

直六面体状容器ならびに円筒状容器内の 音響系の規準振動と定常特性

安 田 力 *

(信州大学工学部通信工学教室)

1 緒 言

一ヶ所ないしは数ヶ所で他の音響系または機械系などに力学的に結ばれ、それらとの間に力学的 energy を授受しながら振動を行うような、閉じた容器の中の気体音響系は、共振系や伝送系となる音響回路の主要部分によく用いられるばかりでなく、スピーカやマイクロホンなどの電気音響機器の機械振動系の制禦とか、振動伝達系の一部にも屢々用いられる。

之等の音響系は容器の寸法が使用音波々長に比べて充分小さいときにはそれを集中定数素子とみなして単に音響容量などの値でその特性を代表させることもできるが、使用波長が容器の寸法の程度まで短くなるならばもはやそのような取扱いは不適當で、分布定数的な考慮が必要となってくる。

このような使用状態における容器の特性表示の方法として、さきに筆者はその壁面上に考えた集中音源またはピストン状音源に関する Z -matrix を導入し、それが容器の規準様式振動に対する規準函数、角速度等により、簡潔な形で表わされることを指摘した。⁽¹⁾⁽²⁾ その方法は等方性無損失材料から成る機械振動体の問題に対する早坂寿雄博士の方法⁽³⁾ならびにその応用に属する諸法を音響系の振動の問題に適用する試みであり、若し⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾ 容器の規準函数またはその積分値と規準振動の角周波数が知られている場合には、それらの簡単な組合せによつて Z -matrix が得られるので、容器に他の振動系を結んで出来る⁽⁹⁾ 連成振動系の問題を解くことが純代数的にできるようになる。

本稿はかような解析法を音響回路の設計に適用するための資料をあたえる目的で、機器の主要部分として屢々利用される直六面体、円筒等の形をした容器に関して、既に知られている解析の結果から出発して、定常特性とくに Z -matrix の表現に必要な規準函数及びその定積分を求めた。規準函数は点音源的端子に関する、またその定積分値はピストンの端子に関する、系の等価電気系の Z -matrix 表現に最も重要な役割をする量であるから、之等を以下のように求めておくことは有意義であると考え。

* 信州大学助手

* 1 規準振動の角周波数を本稿では以後規準振動数と呼び、また角周波数を単に周波数と呼ぶことにする。

円筒状容器に関する諸結果を利用すれば、半円筒または扇形断面の容器に関するものも容易に導かれるので、それらについても簡単に附記した。

2 規準函数と Z -matrix, 変成比

ここに述べる容器の規準函数とは次に挙げる三つの条件を満たす函数列の函数をいう。即ちその第 m 規準函数 $E_m(\mathbf{r})$ は器の内部で齊次方程式

$$(\nabla^2 + \lambda_m)E_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (2-1)$$

を満足し、また器壁上では境界条件である

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} E_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (2-2)$$

に適合する空間函数であり、且つ次の正規直交 (*orthonormal*) 条件を満たすものとする。

$$\iiint_V E_m(\mathbf{r}) \cdot E_n(\mathbf{r}) dV = \delta_{mn} \cdot V \quad (2-3)$$

但し之等の式において、 ∇^2 は *Laplacian operator*, λ_m は第 m 固有値で ω_m を第 m 規準振動数とし c を媒質中の音速とするととき、

$$\lambda_m = (\omega_m/c)^2 \quad (2-4)$$

の関係がある。また \mathbf{r} は座標を表わす 3 次元 *vector*, \mathbf{n} は点 \mathbf{r} が器壁面上にあるときその点における器壁面の内向き法線 *vector*, V は容器の全容積, dV は点 \mathbf{r} における容積微分, また δ_{mn} は *Kronecker* の *delta* を示す。

若し既に (2-1), (2-2) 両式のみを満足する函数 $\phi_m(\mathbf{r})$ (之を以下 “特性函数” と呼ぶ) の列が得られているときには、それらから規準函数の列が次のように計算される。即ち常数 c_m を用いて両者の関係を

$$E_m(\mathbf{r}) = c_m \phi_m(\mathbf{r}) \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2-5)$$

と書くことにし、その両辺を二乗して容器の全容積に互り積分すれば左辺の積分は単に V となるから、 c_m は結局

$$c_m = \left\{ V / \iiint_V \phi_m^2(\mathbf{r}) dV \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-5a)$$

となる。したがつて特性函数から規準函数を導く仕事は主としてこの式の { } 内の積分の計算であると云えよう。

次に規準函数と、それから導かれる Z -matrix との関係について少し説明を加える。

外係との間に *energy* 授受を行う器壁上の場所即ち等価電気回路網の端子の動作様式が、集中音源 (点音源) 的であるか、またはピストンの的であるかにより、 l 個の場所 (端子) における音圧 (または力) と体積速度 (または線速度) を第 1 表のように定義するような P_i, Q_i ($i=1, 2, \dots, l$) で表わすとき、それら P_i, Q_i 間の関係は一次結合

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots Z_{1j} \cdots Z_{1l} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots Z_{2j} \cdots Z_{2l} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ Z_{i1} & Z_{i2} \cdots Z_{ij} \cdots Z_{il} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ Z_{l1} & Z_{l2} \cdots Z_{lj} \cdots Z_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_l \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

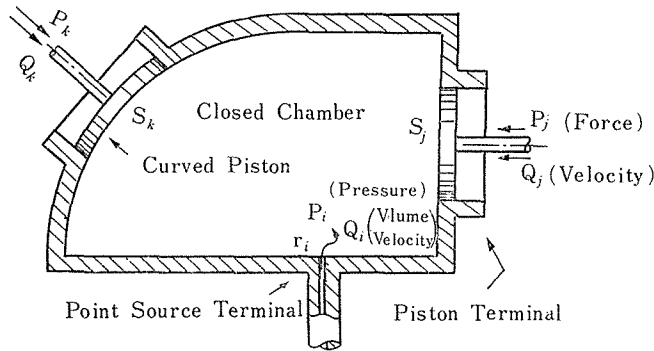
で表わされる。この関係を代表する *matrix Z* は、音圧(力)-電圧、体積速度 (線速度)-電流対応法によるこの系の等価 2*l* 端子電気回路の *Z-matrix* に相等するもので、その要素は一般に次の形に表わすことができる。

$$Z_{ij} = Z_{ji} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j\omega N_m(i)N_m(j)}{(\omega_m^2 - \omega^2)C_0} \quad (2-7)$$

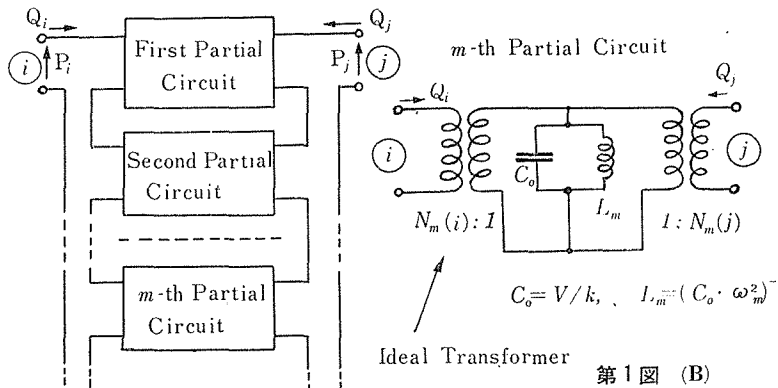
ここに (*jω*) は駆動力の *time factor*, ω_m は第 *m* 規準振動数をあらわし、また C_0 は容器を単純な音響容量とみた場合の容量値である。使用気体の体積弾性率 κ と *V* とにより C_0 は

$$C_0 = V/\kappa \quad (2-8)$$

と決まる。さらに (2-7式) における $N_m(i)$, $N_m(j)$ 等は夫々第 *i* または第 *j* 端子に関する第 *m* 規準様式振動の変成比と呼ぶ量で端子の様式により第 1 表のように規約される。変成比と言う名前は等価 2-*l* 端子電気回路網を考えた場合、それは各様式に対応する 2-*n* 端子の部分回路網の直列接続の形で表わされるが、その第 *m* 部分回路に現われる理想変成器の変成比が丁度この値になるからである。(第 1 図 *b*)



第 1 図 (A)



第 1 図 (B)

同表の中で曲面ピストンというのは、同筒形容器のように曲面状の壁をもつものにおいて、その壁の一部たとえば S_j 面がピストン状にある方向(表では \mathbf{k}_j 方向)に運動する場合で、その欄の積分中の $(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}))$ はその \mathbf{k}_i と運動壁面即ち曲面ピストン上の点 \mathbf{r} における面の内向き法線 *vector* $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ との *scalar product* たる S_j 上の空間函数で

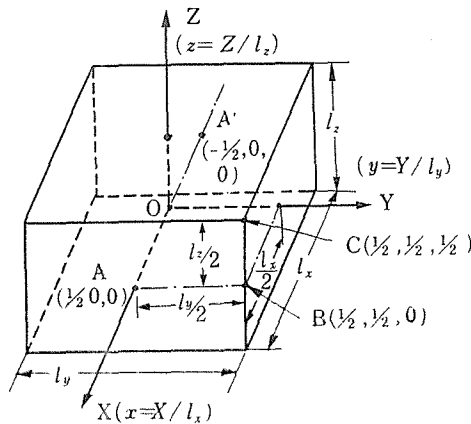
あり、 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ と \mathbf{k}_i との夾角 α_{ir} が与えられるならばそれは $\cos \alpha_{ir}$ に等しい。

第1表 $P_i, Q_i, N_m(i)$ の定義

端子様式	P_i	Q_i	$N_m(i)$
集中音源 壁上の点 \mathbf{r}_i にある <i>simple source</i> (たとえば波長より充分小さな孔)	容器内の音圧 $P(\mathbf{r})$ の \mathbf{r}_i における値 $P(\mathbf{r}_i)$	\mathbf{r}_i にある音源の強さ (容積速度で表わす)	第 m 規準函数 $\Xi_m(\mathbf{r})$ の \mathbf{r}_i における値 $\Xi_m(\mathbf{r}_i)$
(平面ピストン) 平らな壁の一部 S_i で、それは壁の法線方向に竝進運動できる。	$P(\mathbf{r})$ の S_i 上の積分 (全音圧) $\iint_{S_i} P(\mathbf{r}) dSr$	S_i 面の内向き法線方向線速度	Ξ_m の S_i 上の積分 $\iint_{S_i} \Xi_m(\mathbf{r}) dSr$
曲面ピストン 竝進運動する壁 S_i が曲面をなしているとき。 (\mathbf{k}_i は S_i の竝進運動方向 <i>unit vector</i>)	竝進運動方向への全音圧 $\iint_{S_i} (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})) p(\mathbf{r}) dSr$	S_i の竝進運動の線速度 ($\mathbf{n}(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} における壁の内向き法線 <i>vector</i>)	$\iint_{S_i} (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})) \Xi_m(\mathbf{r}) \cdot dSr$

3 直六面体状容器に関する計算

3-1. 規準函数 三稜の長さが夫々 l_x, l_y, l_z であるような直六面体の容器をとり、その中心に原点をおく直角座標 X, Y, Z を各稜に平行にとる (第2図) とき、微分方程式 (2-1) ならびに、境界条件 (2-2) に相等する



第2図

$$\left. \begin{aligned}
 X = \pm \frac{l_x}{2} \quad & \text{で} \quad \frac{\partial \phi}{\partial X} = 0, \\
 Y = \pm \frac{l_y}{2} \quad & \text{で} \quad \frac{\partial \phi}{\partial Y} = 0, \\
 Z = \pm \frac{l_z}{2} \quad & \text{で} \quad \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

を満足する特性函数 ϕ_m は次で与えられる。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾

$$\phi_m(x, y, z) = \frac{\cos l\pi x}{\sin l\pi x} \frac{\cos m\pi y}{\sin m\pi y} \frac{\cos n\pi z}{\sin n\pi z} \quad (l, m, n=0, 1, 2, 3) \quad (3-2)$$

式中の座標 x, y, z は夫々元の座標を *normalize* したものであり、それらの関係は

$$x = \frac{X}{l_x}, \quad y = \frac{Y}{l_y}, \quad z = \frac{Z}{l_z} \quad (3-3)$$

である。^{*1}そして (3-2) においては l, m, n が零または偶数のときは cosine 函数を、また奇数ならば sine 函数をとるものとする。

規準函数を導くために (3-2) を二乗して積分すれば

$$\begin{aligned} \iiint_V \phi^2_{lmn} dV &= l_x l_y l_z \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi^2_{lmn} dx dy dz \\ &= \frac{V}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{\epsilon_l}\right) \left(\frac{\pi}{\epsilon_m}\right) \left(\frac{\pi}{\epsilon_n}\right) = \frac{V}{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} \end{aligned}$$

となる。但しここに $\epsilon_l, \epsilon_m, \epsilon_n$ 等は次の例による数値である。

$$\epsilon_r = \begin{cases} 1 & (r=0) \\ 2 & (r=1, 2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (3-4)$$

上の結果を (2-5), (2-5a) 式の関係に用いれば直六面体容器の規準函数は次のように定まることになる。

$$E_{lmn}(z, y, z) = \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} \frac{\cos(l\pi x)}{\sin(l\pi x)} \frac{\cos(m\pi y)}{\sin(m\pi y)} \frac{\cos(n\pi z)}{\sin(n\pi z)} \quad (3-5)$$

但し sine 函数は l, m, n が奇数の場合にとるものとする。

Z-matrix 表現に必要な規準振動数 ω_{lmn} を次に附記する。

$$\omega_{lmn} = \pi c \left[(l/l_x)^2 + (m/l_y)^2 + (n/l_z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-6)$$

3-2 二三の集中端子に関する変成比 点 \mathbf{r}_i に存在する集中端子に関する変成比は第1表によれば規準函数のその点における値即ち $E_{lmn}(\mathbf{r}_i)$ そのものであるから、代表的な二三の点に関する変成比が次のように簡単に求められる之等の点を $A(1/2, 0, 0)$, $B(1/2, 1/2, 0)$, $C(1/2, 1/2, 1/2)$, $A'(-1/2, 0, 0)$ 等のように選べば (第1図), (3-5) に之等の座標 (カッコ内) を代入することにより、次のような変成比が得られる。

$$\begin{aligned} N_{lmn}(A) &= \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^p \quad (m, n=0, 2, 4, \dots) \\ &= 0 \quad (m, n \text{ の何れかが奇数のとき}), \\ N_{lmn}(B) &= \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^{p+q} \quad (n=0, 2, 4, \dots) \\ &= 0 \quad (n=1, 3, 5, \dots), \end{aligned}$$

(*1) この新座標によれば規準函数の表示式が室の寸法に無関係な形になる。

$$N_{lmn}(C) = \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^{p+q+r},$$

$$N_{lmn}(A') = \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^{p'} \quad (m, n = 0, 2, 4, \dots)$$

$$= 0 \quad (m, n \text{ の何れかまたは両方が奇数のとき})$$

ここに p, q, r, p' は夫々 $(l/2), (m/2), (n/2), (l/2)+(1/2)$ の整数部分である。之等の結果を用いれば Z -matrix は (2-7) により直ちに書き下すことができる。たとえば A, A' 間の相互開放インピーダンスを $Z_{AA'}$ で表わせば、それは次の式のようになる。

$$Z_{AA'} = Z_{A'A} = \sum_{lmn} \frac{j\omega \epsilon_l \epsilon_m \epsilon_n (-1)^l}{(\omega_{lmn}^2 - \omega^2) C_0}$$

$$(m, n = 0, 2, 4, \dots)$$

以上の例によつてもあきらかなように対称的な端子配置によつて数値計算に際して考慮に入れねばならぬ規準様式が目出つて減少する。

第3図はこの事情を示し、とり上げねばならぬ規準様式は、端子 A, A' に対しては×印の所を除き、全体の約 $1/4$ になることがわかる。之は次に述べるピストン型端子 $S_A, S_{A'}$, S_a 等についてもいえる。

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		×		×		×		×		×
1	×		×		×		×		×	
2		×		×		×		×		×
3	×		×		×		×		×	
4		×		×		×		×		×
5	×		×		×		×		×	
6		×		×		×		×		×
7	×		×		×		×		×	
8		×		×		×		×		×
9	×		×		×		×		×	

第3図

3-3 ピストン型端子に関する変成比 この場合には平面ピストンだけが考えられ、第1表によれば変成比は単に規準函数を考慮する面上に積分して求められる。次に代表的な二三の例について述べよう。

まず $A(1/2, 0, 0)$ を中心とする $S_A = l_y' \times l_z'$ の矩形ピストン (第4図 (a)) に対する変成比 $N_{lmn}(S_A)$ を求めてみる。 $y' = l_y'/l_y, z' = l_z'/l_z$ とするときは

$$N_{lmn}(S_A) = l_y l_z \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^p \int_{-y'/2}^{y'/2} \int_{-z'/2}^{z'/2} \cos(m\pi y)$$

$$\cdot \cos(n\pi z) dydz = l_y' l_z' \sqrt{\epsilon_l} (-1)^p \lambda_m(y') \lambda_n(z')$$

但しここに $\lambda_m(y'), \lambda_n(z')$ は

$$\lambda_m(y') = 1 \quad (m = 0)$$

$$= \sqrt{2} \frac{\sin(m\pi y'/2)}{(m\pi y'/2)} \quad (m = 2, 4, 6, \dots)$$

$$= 0 \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

を表わすものとする。

A の対向面 $A'(-1/2, 0, 0)$ を中心とする矩形ピストン $S_{A'} = l_y'' \times l_z''$ に関する変成比も同様に

$$N_{lmn}(S'_A) = l_y'' \cdot l_z'' \sqrt{\epsilon_l} (-1)^{p'} \lambda_m(y'') \lambda_n(z'')$$

となる。但し記号については前の例による。

次にAを中心とする半径 a の円形ピストン S_a (第4図(b)) に関する変成比を求めてみよう。積分の便利のために次の極座標を用いる。

$$l_y \cdot y = r \cos \theta, \quad l_z \cdot z = r \sin \theta,$$

$$\therefore N_{lmn}(S_a) = \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^p$$

$$\times \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{m\pi r}{l_y} \cos \theta\right) \cos\left(\frac{n\pi r}{l_z} \sin \theta\right) r dr d\theta$$

この積分は三角法の良く知られた公式により次のように変形される。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\cos\left\{ \frac{m\pi r}{l_y \cos \theta_{mn}} \cos(\theta - \theta_{mn}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \cos\left\{ \frac{m\pi r}{l_y \cos \theta_{mn}} \cos(\theta + \theta_{mn}) \right\} \right] r dr d\theta \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos\left\{ \frac{m\pi r}{l_y \cos \theta_{mn}} \cos \theta \right\} r dr d\theta \end{aligned}$$

式中 θ_{mn} は次のものを表わす。

$$\theta_{mn} = \tan^{-1} (nl_y/ml_z)$$

ところで Bessel 函数の積分表示 ⁽¹³⁾

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta$$

を利用すれば θ に関する積分が処理され結局

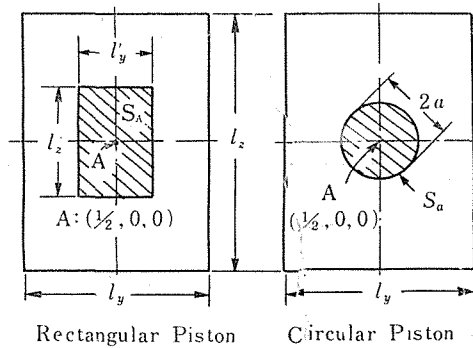
$$I = 2\pi \int_0^a J_0\left(\frac{m\pi}{l_y \cos \theta_{mn}} r\right) r dr = \frac{2l_y \cos \theta_{mn}}{m} a J_1\left(\frac{m\pi a}{l_y \cos \theta_{mn}}\right)$$

を得る。したがって $N_{lmn}(S_a)$ は

$$\begin{aligned} N_{lmn}(S_a) &= \sqrt{\epsilon_l} (-1)^p \pi a^2 \quad (m=n=0) \\ &\quad \left\{ \sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_m \cdot \epsilon_n} (-1)^p \frac{2a J_1\left(\pi a \sqrt{\left(\frac{m}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_z}\right)^2}\right)}{\left\{ (m/l_y)^2 + (n/l_z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}\right\} \\ &\quad (m, n=0, 2, 4, \dots \text{但し } m=n=0 \text{ を除く}) \end{aligned}$$

となる。Aの対向点 $A'(-1/2, 0, 0)$ にある同寸法のピストン S'_a に対する変成比 $N_{lmn}(S'_a)$ はこの結果を利用して直ちに

$$N_{lmn}(S'_a) = (-1)^l \cdot N_{lmn}(S_a)$$



第4図

として求められる。

4 円筒状容器に関する計算ならびにその応用

本節では円筒状容器に関し規準函数, 変成比等を計算し, またその結果を利用して半円筒や扇形断面の容器に関する結果をも導いた。

4-1 規準函数 ⁽¹³⁾ 半径 a , 長さ b の円筒状容器の特性函数は, 第5図の配置によるこの *normalize* された極座標 $x(=r/a), \theta, y(=z/b)$ を用いるときは

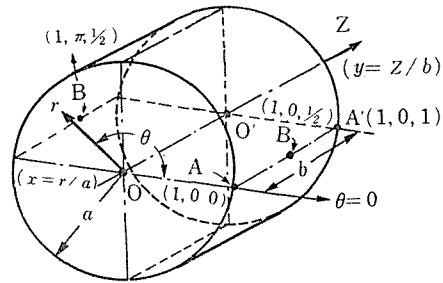
$$\phi_{lmn} = J_l(k_{lm} x) \frac{\cos}{\sin} l\theta \cdot \cos n\pi y$$

($l, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

と書くことが出来る。 (4-1)

式中 k_{lm} は超越方程式

$$\frac{d}{dx} J_l(x) = 0 \quad (4-2)$$



第5図

の第 $(m-1)$ 番目の根を表わし, $l=0$ の場合に対しては極めて詳細な数値が与えられてあるが, ⁽¹⁴⁾ ここには ^{*1} Lord Rayleigh の著書から得たものを示す。 ⁽¹⁵⁾ (第2表)

第2表 k_{lm} の値

m / l	0	1	2	3
0	0	1.841	3.054	4.201
1	3.832	5.332	6.705	8.015
2	7.015	8.536	9.965	11.344
3	10.174	11.706		
4	13.324	14.864		
5	16.471	18.016		
6	19.616			

規準函数を求めるためまず ϕ^2_{lmn} の積分を計算してみよう。

$$I_{lmn} = \iiint_V \phi^2_{lmn} dV$$

$$= a^2 b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 J_l^2(k_{lm} x) \frac{\cos^2}{\sin^2}(l\theta) \cdot \cos^2 n\pi y \, d\theta dx dy$$

J_e^2 の積分に就ては ⁽¹⁶⁾ Lommel の式と境界条件 (2-2) を用いて

$$I_{lmn} = (\epsilon_l \cdot \epsilon_n)^{-1} V \left(1 - \frac{l^2}{k_{lm}^2} \right) J_l^2(k_{lm})$$

($l, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

* 1 Rayleigh の表を本文のやり方に一致させるため一部の配置を変えてある。

但し $l=m=0$ の場合に限る

$$I_{oon} = \epsilon_n^{-1} \cdot V \tag{4-3}$$

のように計算される。したがって規準函数は (4-3), (2-5a), (2-5) 等により非対称振動様式 ($l \neq 0$) に対して

$$\begin{aligned} \Xi_{lmn}(x, \theta, y) &= \sqrt{\frac{\epsilon_l \cdot \epsilon_n}{1 - (l/k_{lm})^2}} \cdot \frac{J_l(k_{lm}x)}{J_l(k_{lm})} \cdot \frac{\cos(l\theta) \cos(n\pi y)}{\sin(l\theta)} \\ &\dots (l=1, 2, 3, \dots, m, n=0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{4-4}$$

軸対称振動様式 ($l=0$) に対して

$$\begin{aligned} \Xi_{omn}(x, \theta, y) &= \sqrt{\epsilon_n} \cdot \frac{J_0(k_{om}x)}{J_0(k_{om})} \cos(n\pi y) \\ &(m, n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{4-4a}$$

さらに $l=m=0$ の様式に対しては

$$\Xi_{oon}(y) = \sqrt{\epsilon_n} \cdot \cos(n\pi y) \tag{4-4b}$$

之は両端を閉じた管の規準函数に相等するものである。

次に規準振動数 ω_{lmn} を記しておく。⁽¹³⁾

$$\omega_{lmn} = \frac{1}{c} \sqrt{(k_{lm}/a)^2 + (n\pi/b)^2} \tag{4-5}$$

4-2 種々な変成比の例

このように規準函数が求まったら集中型端子に関する変成比はそれらに座標を代入するだけで直ちに得られる。第3表に示すものはその二三の代表的な例である。

第3表 集中音源型端子に関する変成比

$$N_{lmn}(i) = \Xi_{lmn}(\mathbf{r}_i)$$

端子所在点 (x, θ, y) (第5図参照)	変成比 $N_{lmn}(i)$
原点 O ($x=y=0$)	$\sqrt{\epsilon_n} \cdot (J_0^{-1}(k_{om}))$
O の対向点 O' ($x=0, y=1$)	$\sqrt{\epsilon_n} \cdot (-1)^n J_0^{-1}(k_{om})$
円筒面上の中点 B ($1, 0, 1/2$)	$[\epsilon_l \epsilon_n / \{1 - (l/k_{lm})^2\}]^{1/2} (-1)^{n/2}$ $\dots (n=0, 2, 4, \dots)$ $0 \dots (n=1, 3, 5, \dots)$
B の対向点 B' ($1, \pi, 1/2$)	$N_{lmn}(B) \times (-1)^l$
底面周縁上の点 A ($1, 0, 0$)	$[\epsilon_l \epsilon_n / \{1 - (l/k_{lm})^2\}]^{1/2}$
A の対向点 A' ($1, 0, 1$)	$N_{lmn}(A) \times (-1)^n$
任意点 \mathbf{r}	$N_{ooo}(\mathbf{r}) = \Xi_{ooo}(\mathbf{r}) = 1$
備考	上式で $l=m=0$ に対しては $(l/k_{lm})^2$ を零とおく

また平面ピストン端子が何れかの鏡板上にあるときには規準函数を単にその面上に積分することにより変成比が計算される (第6図(a))。最も代表的な例として次に O を中

心とする半径 a_1 ($\leq a$) の円形ピストン S_{a_1} の場合の計算を示す。

このとき面上で $\cos(n\pi y) \equiv 1$ が成り立ち、また $l \neq 0$ に対する積分はすべて零になるから $l=0$ のみを考え、さらに $x_1 = a_1/a$ とおき、

$$N_{omn}(S_{a_1}) = \frac{\sqrt{\epsilon_n} \cdot 2\pi a^2}{J_0(k_{om})} \int_0^{x_1} J_0(k_{om} x) x dx$$

を得る。右辺の積分は公式⁽¹⁷⁾

$$\int_0^z J_0(z) z \cdot dz = z J_1(z)$$

により計算されて結局次の結果が得られる。

$$N_{omn}(S_{a_1}) = \frac{2 S_{a_1} \sqrt{\epsilon_n} \cdot J_1(k_{om} x_1)}{(k_{om} x_1) J_0(k_{om})}$$

但し $S_{a_1} = \pi a_1^2 = \pi a^2 x_1^2$ である。点 O の対向点に S_{a_1} がある場合には、この結果に $(-1)^n$ をかければ所望の値になる。上の式で $m=0$ の場合には $k_{00}=0, J_1(k_{00} x_1) = 0$ で計算できなくなるが、そのときは $y=0$ 面上で $\epsilon_{oon} \equiv 1$ となるから $N_{oon}(S_{a_1}) = \sqrt{\epsilon_n} \cdot S_{a_1}$ が直ちに得られる。

次に第6図(b)のように円筒面上の点 $B(1, 0, 1/2)$ に中心をおく長さ b_1 , 中心角 $2\theta_1$ を占める四角な壁の部分 S_b が、 $\theta = \pi$ の方向に竝進ピストン運動をするとすれば、之は第1表の曲面ピストンに相等するから、その欄で

$$[\mathbf{k}_\theta = \pi \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] = \cos[\pi - (\pi + \theta)] = \cos\theta$$

とすれば、この曲面ピストン S_b に関する変成比 $N_{lmn}(S_b)$ は

$$\begin{aligned} N_{lmn}(S_b) &= \iint_{S_b} \epsilon_{lmn}(\mathbf{r}) \cos\theta dS_r \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_n} \cdot a \cdot b}{\{1 - (l/k_{lm})^2\}^{1/2}} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \cos(l\theta) \cos\theta \int_{\frac{1}{2}(1-y_1)}^{\frac{1}{2}(1+y_1)} \cos(n\pi y) dy d\theta \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_e \cdot \epsilon_n} S_b}{2 \{1 - (l/k_{lm})^2\}^{1/2}} \Psi_l(\theta_1) \cdot \Phi_n(y_1) \end{aligned}$$

但しここに $\Psi_l(\theta_1), \Phi_n(y_1)$ 及び S_b は夫々次のものを示す。

$$\Psi_l(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\sin\{(l-1)\theta_1\}}{(l-1)\theta_1} + \frac{\sin\{(l+1)\theta_1\}}{(l+1)\theta_1} & (l \neq 1) \\ 1 + \frac{\sin(2l\theta_1)}{(2l\theta_1)} & (l = 1) \end{cases},$$

$$\Phi_n(y_1) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \sin(\frac{n}{2} \pi y_1)}{(\frac{n}{2} \pi y_1)} & (n=2, 4, 6, \dots) \\ 1 & (n=0) \\ 0 & (n=1, 3, 5, 7, \dots) \end{cases},$$

$$S_b = 2a \theta_1 b$$

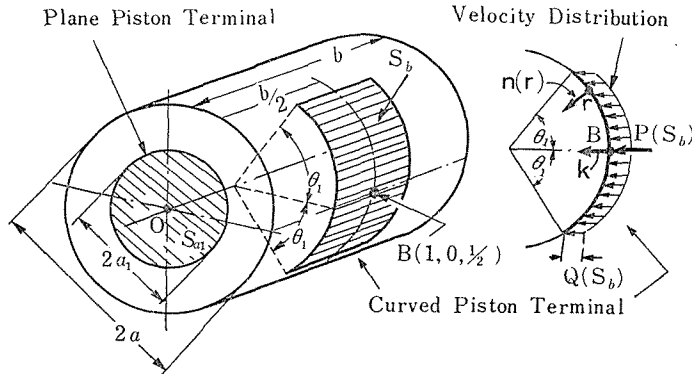
上の積分で $\sin(l\theta)$ の項をとり上げなかつたのはその反対称性のため積分値が零になる

ことが明らかだからである。円筒面上の他の場所にピストンがある場合にもこのようにして容易に変成比が求められる。

4-3 半円筒状容器に関する計算 本項では上に取扱つた円筒の問題に対する結果を利用して、円筒をその軸を含む平面で二分してできる半円筒状容器の規準函数その他を導いてみる。座標を第7図のようにとるならば、特性函数 ϕ_{lmn} は同筒の場合のもの即ち(4-1)の $\sin(l\theta)$ を除いたものになることは境界条件等から容易に了解される。よつて

$$\phi_{lmn}(x, \theta, y) = J_l(k_{lm} x) \cos(l\theta) \cos(n\pi y) \quad (l, m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4-6)$$

規準函数を導くため、この式の二乗をこの半円筒の範囲に積分するとすれば、その値は前の円筒の場合の丁度 $1/2$ に等しくなることは明らかであり、一方容器容積 V も円筒の $1/2$ となる。したがつて(2-5a)式によれば規準函数をつくるための係数 c_{lmn} 等は円筒の場合と全く等しく、規準函数は円筒のその一部をそのまま流用すれば良いことがわかる。即ち半円筒状容器の規準函数は(4-4)~(4-4b)のうち、(4-4)では $\sin(l\theta)$ の項を除いたもの、他の式ではその儘全部がその規準函数となる。以上によつて集中音源型端子に関する変成比が、それに相等する位置にある円筒状容器の場合の値と全く一致することも明らかである。



第 6 図

次に底面にある矩形ピストン端子に関する変成比を計算してみよう。いまそれが底面の中心 C とその中心を一致させた矩形面 $a_1 \times b_1 = S_c$ であるとすれば、対称性の考慮により l, n が零または偶数の場合の他は規準函数の S_c 面上の積分が零となるからそれらを除外し、

$$\begin{aligned} N_{lmn}(S_c) &= \iint_{S_c} N_{lmn} dS \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_l \cdot \epsilon_n} \cdot 2ab}{\{1 - (l/k_{lm})^2\}^{1/2}} J_l(k_{lm}) \int_0^{x_1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}(1+y_1)} J_l(k_{lm} x) \\ &\quad \times \cos(n\pi y) dy \end{aligned}$$

ここで x_1, y_1 は $x_1 = a_1/a, y_1 = b_1/b$ である。ところで

$$\int_{\frac{1}{2}(1-y_1)}^{\frac{1}{2}(1+y_1)} \cos(n\pi y) dy = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n\pi/2)} \sin(n\pi y_1/2)$$

$$\int_0^{x_1} J_0(k_{lm} x) dx = \frac{2}{k_{lm}} \sum_{s=0}^{\infty} J_{l+2s+1}(k_{lm} x_1)$$

等を利用すれば $l=m=0$ の場合を除き

$$N_{lmn}(S_c) = \frac{2\sqrt{\epsilon_l} (-1)^{\frac{n}{2}} S_c \lambda_n(y_1)}{\{1 - (l/k_{lm})^2\}^{1/2} J_l(k_{lm})} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_{l+2s+1}(k_{lm} x_1)}{(k_{lm} x_1)}$$

($n=0, 2, 4, \dots$)

$l=m=0$ に対しては次の値をとる。

$$N_{00n}(S_c) = S_c \cdot \lambda_n(y_1)$$

式中 $\lambda_n(y_1)$ は直六面体状容器における矩形ピストンの変成比の表示に用いたものと同様である。

4-4 扇形断面の筒形容器に関する計算 前項の方法を踏襲すれば円筒の一部をなすような扇形断面の容器の特別な場合の計算がたやすくできる。いま断面の中心角が π/k ($k=1, 2, 3, 4$ 等) となり、座標を前に準じてとるならば (4-1式) の円筒容器に関する特性函数のうち、

$$\theta=0, \pi/k \text{ で } \frac{\partial \psi_{lmn}}{\partial \theta} = 0$$

が満足されるようなもの、即ち同式の右边各様式のうち、 $\sin(l\theta)$ を含むものを除き、また l が零及び k の倍数になるものだけをとり出せば、それらによつてこの扇形断面の容器の特性函数が全部尽くされる。したがつて規準函数も円筒状容器のもの即ち (4-4) ~ (4-4b) に記した函数の相等函数で代用することが半円筒状容器のときの説明と同じ理由で結論できる。

規準振動数に関しても唯 l のとり得る値にだけ考慮を払うならば、それは全く円筒のときの式 (4-5) を代用してよい。

中心角が $2\pi/k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) の場合にもその k が 1 になつたときの結果から、他の k に対するものがすべて導かれるが、 $k=1$ の室は丁度完全円筒の軸と周辺の間(18)に矩形薄板の隔壁を設けた場合に相等し、種々な点で興味深いものであるけれども、実用的立場からしてここでは立入らなかつた。

5 結 言

音響回路網の設計手段を与える目的で以上のように直六面体、円筒、半円筒ならびに扇形断面の筒等、簡単な幾何学的形態をした容器の内部における音響系に関し、規準函数を求め、容器壁上の主要箇所に関する変成比を計算した。之等の結果を用いればそれらの容器の定常特性が Z -matrix の形で殆んど完全に記述されるようになるので、之等

容器を構成部分とするような機器の解析または設計に有力な手がかりを与えるものであると信ずる。

ここに取上げなかつた球形、半球形、円錐形ならびに二重の円筒でかこまれた形など^{(*)1}の容器についてもその実用価値は見逃すことができないので、他日機会を得て記述したい。

またここに述べた Z -matrix 表現の由来をはじめ、等価電気系のくみだて⁽²⁾、 Z -matrix 表現⁽⁹⁾を利用して複合音響系を解析する法等⁽¹⁾に関しては、既にその大要を發表したが紙面その他の関係で極めて内容が簡略なため、要領を得ない点が多々あるものと考えられるので、之等に就てはいずれ詳論したいと思う。

御指導御便捷を賜つた東京工業大学粟屋潔教授、西巻正郎助教授、日本電信電話公社電気通信研究所早坂寿雄博士はじめ同所音響研究室の方々、ならびに当学部の関係教官各位に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1 安田 電気三学会支部連合大会論文集 [I], P.207 (昭29—10月)
- 2 安田 音響学会昭和29年秋季研究発表会予稿 3—5 P.113 (昭29—11月)
- 3 早坂 “音響振動論” (昭和23) コロナ社刊
- 4 鈴木：電気通信学会誌 Vo1. 34, P. 312 (昭26—6月)
- 5 D. Young Jour. of Applied Mechanics. Vo1. 15, No. 1. Pp. 65~72 (1948)
- 6 安田 電気通信学会誌 Vo1. 37, P. 37, (昭29—1月)
- 7 安田 電気通信学会誌 Vo1. 37, P. 109 (昭29—2月), 安田電気三学会支部連合大会論文集
- 8 安田 信州大学工学部研究報告 Vo1. 3 P. 69 (昭29年3月)
- 9 安田 音響学会昭和30年春季研究発表会予稿集, 2—10, P. 71 (昭30—5月)
- 10 Lord Rayleigh: “Theory of Sound” vol. II, P. 69 (Chapter XII)
- 11 P. M. Morse: “Vibration and Sound” 2nd Ed. P. 389 (1948)
- 12 G. N. Watson: “Theory of Bessel Functions” P. 10 (1922)
- 13 P. M. Morse: 文献11, P. 40
- 14 林: “高等函数表” P. 150 (昭22—12月)
- 15 Lord Rayleigh: 文献 10, P. 298
- 16 G. N. Watson 文献 12, P. 135
- 17 同前 P. 132
- 18 Lord Rayleigh : 文献 10, P. 300
- 19 W. P. Mason : “Electromechanical Transducers and Wave Filters” P. 135 (1948)

(*)1 音響濾波器、共振器として同心円筒形の cavity は便利である。⁽¹⁹⁾

Summary**NORMAL ACOUSTICAL VIBRATIONS AND STEADY-STATE
CHARACTERISTICS OF RECTANGULAR AND CYLINDRICAL
CHAMBERS**

Tsutomu YASUDA

(Department of Communication Engineering, Faculty of Engineering)

This paper deals with the steady state characteristics of acoustical fields in rectangular and cylindrical chambers (enclosed with rigid walls). Normal functions (orthonormal eigenfunctions) of the scalar wave fields and their surface integrals are calculated from the well known characteristic functions.

By use of these results, the impedance matrices of the acoustical systems, referred to their simple source type or piston type terminals, may be represented in simpler forms. This matrices are useful to design the acoustical circuits employing rectangular or cylindrical chambers, for examples, resonators, filters, etc.