C_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}') ds_{r'} \quad \dots\dots\dots(3-8)$$

のように求められる。前節の場合と同様に音源となる曲線  $C_i$ の上では音圧は有限の値とはならず、さらに積分

$$\int_{C_i} \varphi_i^*(\mathbf{r}) \int_{C_i} \varphi_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds_{r'} \cdot ds_{r'}$$

は収束しないから、この  $C_i$  からみた駆動点インピーダンスは無意味となる。

**3-3 面状分布音源に対する系の定常応答と  $Z$  マトリックス表示** 音源  $q(\mathbf{r})$  が、系の内部またはその境界近くにある曲面  $S_i$  の上に、面密度が  $q(\mathbf{r}) = q_i \cdot \varphi_i(\mathbf{r})$  の値に分布しているような面状分布音源である場合には、Green 関数の性質により系内の任意点  $\mathbf{r}$  における音圧は

$$p(\mathbf{r}) = j\omega \cdot \rho \cdot q_i \iint_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS_{r'} \quad \dots\dots\dots(3-9)$$

となる。したがってこのような駆動面  $S_i$  と系内の点  $\mathbf{r}_j$  との間の伝達インピーダンス  $Z_{ji}$  が  $p(\mathbf{r}_j)/q_i$  であると定義するならば、それは

$$Z_{ji} = j\omega \cdot \rho \iint_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}') dS_{r'} \quad \dots\dots\dots(3-10)$$

であることが直ちに了解される。

また (2-5) 式の規約でこの面分布音源的流れ口に対する系の反力  $p_i$  を規定し、その反力と音源の強さの比をとって之を駆動点インピーダンスと考えるならば、それは

$$Z_{ii} = j\omega \cdot \rho \iint_{S_i} \varphi_i^*(\mathbf{r}) \iint_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS_{r'} \cdot dS_{r'} \quad \dots\dots(3-11)$$

のように求めれば良いことがわかる。この式の右辺の積分では、その積分変数の変域内に  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  の点を含むために、そこで被積分関数は無限大の値になるが、その積分値は収束することがたしかめられている。

(\*7): この二重積分の発散性については附録に論じた。

(\*8): 附録参照

同様に分布函数が  $\varphi_k(\mathbf{r})$  であるような他の面  $S_k$  との間の伝達インピーダンスを求めてみると、それは

$$Z_{ki} = j\omega \cdot \rho \iint_{S_k} \varphi_k^*(\mathbf{r}) \iint_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot dS_{\mathbf{r}'} \cdot dS_{\mathbf{r}} \quad \dots\dots(3-12)$$

のようになる。この積分の収束は  $S_k, S_i$  が共通点をもつと否とにかかわらず問題ない。

$S_i, S_k$  両面がピストン運動をする境界面の一部たる平面である場合には (3-11), (3-12) 両式で  $\varphi_i \equiv 1, \varphi_k \equiv 1$  とすれば良い。

上に求めた  $Z_{ii}, Z_{ki}$  等はそのまま (2-6) 式の  $Z$  マトリックスの対応要素になっていることは以上の誘導の過程を見れば明らかである。

#### 4. 閉容器内の音響系の $Z$ -マトリックス <sup>(9)~(12)</sup>

本章では周辺が剛壁でかこまれた閉じた小室の中の音響系が、その壁の一部に設けられた energy の流れ口に対して示す定常応答と、その  $Z$  マトリックス表示について述べる。

4-1 規準様式振動と規準函数 剛壁で出来た閉容器の中の無損失音響系の規準様式振動について考えよう。機械振動体の解析 <sup>(1)~(4)</sup> の場合と同様に、この問題に対しては規準函数を導入しておく都合の良いことが多い。

規準函数  $\Xi_m(\mathbf{r})$  は規準振動の角周波数同様、規準様式振動にそれぞれ一つ宛対応し、それは系内で同次微分方程式

$$(\nabla^2 + k_m^2) \Xi_m(\mathbf{r}) = 0 \quad \dots\dots\dots(4-1)$$

を、また境界壁面上で線型同次境界条件

$$\frac{\partial \Xi_m(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad (\text{剛壁条件}) \quad \dots\dots\dots(4-2)$$

がみたされ、且つ正規直交条件

$$\iiint_V \Xi_m(\mathbf{r}) \cdot \Xi_n^*(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} = \delta_{mn} \cdot V \quad \dots\dots\dots(4-3)^{(*9)}$$

を満足するような函数列  $\{\Xi_m(\mathbf{r})\}$  の函数である。(4-1) の  $k_m^2$  は第  $m$  固有値で第  $m$  規準角周波数  $\omega_m$  との間に

(\*9): 剛壁面でかこまれている場合には以下の式で  $\Xi_m$  および  $\omega_m$  はいずれも実数値であるから、この  $\Xi_m^*$  の \* 印はとってよい。



$$k_m^2 = \omega_m^2 / c^2 \quad \dots\dots\dots(4-4)$$

の関係があり、また (4-3) 式において  $V$  は容器の全容積を、さらに  $\delta_{mm}$  は Kronecker の delta を表わすものとする。

固有函数を (4-3) の規準条件をみたすように規準化する方法ならびにその効用等についてはすべて機械振動体の場合について詳しく説明されているのと同様であるからここでは述べない。

上の境界条件式 (4-2) は剛壁に対するもので、より一般的な壁面条件としてはその代りに線型同次境界条件

$$\frac{\partial E_m(\mathbf{r})}{\partial n} = y \cdot E_m(\mathbf{r}) \quad \dots\dots\dots(4-2a)^{(*9a)}$$

のようなものも考えられるが、このような取り扱い方がまだ普通に行われていないので、本節では一応剛壁の場合に限った。したがって  $\omega_m$ ,  $E_m$  は本節の記述に関するかぎり実数と考えるとよい。一般の場合についてはいずれ詳しく取り扱ってみたいと思う。

4-2 規準函数の項による Green 函数ならびに  $Z$ -マトリックスの展開 前節の規準函数を用いるならば Green 函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  が次のように展開表示されることはよく知られたところである。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_m \frac{E_m(\mathbf{r}) E_m^*(\mathbf{r}')}{(k_m^2 - k^2)V} \quad \dots\dots\dots(4-5)$$

ただし、

$$k_m = \omega_m / c, \quad k = \omega / c.$$

したがって二点  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i$  間の伝達インピーダンス  $Z(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i)$  は、

$$Z(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) = \frac{j\omega}{C} \sum_m \frac{E_m(\mathbf{r}_j) \cdot E_m^*(\mathbf{r}_i)}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \quad \dots\dots\dots(4-6)$$

のように展開されることがわかる。右辺の記号  $C$  は、 $\kappa$  を使用流体の体積弾性率とするとき、

$$C = V / \kappa \quad \dots\dots\dots(4-7)$$

の値を表わし、これは普通に容器の音響容量と呼ばれる量に相当している。

(\*9a): (4-2a) 式における  $y$  は壁面の単位面積当りの音響アドミタンス (インピーダンスの逆数) を代表する複素量である。このような取り扱いについては他の機会にのべたいと思う。

最低規準角周波数は閉容器に対しては一般に零となり，その様式を  $m=0$  で表わせば，その様式に対応する規準函数  $\Xi_0(\mathbf{r})$  は系内いたるところで

$$\Xi_0(\mathbf{r}) \equiv 1$$

である。したがって容器を単なる音響容量  $C$  とみることば展開式において  $m=0$  の様式だけを考えたものとみることができる。

分布音源的な energy の流れ口に対する  $Z$  マトリックスも Green 函数の展開式 (4-5) を用いれば容易に規準函数展開の形で表わされることになる。

たとえば二つの面分布音源の流れ口  $(S_1, \varphi_1)$ ,  $(S_2, \varphi_2)$  の間の  $Z$  マトリックスの要素  $Z_{11}$ ,  $Z_{21}$  の規準函数展開表示式は，(3-11), (3-12) に上の (4-5) を代入することにより，

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{j\omega}{C} \sum_m \frac{\left\{ \iint_{S_1} \Xi_m(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}) dS_r \right\} \left\{ \iint_{S_1} \Xi_m^*(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}) dS_r \right\}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \\ Z_{21} &= \frac{j\omega}{C} \sum_m \frac{\left\{ \iint_{S_2} \Xi_m(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r}) dS_r \right\} \left\{ \iint_{S_1} \Xi_m^*(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}) dS_r \right\}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-8)$$

のように求められる。 $Z_{12}$ ,  $Z_{22}$  等についても同様に計算される。

これらの展開式の特徴は (3-11), (3-12) 等では分離されずにあった積分が，駆動側と受動側との两部分に関する量の積の形にわけられたことで，一般に規準函数展開式は各種の energy の流れ口の場合を通じて次の式で示されることになる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{ii} &= \frac{j\omega}{C} \sum_m \frac{N_m(i) \cdot N_m^*(i)}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \\ Z_{ji} &= \frac{j\omega}{C} \sum_m \frac{N_m(j) \cdot N_m^*(i)}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-9)$$

式中の  $N_m(i)$  等の値は energy の流れ口の型式により，第1表のように選べば良い。(4-9) 式の形を得ておくと，のちに集中定数のくみ合せによる等価電気回路を導入するに都合がよい。

第1表  $N_m(i)$  の値

energy 流れ口の型式		$N_m(i)$ の値
種類	記号	
点音源	$r_i$ (所在点)	$\Xi_m(r_i)$
線状分布音源	$(C_i, \varphi_i)$	$\int_{C_i}^* \varphi_i(r) \Xi_m(r) ds_r$
面状分布音源	$(S_i, \varphi_i)$	$\iint_{S_i} \varphi_i(r) \Xi_m(r) ds_r$
ピストン音源	$(S_i, \varphi_i \equiv 1)$	$\iint_{S_i} \Xi_m(r) dS_r$

(4-9) の  $Z_{ii}$  即ち第  $i$  端子からみた駆動点インピーダンスは前にも度々述べたように、第  $i$  番の流れ口が点音源的、または線状分布音源である場合には有限確定値をとらぬ筈であり、之については附録に説明するが、多くの場合 (4-9) の右辺の展開式の形でも直接その発散性をたしかめることができる。

### 5. 無限領域を含む系の Z-マトリックス

第3章に述べた  $Z$  マトリックスと Green 函数の関係は、系が無限領域を含む場合にもあてはまる。つぎにその極めて簡単な問題二三について説明しよう。

5-1 自由空間における伝達インピーダンス 自由空間において (3-3) をみだし、また  $r \rightarrow \infty$  において輻射条件 (condition of radiation) を満足するような Green 函数  $G(r, r')$  は次式で与えられる。<sup>(7),(8)</sup>

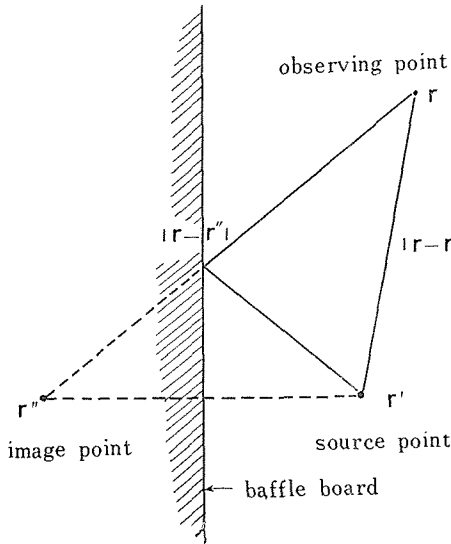
$$G(r, r') = \frac{e^{jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \dots\dots\dots(5-1)$$

ただし  $k = \omega/c$  である。

自由空間内の二点  $r_1, r_2$  間の伝達インピーダンス  $Z(r_1, r_2) = Z(r_2, r_1)$  は (5-1), (3-6) 両式からただちに、

$$Z(r_1, r_2) = \frac{j\omega \cdot \rho}{4\pi} \frac{e^{jk|r_1-r_2|}}{|r_1-r_2|} \dots\dots\dots(5-2)$$

と得られる。言うまでもなくこれは音響インピーダンスの dimension をもっている。



第5-1図 半無限空間におかれた点音源とその鏡像

分布音源に対しても第3章の各式に (5-1) の Green 函数を代入することにより, Z マトリックス等が求められる。

5-2 無限大剛バツフルによって仕切られた半無限空間内の音響系に対する Z-マトリックス表示 限りなく広がった平面剛壁で仕切られた,  $2\pi$  の立体角をなす半無限空間内の音響系の Green 函数は, 前節の自由空間に対する Green 函数から鏡像原理を用いて求めることができる。即ち第5-1図のように source point  $r'$  と observation point  $r$  が配置されているとすれば,  $r'$  におかれた unit source による  $r$  への作用は, 剛壁を撤去した自由空間において等しい二つの unit source を  $r'$  とその鏡像点  $r''$  に各一つ宛配置した場合の, 両 source の  $r$  への作用の和に等しい。

したがってこの問題に対する Green 函数は

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{jkl|r-r'|}}{|r-r'|} + \frac{e^{jkl|r-r''|}}{|r-r''|} \right\} \dots\dots\dots(5-3)$$

となる。故に  $r_1, r_2$  なる空間内の二点間の伝達インピーダンス  $Z(r_1, r_2)$  は

$$Z(r_1, r_2) = \frac{j\omega\rho}{4\pi} \left\{ \frac{e^{jkl|r_2-r_1|}}{|r_2-r_1|} + \frac{e^{jkl|r_2-r_1'|}}{|r_2-r_1'|} \right\}$$

で表わされることになる。但しここに  $r_1'$  は点  $r_1$  の鏡像点の座標を示す。

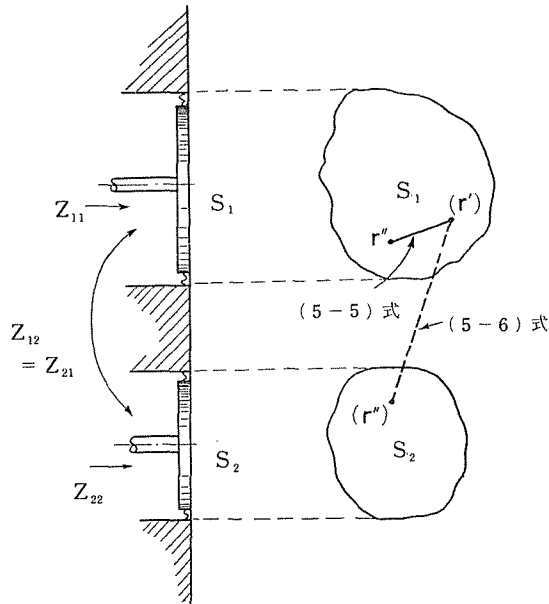
特に (5-3) において source point  $r'$  が剛バツフル上に限りなく近づくとときには,  $r'$  の鏡像点  $r''$  もまたバツフル面の反対から  $r'$  に近づいて来て, 終には  $r'$  と  $r''$  が合致する。したがって source point が剛壁上にある場合の Green 函数は (5-3) から

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jkl|r-r'|}}{|r-r'|} \dots\dots\dots(5-4)$$

となることがわかる。これは自由空間における Green 函数の値の丁度2倍である。

(5-4) を用いれば剛バツフル面上に設けられた任意の音源群に対する Z マトリックス等の伝送量が第3章の各式により計算される。つぎに例として 5-2図のような剛壁上

に設けられた二つのピストン運動面  $S_1, S_2$  の間の  $Z$  マトリックスを考えてみることにしよう。



第5-2図 剛バツフル上の二つのピストン音源

まず  $Z_{11}$  は (3-11) に (5-4) の  $G$  を代入して

$$Z_{11} = \frac{j\omega \cdot \rho}{2\pi} \iint_{S_1} \iint_{S_1} \frac{e^{jk|r'-r''|}}{|r'-r''|} dS_{r'} \cdot dS_{r''} \quad \dots\dots(5-5)$$

また  $Z_{21}, Z_{12}$  は (3-12) に (5-4) を代入し、

$$Z_{21} = Z_{12} = \iint_{S_2} \iint_{S_1} \frac{e^{jk|r'-r''|}}{|r'-r''|} dS_{r'} \cdot dS_{r''} \quad \dots\dots(5-6)$$

最後に  $Z_{22}$  は (5-5) の積分域を何れも  $S_2$  と書きかえたものに等しいことは明らかである。

(5-5) の  $Z_{11}$  は既によく論議されている剛バツフル上のピストンの輻射面に対する輻射インピーダンスの表示式であって、被積分函数は積分域内で特異点をもつけれども積分値は収斂することがたしかめられている。<sup>(\*)10</sup>(5-6) 式の積分の評価はこのような特異

(\*)10): 附録参照

性がないから更に容易である。

### 6. む す び

以上主として音響系の  $Z$  マトリックス表示について、その根本的な事項を概説したが、このような電気回路網的な表示法の利点は、着目する系に既知の音源を結んで駆動したり、それに他の音響系や機械振動系を結合して連成系振動を構成する場合の解析が、重ね合せの原理によって極めて見透し良く、しかも代数的演算だけで行うことができることで、それらの具体例については、等価電気回路の論議と共に、いずれ他日に詳しく述べたいと思う。

終りに日頃御懇篤な御指導御鞭達を賜る東京工業大学栗屋潔教授はじめ同大学電気工学教室の諸先生方ならびに電々公社電気通信研究所音響研究室長早坂寿雄博士はじめ同研究室の皆様深く感謝いたします。

本研究の大綱は昭和31年4月開催の“電気音響理論研究専門委員会”(電気通信学会ならびに日本音響学会)の議題としてとりあげていただき、多くの有益な御意見を承ることができた。御討論を賜った委員の方々に厚く御礼申しあげる次第である。

### 附 録

#### 音響系の駆動点インピーダンスの収束性に関する吟味<sup>(14),(15)</sup>

三次元の Helmholtz operator  $L$  に関する偏微分方程式、

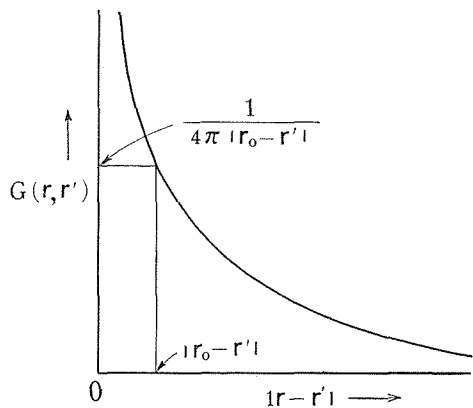
$$L[G(r, r')] = (\nabla^2 + k^2)G(r, r') = -\delta(r - r') \quad \dots\dots\dots(A-1)$$

ならびに指定された線型同次の境界条件を満足する point source 応答函数ともいべき Green 函数  $G(r, r')$  において、observation point  $r$  を source point  $r'$  に近づけると、函数の値はいくらでも大きくなるが、その大きさの程度は两点間の距離に反比例し、

$$G(r, r') \rightarrow 1/4\pi|r-r'| \quad \dots\dots\dots(A-2)$$

であることが知られている。<sup>(7),(8)</sup>(第A-1図)

(A-2) の値を用いれば任意の音響端子に対する駆動点インピーダンスの収束性がすべて吟味できる。



第A-1図 Green 函数の source point 近傍における特異性

まず点音源の場合の駆動点インピーダンスは (3-6) 式の伝達インピーダンス

$$Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega \cdot \rho \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

において  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  としたときを考えるのだから, (A-2) 式からあきらかなように, この値は無限大となる。したがって点音源的な energy の流れ口に対しては駆動点インピーダンスが存在しないのである。

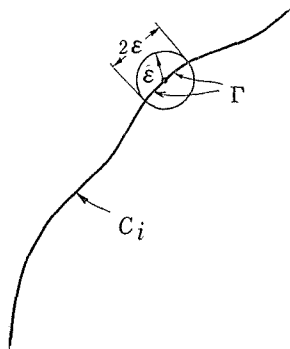
つぎに線状分布音源の場合の駆動点インピーダンスを検討しよう。系内の与えられた曲線  $C_i$  上に単位長さ当り  $\varphi_i$  の大きさに分布した容積速度をもつ, 音源 ( $C_i$ ) からみたら, 駆動点インピーダンスがもし定義できるものと仮定すれば, そのとき ( $C_i$ ) 端子の音圧代表量は本文 (2-1) を満足するようにとらねばならないから, 駆動点インピーダンスは (3-7) 式によって

$$Z_{ii} = j\omega \cdot \rho \int_{C_i} \varphi_i^*(\mathbf{r}) \int_{C_i} \varphi_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds_{r'} \cdot ds_r \quad \dots\dots\dots(A-3)$$

のような Green 関数をふくむ二重線積分で表わされることになる。右辺の二つの積分は積分領域が重なっている上に被積分函数が上記のような特異性をもつので収束に対しては疑問がある。source の分布函数  $\varphi_i$  に “区分的に連続” という仮定を与えても実際上何等の支障もないからそのようにすると, 結局問題は積分

$$I(\Gamma) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds_{r'} \quad \dots\dots\dots(A-4)$$

の収束如何にかかっていることがすぐわかる。ここに  $\Gamma$  は  $C_i$  の上に  $\mathbf{r}$  を中点として



その両側に任意に小さな長さ  $\varepsilon$  宛をとった線分<sup>(\*11)</sup>である。(第A-2図) したがってこの (A-4) にさきの (A-2) をいれると,

$$I(\Gamma) = 2 \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x} = \infty.$$

これによって線状分布音源的流れ口に対しても駆動点インピーダンスは定義し得ないことがわかる。

最後に面状分布音源の場合を考えよう。このときの駆動点インピーダンスは (3-11) 式で与えられているが, その右辺の積分の収束をたしかめるためには, 上の場合と同様分布函数  $\varphi_i$  に区分的連続性を, また分布域  $S_i$  に区分的

第A-2図  $C_i$  上にとつた微小長さの線分布

(\*11)  $C_i$  は屈折点を有限個しかもたないような即ち区分的になめらかな曲線とすれば,  $\varepsilon$  を充分小さくすることにより,  $\Gamma$  のその部分は近似的に線分とみて差し支えないことになる。

なめらかさを仮定して、結局積分

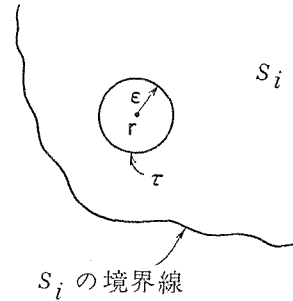
$$I(\tau) = \iint_{\tau} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS_{\mathbf{r}'} \quad \dots\dots\dots(A-5)$$

の収束をたしかめるだけでよい。ここに  $\tau$  は  $S_i$  上の一点  $\mathbf{r}$  を中心とし任意に小さい半径  $\varepsilon$  をもつ小円の部分である。(第 A-3 図)

右辺の  $G$  に (A-2) 式の値を用いれば、

$$I(\tau) = \int_0^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot (r dr) \cdot d\theta = 2\pi \cdot \varepsilon$$

となり有限値に止まるから、(3-11) 式の右辺の二重積分も収束し、したがって面分布音源的流れ口に対する駆動点インピーダンスは何等特異性をもたないことがわかる。



第A-3図  $S_i$  上にとつた小円 $\tau$

## 文 献

1. 安田：“線型機械振動系の多端子回路網的取扱い”電気通信学会雑誌 vol. 37, pp.37-42, (昭和29年2月号)
2. 安田：“機械振動系の電気的等価考察”電気通信学会雑誌, vol. 37, pp.109-113, (昭和29年2月号)
3. 安田：“機械振動系の一解析法”信州大学工学部研究報告第3号, pp. 69-81, (昭和29年3月号)
4. 安田：“機械振動系の特性のマトリックスによる表示について”電気音響理論研究専門委員会資料(電気通信学会, 日本音響学会), (昭和31年1月26日)
5. 安田：“音響系のマトリックスによる特性表現について”電気音響理論研究専門委員会資料(同上二学会), (昭和31年4月9日)
6. P.M. Morse：“Vibration and Sound”, p.416, (1948, 2nd Ed.).
7. A. Sommerfeld：“Partial Differential Equations” p.182, (1949. 英語版)
8. P.M. Morse and H. Feshbach：“Methods of Theoretical Physics” Part I, p. 791他, (1953)
9. 安田：電気三学会連合大会論文集, (昭和29年10月) [I], p.214.
10. 安田：日本音響学会研究発表会予稿, (昭和29年11月) pp.113-4.
11. 安田：同前, (昭和30年5月) pp.71-2.
12. 安田：“直六面体状容器ならびに円筒状容器内の規準振動と定常特性”信州大学工学部研究報告, 第5号, pp.93-106 (昭和30年).
13. 早坂：“音響振動論” p.73~, p. 207, (昭和23年コロナ社刊)
14. 安田：“機械的振動体の駆動点近傍における定常解の特異性について”電気音響理論研究専門委員会資料(前記二学会), (昭和31年9月)



15. 安田：“機械的振動体の駆動点インピーダンスについて” 日本音響学会雑誌，第12巻，第4号，pp.205—211(昭和31年)および信州大学工学部紀要第6号，pp.59—75，(昭和31年12月)
16. B. Friedman：“*Principles and Techniques of Applied Mathematics*” (1956), Preface.

**Summary****Impedance Matrices Representations of  
Acoustical Systems**

Tsutomu YASUDA

(Department of Communication Engineering, Faculty of Engineering)

An attempt has been made to represent the steady state characteristics of an acoustical system having  $N$  "energy ports" (the place through where the acoustical energy goes in or out). The system is regarded as equivalent to an electrical  $2N$ -terminal network. In this case each terminal pair of the network corresponds to the one of the energy ports in the acoustical system. The steady state characteristics of the system are represented in the form of an acoustic impedance matrix which is analogous to an impedance matrix representation of the electrical  $2N$ -terminal network described about. The mathematical treatment is based on the forced vibration solution of "the steady state wave equation"(Helmholtz equation). The relations between the acoustical impedance matrix and the Green function of the steady wave equation are discussed, and some formulas related to this point are obtained.