

# 機械的振動体の駆動点機械 インピーダンスについて

安 田 カ\*

信州大学工学部 通信工学教室  
(1956年10月15日受理)

## ON THE DRIVING-POINT IMPEDANCE OF MECHANICAL VIBRATORS

Tsutomu YASUDA

Department of Communication Engineering Faculty of Engineering  
(Received : October 15, 1956)

**Synopsis.** The mechanical driving-point impedance which explains the characteristics of the steady-state of mechanical vibrators is to be dealt with in this paper. When a mechanical vibrator is driven by a force changing sinusoidally with time, the driving point impedance will be defined by the ratio of the total force to the average velocity. If the equation of motion, which deals with the displacement of the steady-state of the vibrator concerned driven by a concentrated force, be solved and the solution of this condition be obtained, then the driving-point impedance would formally be calculated by such definition. But this result sometimes gives an incorrect value, for the solution with regard to a point source (Green's function or tensor on the problem) may have some singularities at the neighborhood of its source point.

The behaviors of the solutions at the neighborhood of the source points, and singularities of the driving point-impedances were considered in connection with miscellaneous vibrators, for instance, stretched strings, bars vibrating longitudinally, torsionally or laterally, stretched membranes, thin plates, stretched thin plates, etc. All of these solutions are continuous functions and driving-point impedances have not any singularity except for the case of stretched membranes.

But if we consider the case of the vibrator of an isotropic and elastic material, the driving-point impedance of such a vibrator with a point source

---

\* 信州大学助手

terminals or a line or curve source terminals has serious singularities because of those of the Green's tensor of elastic waves at its source point, and its value will be equal to zero.

## 1 は し が き

音響機器，機械的共振子，機械的濾波器その他種々の機械的振動系の解析には，機械インピーダンスとか  $Y$  マトリックスのような電気回路網に使用されている量を導入すると，二つ以上の素子を組合せたときの連成振動特性や，振動伝達特性を求めるのに，いちいち面倒な境界条件で微分方程式を解かないでも，回路計算に類似の方法で代数的な解析ができるなどの利点がある。早坂博士は分布定数的な振動体に回路網的な概念を導入し種々の振動体について具体的且詳細に定常特性量を求めて居られるが，それらの結果は分布定数的な振動体を主要部にもつような連成振動系や振動伝達系の解析にも利用できることが知られている。ところで分布定数的な振動体について実際にこのような特性量を計算するときには，振動体の規準函数展開式の形で表わすのが便利であるから，多くの場合それによるが，ここで注意しなければならないことはその展開式の収束の問題である。それが収束しない場合には展開式は無意味になるから，その有限項の和を計算して近似値とすることは勿論誤である。しかしながら，与えられた特性量の規準函数展開式について直接その収束を判別するのは困難なことが多く，またいちいち個々の展開式についてそれを行うのは面倒でもある。

次節にのべるように展開式に特異性が現れるのは主として力の作用点における力と速度の比，すなわち表題の“駆動点インピーダンス”を考えるとときであるから，本文ではまずこの量の定義を明確に下し，振動体の定常解との関係をつけ，つづいて各種の振動体についてその上に設けた集中力を受ける端子や分布力を受ける端子に対する駆動点インピーダンスの値が上述のような特異性をもつかどうかをいちいち検討した。

## 2 駆動点機械インピーダンス<sup>(8)</sup>

### 2-1 駆動点機械インピーダンスの定義

与えられた振動体上の一点  $r$  に，正弦的な時間変化をするような集中駆動力を加えたとき，その駆動力の大きさと位相を代表する複素量  $F$  とその力によって振動体の着力点に起る速度の駆動力方向の成分  $v$  との比

$$Z = F/v \quad (2-1)$$

を考え，この値を力—電圧，速度—電流式対応法による電気回路の用語を流用して，与えられた振動体の点  $r$  からみた（与えられた方向の）点集中力端子 に対する 駆動点機械インピーダンス と呼ぶことにする。

この用語で表される量を分布力を受ける場合に拡張するためには次のようになかなり強い条件をつけなければならない。すなわち力と速度の振巾位相がそれぞれ唯一個の複素

数で完全に代表させ得ることが必要で、それをみたく場合にかぎり、電気回路における端子と同様な取扱いができるようになるのである。この条件は力の分布形があらかじめわかっているときには充分満たされる。すなわちいま力の加えられている領域を  $D$  とし、また力の分布形を規定する函数が前もって与えられ、平均値が1であるような分布函数  $\varphi(\mathbf{r})$  になっているものとすれば、 $D$  における力と速度の振巾位相代表量  $F, v$  はそれぞれ次の値をとればよい。

- (a) 実際に  $D$  内に加えられている駆動力の積分値(合力)を  $F$  とする。
- (b) 実際に生じている速度の力方向成分  $v_f(\mathbf{r})$  に力の分布函数  $\varphi(\mathbf{r})$  をかけて  $D$  内に平均した値を  $v$  とする。すなわち、

$$v = \frac{1}{D} \int_D \varphi(\mathbf{r}) v_f(\mathbf{r}) dD_r \quad (2-2)$$

このように  $F, v$  を定義することにより、 $D$  から振動体に流入する実際の力学的 power  $P$  が回路網と同一形式すなわち

$$P = (1/2) (Fv^* + F^*v) \quad (2-3)$$

で一意的に表わされるようにもなるし、(2-1) 式のようにこれら  $F, v$  の比によって分布力を受ける端子  $D$  からみた駆動点機械インピーダンスが明確に定義されるのである。

ここに述べたことからあきらかなように、本文に現れる駆動点の語は回路網理論における同じ用語(driving point)の意義にしたがったものであって、その点は回路網内の特定位置を指定する意味であるから、必しも力の作用する場所  $D$  の空間的ひろがりには一致しない。たとえば  $D$  が二次元の曲面で与えられているときにも駆動点の語を用いるのである。

力の加わる領域  $D$  としては振動体上の線、面、ならびに体積さらにはそれらの集まりのいずれであっても上のような条件さえ満足するならば(2-1) 式のような比で駆動点機械インピーダンスが定義できるのである。とくに  $D$  の空間的ひろがりを縮小してゆき、最後に唯<sup>(9)</sup>一点に集中すれば、 $F$  は点集中力(通常このような特別な分布は Dirac のデルタ函数によって表される。)となり、また  $v$  は  $F$  の着力点の線速度そのものになるから、この場合の駆動点機械インピーダンスは、はじめに(2-1) 式で定義したものと全く同一になる。

もし以上の条件をみたくような力学的 power の流れ口(端子)が振動体上にいくつも設けられているときには、それら各個所の間に成り立つ力と速度の関係は、丁度多端子電気回路網の場合のように、 $Y$  マトリックスまたは  $Z$  マトリックスその他の特性表現量で完全に記述することができる<sup>(8)</sup>。上に導入定義した駆動点機械インピーダンスは、丁度この場合の  $Y$  マトリックスの対角線要素の逆数に相等するものであるから、 $Y$  マトリックスの逆マトリックスであるところの  $Z$  マトリックスのほとんどの要素は上の駆動点機械インピーダンスと密接な関連があることになる。

## 2-2 運動方程式の定常解との関係

振動体がある上の任意点に正弦的時間変化をする単位集中駆動力を受けるときに、その定常変位分布を支配する運動方程式が解けるならば、任意の分布力に対する駆動点機械インピーダンスは上の定義により単位集中力に対する定常解から形式的に導くことができる。

たとえば任意の外力分布  $f(\mathbf{r})$  に対する振動体の定常変位分布  $s(\mathbf{r})$  が次のような形のスカラー値の微分方程式で記述できるものとする。

$$[L + \omega^2 \rho] s(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \quad (2-4)^{(*1)}$$

ここに  $L$  は振動体の種類や与えられた条件によってきまる線型微分演算子、 $\omega$  は角周波数、 $\rho$  は密度を表すものとする。

もしこのとき外力が集中力であるとすれば、Dirac のデルタ関数  $\delta$  を用いて

$$f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

のように表わすと便利である。ここに  $\mathbf{r}'$  は集中力の作用点である。こうしたときの微分方程式 (2-4) の解を、特に  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を書くならば、それは方程式

$$[L + \omega^2 \rho] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2-5)$$

の解で、 $\mathbf{r}'$  に加えられた単位の点集中力に対する任意点  $\mathbf{r}$  における変位を表すものに他ならない。

Green 函数に関する理論によれば、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  がわかった場合には (2-4) 式の解は

$$s(\mathbf{r}) = \int_D f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD_{\mathbf{r}'} \quad (2-6)$$

のような積分で与えられることが知られている。この式の右辺の積分は力の作用する範囲すなわち  $D$  の全体について行われるものとする。とくに積分変数が  $\mathbf{r}'$  であることに注意すべきであり、微分  $dD_{\mathbf{r}'}$  の添字  $\mathbf{r}'$  はそれを示すものである。

上に用いた単位集中力に対する応答函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は source point を  $\mathbf{r}'$  とし observing point を  $\mathbf{r}$  とする振動系の Green 函数として知られているもので、とくにこの函数が  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  のときの極限值が有限確定値に止まるような場合のみ、 $\mathbf{r}'$  からみたこの振動体の（点集中力に対する）駆動点機械インピーダンスが定義でき、その値を  $Z(\mathbf{r}')$  で表せば

- 
- \* 1) 一般には外力や変位は共にベクトルとしての取扱いがなされねばならないが、前もって力や速度の方向がきまっているような簡単な振動体の問題では、それらの着目する方向成分たるスカラー量  $f, s$  間の方程式がよく用いられる。
- \* 2) 以下すべて変位や力の時間函数部分  $\exp(j\omega t)$  は記さないことにする。したがって本文に現れる力や変位は正弦的時間的变化をする場合の振巾と位相を代表する部分を考えているとみてよい。之は回路網の取扱いでは極く当り前のことである。

$$Z^{-1}(\mathbf{r}') = j\omega \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2-7)$$

となる。しかし残念なことにこの式の右辺の値は常に有限確定値に収束するとは限らない。勿論無損失振動体としての取扱いをした場合にはその共振周波数が  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の極になるが、後述の証明であきらかになるように、特別な振動体では任意の周波数でつねに (2-7) 式右辺の極限値が無限大になるようなものがある。

次に分布力を受ける場合の駆動点機械インピーダンスを函数  $G$  によって表してみよう。力の分布を前にのべたような分布函数  $\varphi(\mathbf{r})$  を用いて表すには

$$f(\mathbf{r}) = F \varphi(\mathbf{r}) / D$$

とすればよい。ここに  $F$  は  $D$  に加わる力の合計値すなわち合力であり、之が  $D$  における力の振巾位相を代表する。この  $f(\mathbf{r})$  を (2-6) 式に代入し、更に  $j\omega$  をかけたものが速度の実際の分布  $v_f(\mathbf{r})$  を与える。

$$v_f(\mathbf{r}) = j\omega s(\mathbf{r}) = j\omega \frac{F}{D} \int_D \varphi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD_{\mathbf{r}'}$$

この結果を (2-2) 式に入れれば  $D$  における速度の振巾位相代表量  $v$  が求まり、 $F$  と  $v$  との比を考えれば直ちに  $D$  から見た駆動点機械インピーダンス  $Z(D)$  がつぎのように与えられることになる。

$$Z^{-1}(D) = j\omega \frac{1}{D^2} \int_D \varphi(\mathbf{r}) \int_D \varphi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD_{\mathbf{r}} dD_{\mathbf{r}'} \quad (2-8)$$

このような二重積分は音響ふく射体のふく射インピーダンスの計算に現れるものとよく似ている。<sup>(12), (13)</sup> そのときにも問題であったように、この二重積分はその積分領域が共に  $D$  で重なっているため、その領域内に  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  の点を無数にもっているから、 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  のときの  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  が特異な値を持つ場合には積分の収束に対してとくに注意せねばならない。ところでこの判定はつぎに示すように形式化しておく大変便利である。

(2-8) 式右辺において  $\mathbf{r}$  を任意に固定し、 $\mathbf{r}'$  についての積分をまず考えることにすると、この始の積分さえ収束すれば勿論二重積分も収束する。そこで積分領域  $D$  を  $\mathbf{r}$  のまわりの極めて小さな部分 ( $\varepsilon$  近傍)  $D(\varepsilon)$  と、その他の部分  $D'$  とにわけてみると、 $\varphi$  が連続函数であるとすれば  $D'$  の内部では被積分函数  $\varphi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は連続と考えられるからその部分における積分の収束は問題がないことになる。次に  $D(\varepsilon)$  の内部では  $\varphi(\mathbf{r}')$  はその連続性によりほとんど  $\varphi(\mathbf{r})$  に等しいから、それは定数とみて積分の外に出すことができる。したがって (2-8) 式右辺の積分の収束発散の判定を行う代りに、それを積分

$$I_\varepsilon(\mathbf{r}) = \int_{D(\varepsilon)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD_{\mathbf{r}'} \quad (2-9)$$

について行えばよいことになる。ここに積分範囲  $D(\epsilon)$  は  $D$  と同じ次元をもつ  $r$  の任意近傍であり、その周辺の形は自由に選ぶことができる。たとえば面分布力を受ける場合には  $D(\epsilon)$  として  $r$  を中心とする半径  $\epsilon$  の円の部分を考えればよいのである。(2-9) 式は分布力を受けるときの特異性判定に極めて便利なものであって、のちによく用いられる。

### 2-3 駆動点機械インピーダンスが特異性をもつときに生じる解析上の不都合

以上のように定義された振動体の駆動点機械インピーダンスは、振動体を任意の振巾位相で定常駆動した場合の駆動力と速度の関係をはっきりつけたものであるから、そのうち何れかを知って他を求める場合に極めて有用であるばかりでなく、次のように連成振動の解析にも利用できるのである。すなわちいま駆動点機械インピーダンスがそれぞれ  $Z_a, Z_b$  であるような二つの振動体 A, B を結合してできる連成振動系の共振周波数は

$$Z_a^{-1} + Z_b^{-1} = 0 \quad \text{または} \quad Z_a + Z_b = 0 \quad (2-10)$$

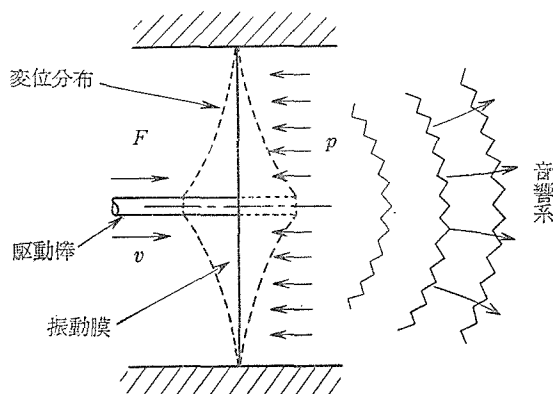
によって求められる。<sup>(4), (5)</sup>

さらに振動体上に power 流れ口(端子)が二つ以上ある場合には、それらの口からみた振動体の定常特性は  $Y$  または  $Z$  マトリックスによって記述されることになり、それらの各要素は、若し振動体の運動方程式の定常解<sup>(8)</sup>が求められているときには前項 2-2 のやり方に準じて容易に計算することができる。そしてそれらのマトリックスによって振動体の振動伝達特性や、他の振動体との連成振動の諸特性も解析することが可能になる。

しかしながら前項 2-2 で注意したように、運動方程式の解から求めた駆動点機械インピーダンスには時として特異性(その値が周波数に関係なく常に零となるなど)が生じることがあり、このような場合には上述のような解析のほとんどが実際問題からは程遠い、意味のないものになってしまうから、問題設定に当って採用すべき運動方程式や力の分布形の仮定等には充分注意することが必要である。

具体的な例を次に示そう。

いま第 1 図のように、引張られた円形振動膜の片側の中心部に細い棒の先端を接着し、膜の他の側には一様な強さの音圧  $p$  で音響系と接しているものとする。膜の振動を支配している運動方程式としては二次元の波動方程式を採用し、また棒の先端における駆動力を点集中力とみなすならば、後述の評価によって明ら



第 1 図 細い棒で駆動される振動膜

かなように、棒側からみた膜の駆動点機械インピーダンスの値は（それを波動方程式の解から導くかぎり周波数に関係なく常に）零に等しいという結果を得る。したがって棒を任意の振巾で駆動しても、その先端には膜から何等の抵抗力も受けないことになり、また若干の考察によりこのときには音響系の方にも全く作用が伝達されないこともわかる。このような奇妙な解析結果に到達してしまった原因は、問題設定に際してたてた仮定のうち、次の二点の何れかが不適当だったことによるのであって、そのうちひとつを適当に修正することによって、もっと合理的な解析ができるようになるのである。

(i) 採用した運動方程式（上例では二次元の波動方程式）が与えられた振動体の運動を記述するに適當かどうか。

(ii) 駆動点における力の分布の形（上例では棒の先端における力は点集中力と考えた）が実際の状態に適合するように仮定されているかどうか。

上例では(i)の点を修正するには膜面の曲げスティフネスを考慮に入れた方程式 (3-9) を採用することでなされるし、また(ii)の点の修正には力の分布を棒の先端の太さや形状を考えて適当な線状分布または面状分布力としてみることによってなされ、之等二つの修正のうち何れかひとつを実施すればかなり合理的な解析がなされると思われる。

早坂博士によって導入されたところの、振動体の振動伝達特性を表す誘起々振力、変成比ならびに音響ふく射体に対する有効面積<sup>(1)</sup>（率）等の量は、いずれも振動体の音響工学的特性の表現量として極めて便利なものであるが、それらはすべて受動端子に対する上記のような駆動点機械インピーダンスを因数として含んでいるため、解析に採用した運動方程式によっては、また端子として取扱うときの力の分布形の仮定の仕方によっては、それらの値が零となってしまうこともあるので注意が必要である。

同じような注意は電歪または磁歪による分布定数的な電気—機械変換器（Electro-Mechanical Transducer）の解析に際しても必要になる。いま電歪または磁歪を起すような材料からつくられた振動体上に、外部に機械的振動を導き出すための機械的端子を設け、電気側端子に加えた電氣的 power を機械的 power として取出す場合を考えるのであるが、このような変換器においては電気側端子と機械側端子のつながりを表すのに力係数なる量がよく用いられる。そこでこのときの力係数を普通に行われているように“機械側端子を拘束(速度零)した状態で電気側端子に単位電流を流した場合に機械側端子に起きる拘束力”であると定義することにすれば、若し機械側端子からみたこの変換器の機械振動体としての駆動点インピーダンスが零になるときは上のように定義された力係数も零になってしまうことが容易にわかる。次節末尾に述べるように変換器を構成している材料を弾性振動体とみなす限り、その上に設けた点集中力または線状分布力を受ける機械端子からみた駆動点機械インピーダンスは零になるから、合理的な結論を出すためには機械的端子における力の分布を面分布または体積分布と考えねばならないのである。

### 3 種々の振動体に対する吟味

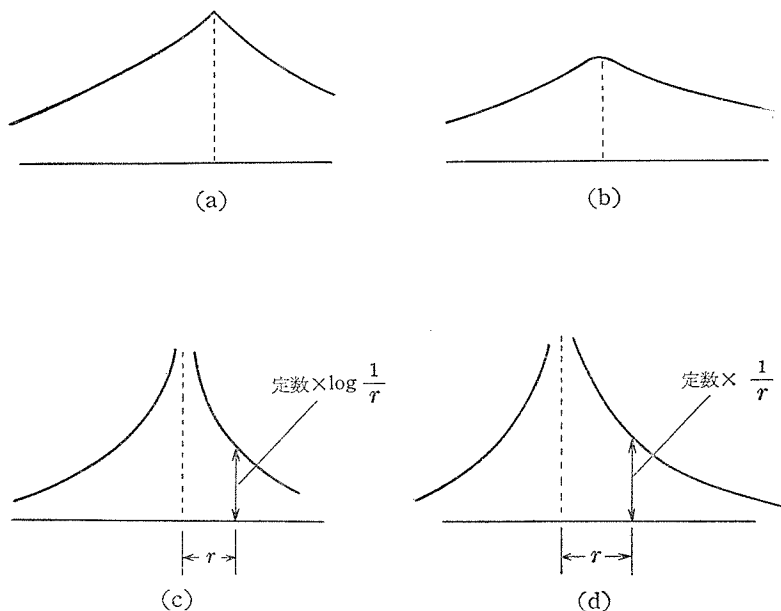
本節では音響工学上でしばしば現れるような代表的な振動体について、それらの解析に通常よく用いられている運動方程式の点集中力に対する定常解を、特に駆動力の作用点の近くに注目して評価し、集中力または分布力に対する駆動点機械インピーダンスの特異性の有無を調べてみた。

#### 3-1 弦の横振動，棒のたて振動及び振り振動

之等の振動は通常一次元の波動方程式にしたがうものとして解析が行われている。たとえば張力  $T$  で引張られた、単位長当りの密度が  $\rho$  の弦の強制定常振動の変位は、(2-4), (2-5) 両式における微分演算子  $L$  として  $T(d^2/dx^2)$  を用いたもので表すのが普通である。すなわち、弦上の点  $x'$  に単位集中駆動力が加えられた場合の変位は、

$$\left[ T \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \rho \right] G(x, x') = -\delta(x-x') \quad (3-1)$$

の解として与えられる。



第2図 各種振動体の集中力に対する定常解の駆動点近傍における様相

- (a) 弦の横振動，棒のたて振動と振り振動
- (b) 薄板の曲げ振動，棒のたわみ振動，曲げステイフネスを考えた弦または膜の横振動
- (c) 膜の横振動
- (d) 等方性材質から成る弾性振動体



一次元の波動方程式の Green 関数の性質としてよく知られているように、(3-1) 式の解  $G(x, x')$  は集中力の作用点  $x'$  においてその微係数に  $-1/T$  だけの“とび”があるような連続関数で与えられるから、駆動点機械インピーダンスをこの解から求めるとしても（駆動点における力の分布が点集中、線分布の何れであっても）その値には心配されたような特異性がないのである。（第2図(a)）

棒のたて振動及び捩り振動についても弦の場合と全く同様なことが言える。

上の議論は  $T$  や  $\rho$  が場所  $x$  の関数であってもそのまま成り立つから、棒の太さや密度、断面形などが長さ方向に（連続的に）変化するときにも駆動点機械インピーダンスに関する上の結論には変りがない。

### 3-2 膜の横振動

張力  $T$  で強く引張られた膜の振動は、方程式 (2-4), (2-5) の左辺の微分演算子  $L$  を二次元のラプラシアン演算子の  $T$  倍とした運動方程式で表すのが普通である。すなわち単位集中力を  $\mathbf{r}'$  に受けるときの変位は、(2-4) 式から得られる

$$[T\nabla^2 + \omega^2\rho]G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (3-2)$$

の解として与えられることになる。

二次元の波動方程式の Green 関数に関する知識<sup>(14)</sup>によれば、(3-2) の解  $G$  は駆動点  $\mathbf{r}'$  に充分近い半径  $r(=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$  のところでは大体

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \doteq \frac{1}{2\pi T} \log \frac{1}{r} \quad (3-3)$$

になることがわかる（第2図C）。したがって集中力に対する駆動点機械インピーダンスの値を (2-7), (3-3) 両式の結果から求めれば零になってしまう。

次に分布力を受ける端子について考えることにしよう。(3-3) の結果を (2-9) 式に代入し、 $D(\varepsilon)$  としては線分布ならば  $\mathbf{r}$  を中点とする長さ  $2\varepsilon$  の線分を、また面分布ならば  $\mathbf{r}$  を中心とする半径  $2\varepsilon$  の円内の面にとれば、何れの場合にも積分  $I_\varepsilon(\mathbf{r})$  が収束し、したがって駆動点機械インピーダンスは分布力端子に対しては特異性がないことがわかる。

早坂博士は円形膜について種々の音圧伝達特性を解析して居られるが<sup>(15)</sup>、そこではすべてここでいう線（同心円周）分布力または面（同心円内部）分布力を受ける端子についてだけが述べられているのだから、得られた諸結果には何等の矛盾が起らないが、それらの結果を（力の分布する円の半径を零に近づくなどの操作によって）中心からみた駆動点機械インピーダンス等の計算に流用することはできない。

### 3-3 棒のたわみ振動

運動方程式は (2-4), (2-5) 両式における  $L$  として  $-K(d^2/dx^2)$  ( $I(x)d^2/dx^2$ ) を用いたものとなる。ただしここに  $K$  は定数で、 $I(x)$  は断面の中立軸に関する面積二次モーメントである。 $I(x)$  も密度分布  $\rho$  も共に  $x$  の連続関数であるとすれば、一次元の波動方程式に対する Green 関数の特異性を調べるときのように、(2-5) 式から得られる

単位集中力に対する変位の式

$$[-K(d^2/dx^2)\{I(x)d^2/dx^2\} + \omega^2\rho] G(x, x') = -\delta(x-x') \quad (3-4)$$

の両辺を  $x'$  を中点とする長さ  $2\varepsilon$  の線分上に積分し、そのとき左辺第2項の積分を第1項に比べて充分小であるとして省略すれば、一次元の波動方程式の場合に相等して今度は  $d^2G/dx^2$  の値が  $x=x'$  において（その微係数には有限のとびがあるが）連続であることがわかる。これから棒の変位曲線  $G$  は  $x=x'$  でもなめらかなものであることが明らかである。（第2図(b)）

故に“棒のたわみ振動では集中、分布何れの駆動力に対してもその駆動点機械インピーダンスに特異性がない”ことがわかった。

### 3-4 薄板の曲げ振動

運動方程式には通常 (2-4), (2-5) 両式の  $L$  を  $-K\nabla^4 = -K\nabla^2 \cdot \nabla^2$  としたものが採用される。ここに  $K$  は材料や厚さ等によってきまる定数で、 $\nabla^2$  は二次元のラプラシアン演算子である。

二次元の波動方程式における Green 函数が source point で示す特異性を吟味するやり方に準じて、単位集中力に対する変位の式

$$(-K\nabla^2 \cdot \nabla^2 + \omega^2\rho) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (3-5)$$

の両辺を着力点  $\mathbf{r}'$  を中心とする半径  $r$  の充分小さな円内に面積々分し、左辺第2項の積分を省略すれば、膜の場合の (3-3) 式に相等する次の結果が得られる。

$$[-\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=r} \doteq (1/2\pi K) \log r^{-1} \quad (3-6)$$

この式の両辺をさらに半径  $r'$  の小さい円内に積分すると、左辺の積分は周辺上の線積分に変換されて次のように評価される。

$$-\int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} G \right]_{r'} r' d\theta = -2\pi r' \left[ \frac{\partial}{\partial r} G \right]_{r'}$$

この式において  $[ ]$  の外につけた  $r'$  は  $r=r'$  (周辺上) のときの値であることを示し、また特に最後の結果は半径  $r'$  の円周上を通じての平均値を示すものである。一方 (3-6) の右辺の積分は次のようになる。

$$-\frac{1}{2\pi K} \int_0^{r'} (\log r) 2\pi r dr = -\frac{r'^2}{2K} \left[ \log r' - \frac{1}{2} \right]$$

したがって以上得られた結果を等号で結び、両辺を  $-2\pi r'$  で割れば微分方程式

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} G \right]_{r'} = \frac{r'}{4\pi K} \left( \log r' - \frac{1}{2} \right) \quad (3-7)$$

が得られる。右辺の値は  $r' \rightarrow 0$  とした場合に零に近づくことが明らかで、また左辺

は半径  $r'$  の円周上の平均値を示すものであることに注意すれば、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  が source point  $\mathbf{r}'$  の近傍でなめらかな曲面を与えていることがわかる (第2図(b))。

故に, “集中, 分布何れの駆動力に対しても, 曲げ振動をする薄板の駆動点機械インピーダンスの値は特異性がない” のである。

### 3-5 曲げスティフネスのある膜の横振動

曲げに対するスティフネスの効果を考えに入れた場合の, 引張られた膜の横振動に対する運動方程式は, (2-4, 5) 両式の  $L$  を次のようにしたもので与えられる。<sup>(16), (17)</sup>

$$L = -K_1 \nabla^2 \varphi^2 + K_2 \varphi^2 \quad (3-8)$$

ここに  $K_1, K_2$  は膜面の張力や厚み, 材質などによってきまる定数である。この演算子を用いた場合には, 単位集中力を  $\mathbf{r}'$  に受けたときの振動変位は (2-5) 式により,

$$[-K_1 \nabla^2 \varphi^2 + K_2 \varphi^2 + \omega^2 \rho] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3-9)$$

の形で表わされることになるが, この式の両辺を, source point  $\mathbf{r}'$  を中心とする半径  $r$  の小さな円内に積分すると, 右辺はデルタ函数の性質により  $-1$  になり, また右辺の最終項は  $r$  を充分小さくすることによりその積分値を他の二項のそれに比べて充分省略できると考えられる。更に右辺の  $\nabla^2$  のかかった二つの項はその積分を周辺の線積分に変換でき,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^r \nabla^2 (-K_1 \nabla^2 \varphi^2 + K_2) G r d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (-K_2 \nabla^2 \varphi^2 + K_2) G \right] r d\theta \\ &= 2\pi r \frac{\partial}{\partial r} [(-K_1 \nabla^2 + K_2) G] \end{aligned}$$

之を  $-1$  に等しいとおいて得られる微分方程式の両辺を  $(-2\pi K_1 r)$  で割り, 両辺を更に  $r$  で不定積分すれば次のような方程式を得る。

$$\left[ \nabla^2 - \frac{K_2}{K_1} \right] G = \frac{1}{2\pi K_1} \log r + \text{定数} \quad (3-10)$$

この式を薄板の曲げ振動の場合に現れた式 (3-6) と比較すると, 左辺両辺に夫々第二項が余計についていることが異っている。次に (3-10) 式の両辺を半径  $r'$  の極めて小さな円の内部に面積々分するのであるが, 左辺両辺の各第二項の積分は  $r'$  を充分小さくすることによっていくらでも小さくできるものと考えられるから, あとは薄板の場合と全く同様に評価され, この場合の解  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  の点においてもなめらかな面になっていることがわかる。(第2図(b))

したがって “曲げスティフネスの効果を考慮に入れた式によって求めた振動膜の駆動点機械インピーダンスは, 駆動力の分布形如何にかかわらず常に特異性をもたない” ことがわかる。

弦の横振動の問題でも、若し運動方程式として曲げのステイフネスを考慮に入れたもの<sup>(18)</sup>を用いることにすれば、その解は丁度棒のたわみ振動の場合と同じように source point でもなめらかな曲線として与えられることが、丁度上の膜の場合のようにして容易に確かめることができる。

### 3-6 等方性無損失材料から成る振動体

三次元的ひろがりを持つ振動体の一般的取扱は、これまでの簡単な振動体と異ってベクトル的な考慮をしなければならなくなるから少し面倒になる。即ち運動方程式は (2-4, 5) 両式のようなものでなく、両辺をベクトル表示したものが用いられる。

いま等方性無損失材質から成る機械的振動体の一点  $\mathbf{r}'$  に  $+x$  方向の単位集中力を受けているとき、運動変位の分布を示す (ベクトル値の) 函数  $\mathbf{G}_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は次のような運動方程式にしたがうものと見られる。

$$[(\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \nabla^2 + \omega^2 \rho] \mathbf{G}_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\mathbf{a}_x \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3-11)$$

ただしここに  $\lambda, \mu$  は Lame 常数,  $\rho$  は密度,  $\mathbf{a}_x$  は  $x$  方向の単位ベクトル,  $\delta$  は三次元のデルタ函数である。この式と境界条件を満足するような函数  $\mathbf{G}_x$  は Green のテンソル (diadic) 函数の  $x$  成分ベクトルで  $y$  方向,  $z$  方向の力に対しても全く同様な方程式が書ける。前項までの各種振動体について行って来たように、直接 (3-11) 式の両辺を source point  $\mathbf{r}'$  のまわりに積分評価してゆくことは難しいが、駆動点機械インピーダンスの特異性だけについては次のような事実によって別途解決の方法がある。すなわち当面の問題は、source point  $\mathbf{r}'$  の極く近くにおける (3-11) 式の解  $\mathbf{G}_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の有様が知りたいだけだから source point を振動体の内部にとることにより、境界条件は解の特異性にはほとんど影響がないものとみなせるようになる。したがって逆に、ある特別の境界条件を満足するような (3-11) 式の解が完全に求められるならば、任意の境界条件に対するその式の解も全く同様な特異性を持たねばならぬことになる。故にここでは最も簡単な境界条件のもとに (3-11) 式の解を求めて、その特異性を検討してみようと思う。

媒質が無限のひろがりに充滿している場合について、Lord Rayleigh は (3-11) 式と類似の問題<sup>(21)</sup>についての解析を行っているが完全解の記述がない。そこでそれを計算<sup>(22)</sup>してみた結果、 $\mathbf{G}_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の  $x$  方向成分  $G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は次式で表せることがわかった。

$$\begin{aligned} G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{e^{-jk_1 r}}{(\lambda + 2\mu)(k_1 r)^3} \{ (jk_1 r + 1) \right. \\ & + \frac{\xi^2}{r^2} [(k_1 r)^2 - 3jk_1 r - 3] \} \\ & + \frac{e^{-jk_2 r}}{\mu(k_2 r)^3} \left\{ \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) [(k_2 r)^2 - 3jk_2 r - 3] \right. \\ & \left. \left. + 2(jk_2 r + 1) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3-12)$$

他の成分についても計算は行われているが、ここでは力の作用する方向の成分だけが問題になるのだから特に記さない。この式の右辺において、 $k_1^2 = \omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu)$ ,  $k_2^2 = \omega^2 \rho /$

$\mu$ , であって, また  $r, \xi$  は駆動点  $r'$  と観測点  $r$  の座標を夫々  $r' (x', y', z')$ ,  $r = (x, y, z)$  とするとき

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}},$$

$$\xi = x - x'$$

を示すものとする。

(3-12) 式は任意の点  $r$  における  $x$  方向変位を表す一般式であるが, 特に source point  $r'$  の極く近くだけを考えるにはもっと簡単な式に直してからの方が都合がよい。(3-12) 式の右辺に  $(k_1 r), (k_2 r) \rightarrow 0$  の極限操作を施せば,  $G_{xx}$  の極限值として次のような結果が得られる。

$$\lim_{k_1 r, k_2 r \rightarrow 0} G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[ (\lambda+3\mu) \frac{1}{r} + (\lambda+\mu) \frac{\xi^2}{r^3} \right] \quad (3-13)$$

この結果は Love 氏の著書に記載されている静的な弾性変形の場合の解に全く等しい。<sup>(23)</sup>

いま  $r'$  を中心とする半径  $r$  の球面上において  $G_{xx}$  がどのような大きさで分布しているかをしらべてみると, それは  $x$  軸に平行な直径を軸とする対称形に分布し,  $+x$  の向きを  $\theta = 0$  にとったとき

$$\left| G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=r} = K \left[ 1 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \cos^2 \theta \right] \frac{1}{r} \quad (3-14)$$

( $K$ は定数)

の形に分布していることがわかる。右辺〔 〕内の値の  $\theta$  に対する変化は, その最大最小両値のひらきは二倍とへだたっていないから, したがって次の結論が直ちに得られることになる。

“点集中力による振動体の変位振巾は source point の近くでは略々 そこからの距離に反比例した程度になり, 駆動点機械インピーダンスは零ということになる” (第2図(b))。

分布力を受ける端子に対する特異性の判定には, (2-9) 式における  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の代りに  $1/r = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  を代入して積分を評価してみればよい。そのとき積分領域  $D(\epsilon)$  としては, 線分布力ならば  $r'$  を中点とする長さ  $2\epsilon$  だけの線分を, また面分布力を受けるものでは  $r'$  を中心とする半径  $\epsilon$  の円内の部分を, さらに容積分布力のときには  $r'$  を中心とする半径  $\epsilon$  の球の内部を考えればよい。之等の積分の評価は極めて簡単で, 線分布の場合だけは発散し, 他の二つの場合には有限値に止まることがわかる。故に“線分布力を受ける端子の駆動点機械インピーダンスは零となり, 面分布力または容積分布力を受けるときのその値には特異性がない”ことがわかった。

## 4 考 察

前節で検討されたところの、各種振動体における、集中駆動力に対する定常解の駆動点近傍での有様や、種々の端子に対する駆動点機械インピーダンスの特異性についての結果を、一括表示すれば第1表のようになる。この表によって一覧できるように、通常よく現れる簡単な振動体のうちで駆動点機械インピーダンスに特異性が生じるのは膜の点集中駆動の場合だけであって、著者が始に予想した程の危険は案外起らないことがわかったが、最下欄の結果はかなり重大であると思う。即ち近年音響技術の発達により、棒や板のようなものばかりでなく、たて、横、高さの各寸法の差が甚しくないような、いわば三次元の空間的ひろがりを持つ振動体が、変換器その他の音響機器の要素として採用され始めるような状況にあるが、このような振動体の回路網的取扱いにおいては、力の分布形について充分の考慮が必要であることをその結果は指摘している。

第1表の各欄を最下欄と比較することは甚だ意義がある。すなわち棒のたわみ振動において、形式的には点集中力と考えている場合にも、実際の外力は棒の断面に適当に分布して加えられているのだから、棒をその太さを考慮にいれて三次元の弾性振動体と考えるときには前者の点集中力は後者の面分布力に相等し、何れの場合にも駆動点機械インピーダンスの値に特異性がないことでは一致するのである。ところで薄板の曲げ振動における点集中外力は、薄板の厚みを考えて三次元弾性体としてみたときには、厚み方向に板を貫通する線分上の線分布力とみられるが、第1表によれば板とすればよいが三次元振動体とすれば線分布力に対する駆動点機械インピーダンスの値は零となってしまう。この食い違いは薄板の運動方程式 (3-5) は板の厚み方向の伸縮が起きないという見解によって作られたものだからであり、実際問題では真の点集中力が起らないことと相まって、その式が実際問題の解析によく役立っているのである。この厚み方向の伸縮の点についてはたわみ振動棒についても同断である。

本文の駆動点機械インピーダンス等は力が並進力で速度が線速度の場合について定義され、説明、検討がなされて来たが、力と速度の対としては他に、モーメントと角変位速度<sup>(7),(24)</sup>、音圧(力の面密度)と排除容積速度<sup>(4),(5)</sup>等をとることもできる。後者は本文の面分布力の場合と大体同一であるが、前者は本文の点集中力の場合よりも駆動点機械インピーダンスの点では特異性を生じやすいものであるから余計に注意が必要になる。たわみ振動棒に関しては近野正氏が述べて居られるように<sup>(6)</sup>、またさらに一般振動体については筆者があきらかにしたように<sup>(24)</sup>、一点に集中したモーメントを受ける場合の駆動点機械インピーダンスは、点集中力に対する変位分布の式を二度微分したものから計算されるから、その変位分布が source point で尖っているような振動体すなわち、弦、膜ならびに第1表最下欄の振動体では集中モーメントに対する駆動点機械インピーダンスは零になってしまうのである。之等を除いた第1表の各種振動体は集中力に対する解が source point でなめらかな曲線または曲面になっているからこのような心配はいらないのである。

最後に駆動点機械インピーダンスを実際に数値計算する場合によく用いられる規準函

数展開式について考えてみることにする。着目する振動体の固有振動が解かれて規準函数や規準振動数がすべて求められているときには、之等の項で駆動点機械インピーダンスを表すことができる。たとえば  $\mathbf{r}'$  に設けられた点集中力端子からみたそれは (2-7) の右辺を展開した形

$$Z^{-1}(\mathbf{r}') = j\omega \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} \sum_m \frac{E_m(\mathbf{r}) E_m(\mathbf{r}')}{(\omega_m^2 - \omega^2) M} \quad (4-1)$$

で表わされる筈である。<sup>(8)</sup>ただしここに振動体は無損失であり、 $E_m$  は振動体の第  $m$  規準振動の規準函数、 $\omega_m$  はその規準振動数、 $M$  は全質量である。この式の右辺の級数の和が  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  としたときに一定確定値に収束するかどうかはわからない。この式を用いて  $Z(\mathbf{r}')$  の数値計算を行うことが自信を以てできない筈である。本文によれば通常用いられるような簡単な振動体については大体第1表に示すようになっているから、この表の×印のところを除いては上の (4-1) 式のような規準函数展開式を用いてよいのである。(2-3)第1図のような問題で、棒の先端の力の分布を点集中力とみたときには勿論上の (4-1) 式右辺の級数が発散することになるが、力を分布力として取扱うことにすればその分布面  $D$  からみた振動膜の駆動点機械インピーダンスの規準函数展開式は、<sup>(8)</sup>(2-8) 式の右辺を規準函数の項に展開したものとして次のように与えられる。

$$Z^{-1}(D) = j\omega \sum_m \frac{\left\{ \frac{1}{D} \int_D \varphi(\mathbf{r}) E_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\}^2}{(\omega_m^2 - \omega^2) M} \quad (4-2)$$

ここに  $\varphi$  は力の分布密度函数で  $D$  内での平均値は1になっているとする。力の分布する範囲  $D$  がこの例のように充分小さいならば、若い番号の  $m$  における  $E_m$  の値は  $D$  内ではほとんどうねりがないと見られるから、(4-1) のはじめの方の項の値と、(4-2) のはじめの方の項の値はほとんど同一の値をとる（但し (4-1) 式における  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  はいずれも  $D$  内にとらねばならぬ。）ものと考えられるが、 $m$  が次第に大きくなると  $D$  の中で  $E_m$  がはげしく正負に変化するようになって来るために (4-2) 式の各項は  $m$  の増大と共に急速に小さくなるであろう。ところで (4-1) 式の方にはこのような平均化が行われないために各項の値の  $m$  による変化はあまり顕著ではなく、どこまで加えていってもその和は限りなく増大するのである。しかしながらはじめの方の項が (4-1) 式と (4-2) 式でほとんど同一の値をとることは極めて注目すべきことで、若し (4-1) が収束すると誤認して駆動点インピーダンスの値をその右辺の有限個の項を数値計算をして求めた結果が、力の分布に適切な注意を払って収束する (4-2) 式の右辺（之も有限項だけの計算をする）の級数から求めた数値とほとんど同一の値を与えることも考え得るのである。特に駆動周波数  $\omega$  が、規準振動数  $\omega_m$  の何れかに近いときには、その規準振動の項が甚だ大きくなるために、双方の結果の近似の度合がかなり高くなることもあると思われる。しかしこのことを理由にして (4-1) 式が収束しない場合にも有意義なものであるとみなすことはできないのであって、あくまでも上のような一致は可能性の多い偶然の産

物に他ならないから、それを頼りに所望の特性量を計算するようなことはつつしまなければならぬものとする。

実際の振動体では、かなり簡単なものでも規準函数や規準振動数の数値は  $m$  によって複雑な変化をして居り (4-1), (4-2) 式のような規準函数展開の形にしてしまうとその収束発散の判定が難しいので、本文のような判定を別途にやっておくのがよいと思われる。

## 5 む す び

以上分布定数的な機械振動体の駆動点インピーダンスを集中力および分布力を受ける力学的な端子に対して規定し、それが単位集中力による変位分布函数とどんな関係にあるかを説明した上、代表的な機械振動体のいくつかについて、運動を支配する運動方程式の定常解を検討することにより、駆動点インピーダンスの特異性を判定した。

実際の問題では、どんな振動体であっても、その駆動点インピーダンスが周波数に無関係に零になることは決してないから、もし解析上でこのようなことが起るとすればその原因は、運動記述のもとにした運動方程式かまたは想定した力の分布の形が不適当であったからで、そのいずれかを適当に修正することによって実際問題に近いような解析ができることになるのである。

集中力を振動体に加えた場合の変位の定常解は、その着力点においてのみ特異性を発生するのが普通であるから、本文のように駆動点機械インピーダンスの吟味をよくやっておくならば、他の諸特性量の特異性はそれから容易に論ずることができるようになる。

御指導を賜った東京工業大学栗屋教授、同じく通研音響研究室早坂寿雄室長、有益な御教示をいただいた山形大学工学部近野正助教授の皆様に、深く感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

1. 早坂：音響振動論（昭23）コロナ社
2. 鈴木：電気通信学会雑誌 Vol. 34, p. 312. (昭26, 6月号)
3. D. Young: *Journal of Applied Mechanics* Vol. 15, No.1 (1948)
4. 安田：電気通信学会雑誌 Vol. 37, p. 37. (昭29, 1月号)
5. 安田：信州大学工学部研究報告 Vol. 3, p. 69. (昭29, 3月)
6. 安田：電気通信学会雑誌 Vol. 37, p. 109. (昭29, 2月号)
7. 近野：電気通信学会雑誌 Vol. 39, p. 651. (昭31, 7月号)
8. 安田：電気通信学会, 日本音響学会電気音響理論研究専門委員会資料 (昭31, 1月会)
9. P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics* 3rd Ed. (1947), p. 58.
10. R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics* Vol. I (1953), p. 311.
11. A. Sommerfeld: *Partial Differential Equations in Physics* 1949, § 27, pp. 182—184.
12. 安田：電気三学会連合大会論文集〔I〕, p. 214. (昭31, 4月)



13. 安田：電気通信学会，日本音響学会電気音響理論研究専門委員会資料（昭31，4月会）
14. P. M. Morse and H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics* Part I, 1953, p. 810.
15. 早坂：電気通信学会雑誌，通巻 174 号，p. 741（昭12年9月号）
16. 安田：日本音響学会雑誌 Vol. 10, No. 1,（昭29）p. 5.
17. 安田：信州大学工学部研究報告 Vol. 5,（昭30）p. 108.
18. Lord Rayleigh: *Theory of Sound* Vol. I, p. 239. § 148c.
19. 文献 10, pp. 393—4.
20. 文献 14, Part II, 1954, p. 1762.
21. 文献 18. Vol. II, pp. 418—420, 424—427.
22. 安田：日本音響学会研究発表会講演論文集（昭31. 11月） pp. 109—110.
23. A. E. H. Love: *Mathematical Theory of Elasticity*, 1934, pp. 183—186.
24. 安田：電気通信学会全国大会論文集（昭31. 11月） p. 24.

第1表 各種振動体に対する駆動点機械インピーダンスの特異性判定結果

振 動 体	振動様式	集中力を加えたときの定常解の，着力点近傍における様相	駆動点機械インピーダンス特異性*				
			端子型式	点集中力	線分布力	面分布力	体積分布力
引張られた弦	横 振 動	連続だが尖っている		○	○	—	—
細 長 い 棒	た て 振 動	連続だが尖っている		○	○	—	—
"	振 り 振 動	連続だが尖っている		○	○	—	—
"	た わ み 振 動	連続でなめらかである		○	○	—	—
引張られた膜	横 振 動	着力点で不連続 $\log(1/r)$ 程度になる**		×	○	○	—
薄 板	曲 げ 振 動	連続でなめらかである		○	○	○	—
曲げスティフネスを考えた膜	曲 げ 振 動	連続でなめらかである		○	○	○	—
曲げスティフネスを考えた弦	横 振 動	連続でなめらかである		○	○	—	—
等方性弾性材質からなる振動体	各 種 振 動	着力点で不連続， $1/r$ 程度になる**		×	×	○	○

\* 表中○印は駆動点機械インピーダンスが零でない有限値を与えるもの即ち特異性のないものを示し，×印はその値が零になってしまうもの，—印は該当事項のないものを示す。

\*\*  $r$  は着力点からの距離を示すものとする。