

# 曲げスティフネスのある円膜の振動<sup>(1)</sup>

安 田 力 \*

(信州大学工学部通信工学教室)

## 1 緒 言

曲げに対するスティフネスをもち、一様な張力で引き張られた円形膜の振動を、周辺がクランプされた場合について解析した。ジュラルミン、不銹鋼、チタニウム等の強靱な金属またはメッキした雲母等の極く薄い板は、極めて強く引張った状態でコンデンサマイクロホンなどの電気音響機器の主要振動部分に用いられる。ところで通常このような振動体を理論的に扱う場合には、張力の効果に比べて膜面の曲げに対するスティフネスのそれは甚だ小であるとして無視されることが多い。しかし若し予め加えられるこの張力がさ程大きくないときとか、または膜の厚みが稍大となるときには曲げスティフネスの影響が相等程度現れてくると考えられるので、之等の条件がどの位の値をとれば単純な膜としての取扱が許されるかを一応たしかめることは有意義なことだと思ふ。

さらにまた普通に板として取扱われているようなかなりの厚みをもつものでも、何らかの方法である限度以上の初期張力をあたえるならば、その振動体はもはや単純な板とはちがった性質を帯びてくるだろう事が予想される。それならばどの位の張力のときに単なる板としての取扱が不能となるのだろうか。

このような曲げスティフネスのある膜と引張り応力を加えられた板とは、全く同一の理論的な取扱がなされるのであるが、本文の目的とするところは、この剛膜に附与された諸条件によつて、その固有振動の様相がどのような影響を受けるかを定量的に明らかにして、機器設計に役立たせようとするものである。

W. P. Mason<sup>(2)</sup> はこのような剛膜についての解析を行つたが、その途中の推論に疑点があるので、簡単な弾性論的考察を行つて歪みによるポテンシャルエネルギーの表示を求め、それを用いて運動方程式を導き、彼の結果と稍異つた結論を得た。

単純な円板や円膜のときと異り、剛膜では、規準定数の値が予め剛膜に附与された張力の強さや曲げスティフネスの強さにも関係するので、このような膜面条件をきめなければ規準定数を求めることができない。またこの量が実際に与えられたとしても、その都度複雑な条件式を解いてゆくことは実用的でない。それでここでは条件量と規準正数または固有振動数の関係を機器設計などに使用する折に重要な役割をする軸対称振動について数値計算した結果を記した。之等の結果のうちとくに固有振動数については、同一寸法、同一張力の単純な円膜との比較、または同一寸法で張力の全くない通常の周辺クランプの円板との比較の形で示したので、之等の図表によつて円膜が伴う曲げスティフネスの効果や、円板に張力を与えたときの影響がかなり明らかになつた。

\* 信州大学助手

本文の解析結果は、単純な円形膜や周辺クランプの円板をその特別な場として含み、<sup>(3)(4)(5)(6)</sup>勿論、それらは既に知られているものと完全に一致する。

### 2 変形エネルギーの表示

ヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\sigma$ 、密度  $\rho$  の等方性物質からなる一様な厚さの平らな薄板に、その単位断面積当り  $T$  の一様な張力を与えたのち、周辺を半径  $a$  の円でクランプしてできた振動体について考えることとし、本文では之を円形剛膜、または単に剛膜とよぶ。その厚みはこのような張力を加えたのちの状態に於いて  $2h$  であるとする。厚みの中央となる面上に  $xy$  面を、厚みの方向に  $z$  軸をとるような直交座標によつて暫く話を進める。この中央面が変形によつて  $z$  方向に変位  $\xi$  を起す事によつて剛膜内にたくわえられる変形エネルギー  $U$  を曲げスティフネスによる部分  $U_1$  と中央面の伸張による部分  $U_2$  にわけて考え、それらを夫々次のように評価する。

(a) 曲げスティフネスによる変形エネルギーの計算、剛膜内の任意点  $x, y, z$  では、あらかじめ加えられた一様な引張り応力  $T$  によつて既に次式のような歪が生じているとみなされる。

$$e_{xxo} = e_{yyo} = T(1-\sigma)/E = e_o, \quad e_{xyo} = 0 \quad (1)$$

ここに  $e_{xxo}, e_{yyo}$  は夫々  $x, y$  方向のたて歪成分  $e_{xx}, e_{yy}$  の、また  $e_{xyo}$  は同じく横歪  $e_{xy}$  の初期値すなわち彎曲が起る前の値を示す。

次に之が  $x$  方向に曲率半径  $R_x$  で彎曲されるならば  $e_{xx}$  は

$$e_{xx} = e_o + (1+e_o)z/R_x \\ = e_o - (1+e_o)z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

となるのが第1図のような考察から容易に理解される。同様に

$$e_{yy} = e_o - (1+e_o)z \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -2z(1+e_o) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$$

が成立つこともわかる。之等の結果を等方性な弾性体の応力と歪に関する一般関係に於て応力の  $z$  方向成分を零と<sup>(7)</sup>おいて得られる。

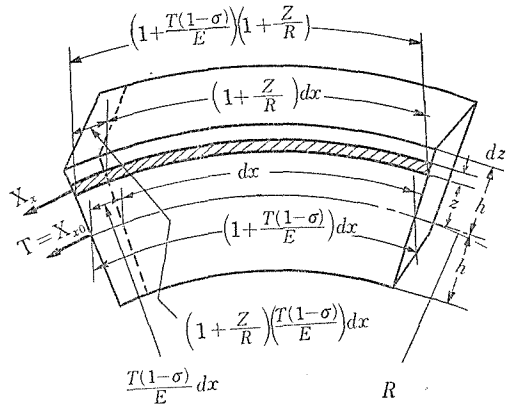
$$X_x = (e_{xx} + \sigma e_{yy}) \cdot E / (1-\sigma^2),$$

$$Y_y = (e_{yy} + \sigma e_{xx}) \cdot E / (1-\sigma^2),$$

$$X_y = Y_x = e_{xy} \cdot E / 2(1+\sigma)$$

に代入すれば、それらの応力成分は次のようになる。

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[ e_o - z(1+e_o) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \sigma \left\{ e_o - z(1+e_o) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right\} \right]$$



第 1 図

$$\begin{aligned} Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left[ e_0 - z(1+e_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \sigma \left\{ e_0 - z(1+e_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right\} \right], \\ X_y &= -\frac{E \cdot z}{1-\sigma^2} \left[ 1+e_0 \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

一方弯曲によつてあらたに生じた歪成分 (弯曲のないときの値が零となる歪) は次のように表わされる。

$$e'_{xx} = -z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad e'_{yy} = -z \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \quad e'_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

弯曲する以前の応力成分が  $X_{x0} = Y_{y0} = T, X_y = 0$  であつたことに注意すれば, この弯曲によつて剛膜内にたくえられるポテンシャルエネルギー  $U_1$  は之を (2) (3) 両式の結果とともに次式に代入することによつて得られる。

$$\begin{aligned} U_1 &= \iint_S \left[ \int_{-h}^{+h} \left\{ \left( \frac{X_{ox} + X_x}{2} \right) e'_{xx} + \left( \frac{Y_{yo} + Y_y}{2} \right) e'_{yy} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{X_{yo} + X_y}{2} \right) e'_{xy} \right\} dz \right] dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

ただしここに  $S$  は半径  $a$  の膜面全体にわたることを示し, また ( ) 内の値は弯曲前後の応力成分の平均値を表すものである。そして簡単な演算の結果次の表示が得られる。

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E+T(1-\sigma)}{3(1-\sigma^2)} h^3 \iint_S \left[ \left\{ \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

(b) 中央面の伸長による変形エネルギーの計算, これは単なる膜の場合と全く同様の考え, 即ちそれは単位長さ当りの張力  $2h \cdot T$  に, 伸長による増加面積に乘じたものとしてつぎのように計算される。<sup>(3)・(5)</sup>

$$U_2 = hT \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6)$$

ただしここでは  $T$  が剛膜断面の単位面積当りで与えられているため,  $2h$  だけ普通の表現と異なることになつた。

### 3 運動方程式と固有振動

前節の結果を用いて剛膜の運動方程式を導き, 固有振動をしらべてみよう。まず,  $\xi$  に変動  $\delta \xi$  を与えたときの変形エネルギー  $U_1, U_2$  の変分は次のように計算される。

$$\delta U_1 = \frac{2[E+T(1-\sigma)] h^3}{3(1-\sigma^2)} \iint_S \nabla^4 \xi \delta \xi dS \quad (7)$$

$$\delta U_2 = -2hT \iint_S \nabla^2 \xi \delta \xi dS \quad (8)$$

ここに  $\nabla^2$  はラプラシアン, また  $\nabla^4$  は  $\nabla^2 \cdot \nabla^2$  なる演算子を示すものとする。(5), (6)両式から (7) (8) 両式に至る途中の演算はかなり長いが, (5)~(7)の誘導は板の変形エネルギーの変分を求めると, また(6)~(8)のそれは膜の場合のものと同じやり方で行われるから省略した。(7)式の表現は板の場合のヤング率  $E$  の代りに  $E+T(1-\sigma)$  をおいたもので, ヤング率の補正項は引張られた棒の結論を形式的に流用した Mason の結果<sup>(2)</sup>

と稍異なっている。

(7), (8)の結果を加えたものを全ポテンシャルエネルギー $U$ の変分 $\delta U$ としてとり、運動のエネルギーの変分 $\delta E_k$ , 外力 $F(x, y, t)$ による仮想仕事を $\delta L$ とするなど以下全く板の振動に対する運動方程式を導く場合と同様にして剛膜の運動方程式

$$\frac{[E+(1-\sigma)T]}{3(1-\sigma^2)} h^3 \nabla^4 \xi - h T \nabla^2 \xi + \rho h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F \quad (9)$$

が得られる。

自由振動の式即ち(9)式の右边を零とおいて得られる斉次方程式。

$$D_1 \nabla^4 \xi - D_2 \nabla^2 \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

の解で、所定の境界条件を満足するものがすべて求まるならば、一般の変位もそれらから容易に得られることになる。ここに $D_1, D_2$ は夫々次の量である。

$$D_1 = \frac{h^3 \{E + T(1-\sigma)\}}{3(1-\sigma^2)}, \quad D_2 = T/\rho \quad (11)$$

(10)式の解のタイムファクターが $\exp(j\omega t)$ の形であるとすれば、問題は結局

$$(D_1 \nabla^4 - D_2 \nabla^2 - \omega^2) \xi = 0 \quad (12)$$

を周辺クランプの境界条件即ち $r=a$ で

$$\xi(r) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0 \quad (13)$$

について解くことになる。但しこの $r$ は極座標 $(r, \theta)$ で原点を剛膜の中心においたものである。

(12)式を満足する函数のうち、物理的に無意味なものを除けば次の二種が考えられる。

$$J_m(k_{mn} r) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad I_m(k_{mn} r) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \quad (14)$$

ただしここに $J_m, I_m$ はそれぞれ $m$ 次の第一種ベッセル函数及びその変形ベッセル函数で、振動板などの場合と同じく $m$ は振動状態における節直径の本数、また $n$ は周辺円も含めた節円の数に対応し、 $m=0, 1, 2, 3, \dots$ 及び $n=1, 2, 3, \dots$ などの値をとる。そして更に $k_{mn}, k'_{mn}$ は第 $m, n$ 固有振動数を $\omega_{mn}$ で表すと次の関係が成立たねばならない。

$$k_{mn}^2 = \frac{\sqrt{D_2^2 + 4D_1 \omega_{mn}^2} - D_2}{2D_2}, \quad k'_{mn} = \frac{\sqrt{D_2^2 + 4D_1 \omega_{mn}^2} + D_2}{2D_2} \quad (15)$$

固有振動の振動状態を表す半径方向の函数は(14)式によれば

$$\Phi_{mn} J_m(k_{mn} r) + \Phi'_{mn} I_m(k'_{mn} r) \quad (16)$$

のように書けることがわかる。ここに $\Phi_{mn}, \Phi'_{mn}$ はある定数で、この式に対して、(13)式の境界条件を適用することにより

(脚註) \*1 本文では角速度または角周波数も一括して“振動数”と呼ぶことにする。

$$\begin{vmatrix} J_m(\alpha_{mn}) & I_m(\alpha'_{mn}) \\ -\alpha_{mn} J_{m+1}(\alpha_{mn}) & \alpha'_{mn} I_{m+1}(\alpha'_{mn}) \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$\text{及び} \quad \frac{\Phi'_{mn}}{\Phi_{mn}} = -\frac{J_m(\alpha_{mn})}{I_m(\alpha'_{mn})} \quad (18)$$

の二つの条件式が得られる。式中の  $\alpha_{mn}$ ,  $\alpha'_{mn}$  は第  $m$ ,  $n$  固有振動に対する規準定数の対で (15) 式の  $k_{mn}$ ,  $k'_{mn}$  とは夫々次の関係にある。

$$\alpha_{mn} = k_{mn} a, \alpha'_{mn} = k'_{mn} a, \alpha_{mn} \leq \alpha'_{mn} \quad (19)$$

之等の結果によれば一般に第  $m$ ,  $n$  固有振動姿態が次のような定数  $\Psi_{mn}$  で表わされることわかる。

$$\Psi_{mn} = \left\{ J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right) - \frac{J_m(\alpha_{mn})}{I_m(\alpha'_{mn})} I_m\left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a}\right) \right\} \cos m\theta \quad (20)$$

これらの結果が  $\alpha_{mn} = \alpha'_{mn}$  のときは周辺クランプの円板に、また  $\alpha'_{mn} \rightarrow \infty$  のとき曲げスティフネスのない円膜の場合になってしまうことをたしかめることは困難ではない。

#### 4 規準定数に関する数値計算

剛膜では単純な板や膜のちと異つて、規準定数の組  $\alpha_{mn}$ ,  $\alpha'_{mn}$  の値はある特定の  $m$ ,  $n$  を指定しても膜面条件によつて変り、定つた値にならない。それならば、それら規準定数の値を決定する量は何だろうか。筆者は次のような状態量を取りあげた。(15)の二式から  $\omega_{mn}$  を消去して(19)の関係を使うと、

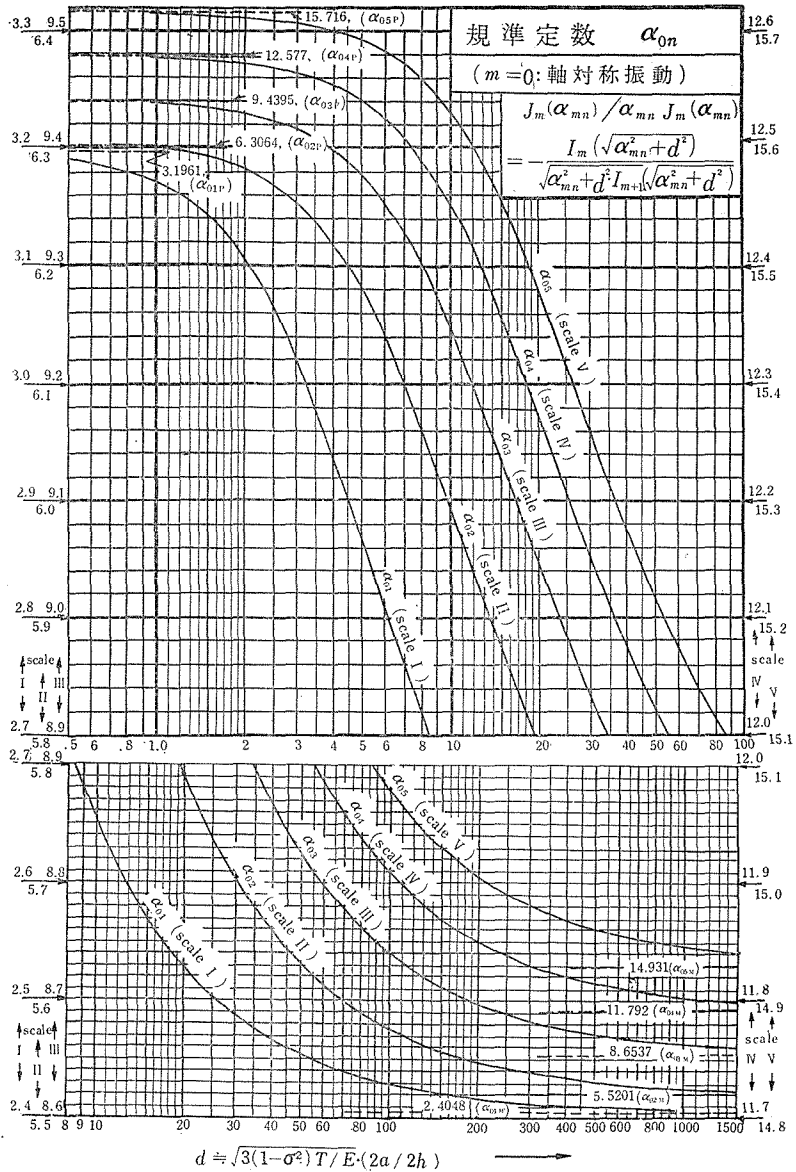
$$\alpha'_{mn}{}^2 = \alpha^2 mn + d^2 \quad (21)$$

ただしここに  $d$  は使用材料の強性的物質と寸法だけによつてきまるディメンションのない量で

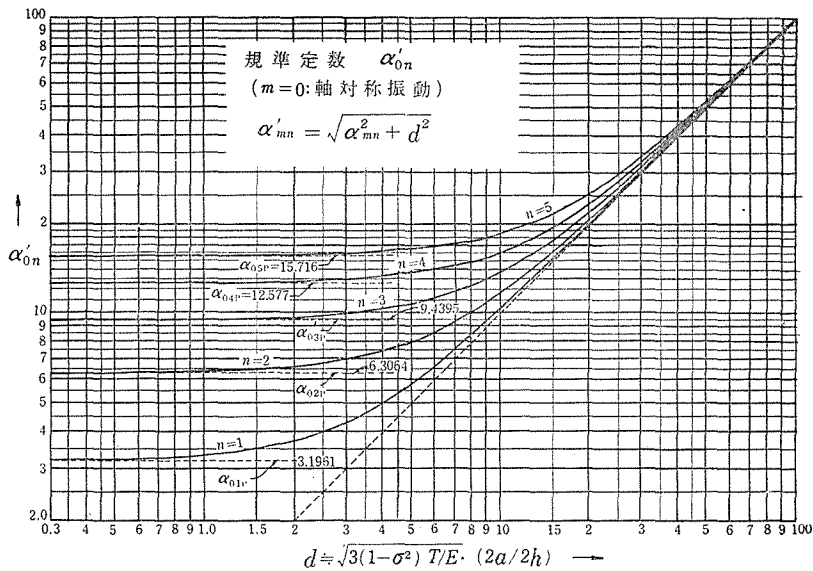
$$\begin{aligned} d &= a\sqrt{(D_2/D_1)} = \sqrt{3(1-\sigma^2)T/\{E+T(1-\sigma)\}}(2a/2h) \\ &= \sqrt{3(1-\sigma^2)T/E} \cdot (2a/2h) \quad (\because T \ll E) \end{aligned} \quad (22)$$

で知られるように張力  $T$  とヤング率  $E$  の比の平方根に、直径と厚さの比を乗じたものの約一倍半余りの数で、これが決まれば(17)式と(21)式によつて対応する  $\alpha_{mn}$  及び  $\alpha'_{mn}$  の組が決定されることになる。勿論  $d \rightarrow 0$  が単純な周辺クランプの円板の場合に、また  $d \rightarrow \infty$  がスティフネスのない円形膜の場合になる。

実際問題に当つてその都度(17)の超越方程式と(21)とを連立させてその根の組を求めることはかなりの手数を要するので、実用上の便利のために次のような手順で  $d$  と軸対称固有振動に対する  $\alpha_{on}$ ,  $\alpha'_{on}$  等との関係をかなり詳細に求めたが、その結果の概要を第2図で  $A(\alpha_{on})$  及び同図  $B(\alpha'_{on})$  に示した。之等の変化を要約すれば次の通りである。即ちまず周辺クランプの円板では  $d=0$ 、したがつて  $\alpha_{on} = \alpha'_{on}$  (之を  $\alpha_{onP}$  で表わす) 既に周知の値である。次の張力  $T$  を増すにしたがい、 $d$  の値もその平方根に比例して増大し、 $\alpha_{on}$ ,  $\alpha'_{on}$  は夫々単調に減少または増加してゆき、終りに  $d \rightarrow \infty$  となる時には  $\alpha_{on}$  は円形膜の規準定数即ち  $J_0(x)=0$  の根と一致する (之を  $\alpha_{onM}$  と書く) が他方  $d'_{on}$  の方は充分大きい  $d$  に対してはほとんどそれと等しいとみることが出来る。



第 2 図 A

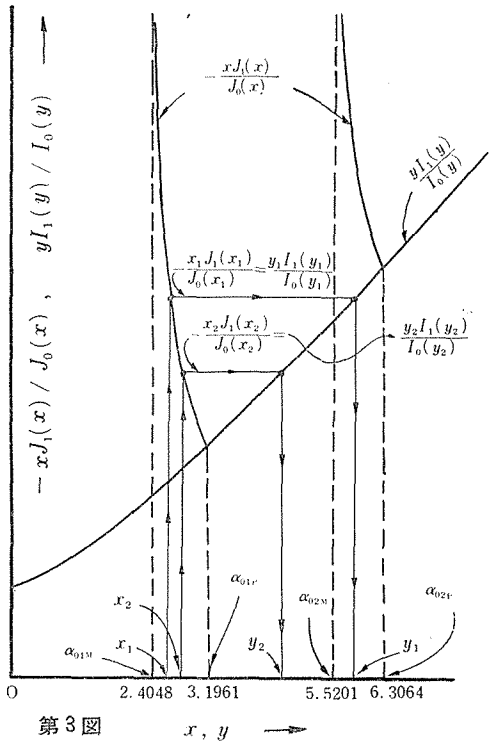


第 2 図 B

ところで実際の数値計算は次のような手順でなされたのである。条件式 (17) を書きかえたと次の形になる。

$$-x \frac{J_1(x)}{J_0(x)} = y \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \quad (23)$$

この式の左右両辺は夫々変数  $x, y$  だけの関数になっていて、それらの変化の状況は第3図のように左辺は不連続点をもつが、それ以外の  $x$  に対しては単調減少する関数であり、また右辺はすべての正の  $y$  に対してその値とともに単調に増加する。もし  $x$  に  $\alpha_{onM} \leq x \leq \alpha_{onP}$  の値を代入するならば左辺は直ちに数値計算され、一方それと等しい値を右辺の関数にとらせるような  $y$  の値は、関数の変化が単調でしかも緩慢なことからかなり容易に求めることができる。このように  $x, y$  の組がきまればそれに対応する  $d$  の値は (21) から直ちに求められる。こうした手順で  $x$  に  $\alpha_{onM} \leq x \leq \alpha_{onP}$  の範囲で種々な値を順次とらせてゆけば、必要な関係が詳細に求められる。之等の数値計算には文献 (3)~(5) の関数値が用いられたが、必



第 3 図

要に応じて一部は(23)式の右辺の値を直接数値計算によつて求めて補つた。

## 5 固有振動数に関する数値計算

(15) 式から導かれる次の式は固有振動数を求めるに都合が良い。

$$\omega_{mn} = \sqrt{D_1} \cdot \alpha_{mn} \cdot \alpha'_{mn} / a^2 \quad (24)$$

ところで実際には、それらの固有振動数を既によく知られた円形膜や周辺クランプの円板のものと比較して示した方が便利であると思われるので、次に述べる計算はこの点に留意してなされたものである。

まず周辺クランプの円板では (24) 式で  $\alpha_{mn} = \alpha'_{mn} = \alpha_{mnP}$  が成り立つから、そのときの固有振動を  $\omega_{mnP}$  で表わせば  $\omega_{mnP} = D_1^{1/2} (\alpha_{mnP}/a)^2$  となり、之と同一の寸法で同一材料からなる張力  $T$  で引き張られた剛膜の固有振動数たる (24) 式の  $\omega_{mn}$  とを比べてみると、張力  $T$  の影響として固有振動数が

$$\eta_{mnP} = \frac{\omega_{mn}}{\omega_{mnP}} = \frac{\alpha_{mn} \alpha'_{mn}}{\alpha_{mnP}^2} \quad (25)$$

倍に増大することがわかる。

また同様に剛膜の固有振動数を

$$\omega_{mn} = \frac{\sqrt{D_2} \cdot \alpha_{mn} \cdot \alpha'_{mn}}{a \sqrt{\alpha_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2}} \quad (26)$$

の形で表し、単純な膜では  $d = (\alpha_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{mn} \rightarrow \alpha_{mnM}$ ,  $\alpha'_{mn} \rightarrow \infty$  ( $\equiv d$ ) になることに注意すれば、剛膜と等しい寸法、材料の曲げスティフネスを無視した理想的円形膜の固有振動数  $\omega_{mnM}$  との比は

$$\eta_{mnM} = \frac{\omega_{mn}}{\omega_{mnM}} = \frac{\alpha_{mn} \alpha'_{mn}}{\alpha_{mnM} \sqrt{\alpha_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2}} \quad (27)$$

で表わされることがわかる。

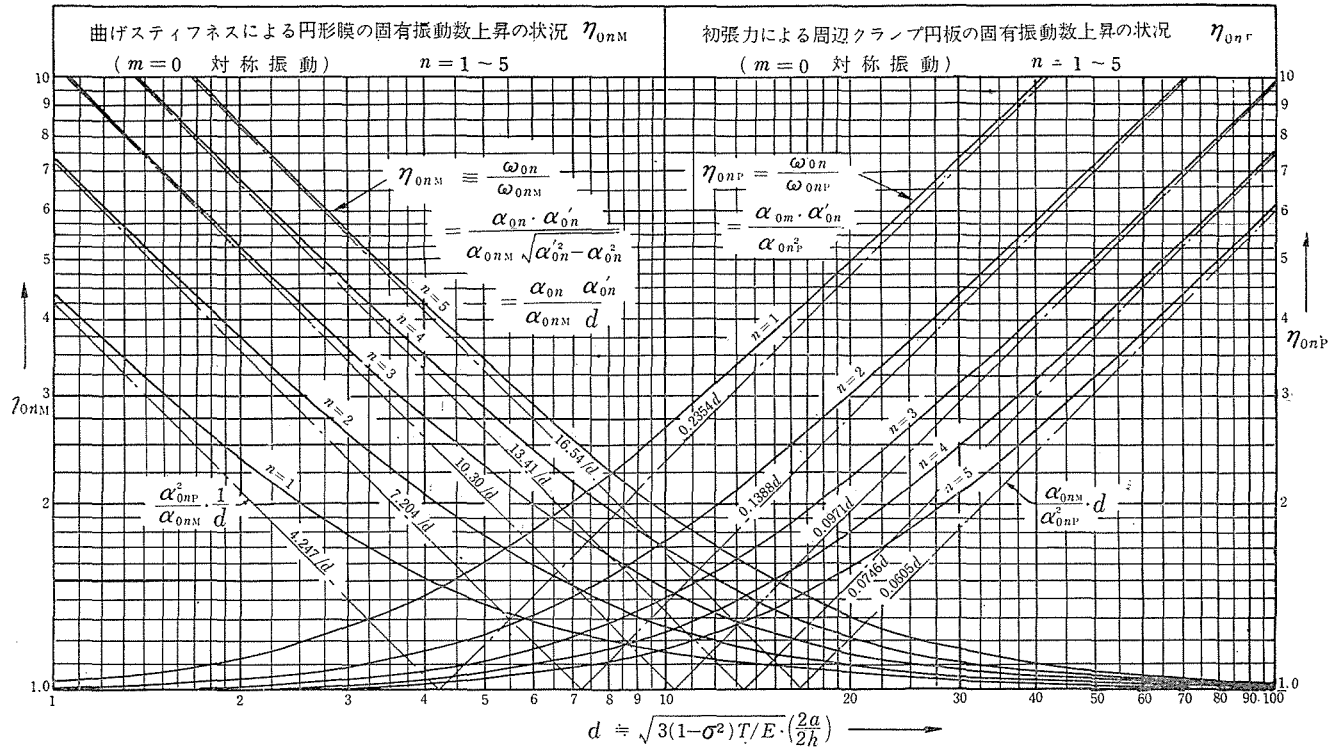
第4図Aは  $d$  の値とこれら固有振動数の上昇率の関係を  $m=0$  即ち軸対称振動について示したもので、之によつて膜における曲げスティフネスの効果や円板に張力を加えたときの影響など概観される。同図Bは円膜に対する曲げスティフネスの効果を稍細かく示したものである。

## 6 考 察

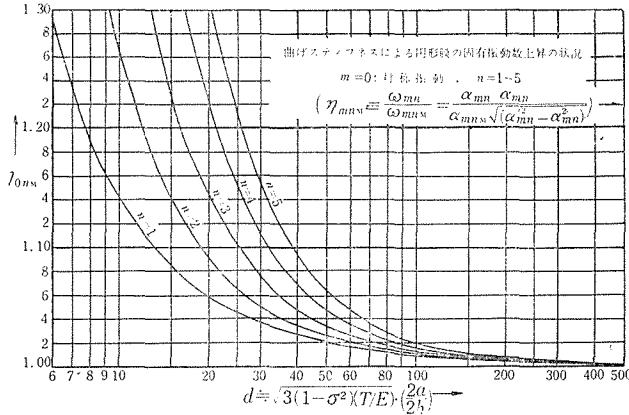
前節の結果について若干の意見を述べ、さらに二三の数値例によつて考察してみようと思う。

第4図Aを一見してすぐわかるように、固有振動数に対する影響としては、膜に於ける曲げスティフネスの効果は高次振動になる程強く、また円板に加わる初期張力の効果は逆に低次振動程大きい。最低次振動即ち  $m=0$ ,  $n=1$  に対して数値を示せば、直径と厚さの比の自乗と、ヤング率と初期張力の比との積の数値が1以下のときには単純な周辺クランプの円膜、またその値が百以上のときは曲げスティフネスをもたない円膜と考えても固有振動数の変化は一割以下に止まることがわかつた。





第 4 図 A



第 4 図 B

数値例として次に示すような条件の場合をしらべてみる。<sup>※2</sup>

材料：金属チタン， $E=1.13 \times 10^{12}$  dyne/cm<sup>2</sup>， $2h=0.0017$ cm， $2Th=2.26 \times 10^6$  dyne/cm， $2a=1.72$ cm，

このとき  $\sigma=0.3$  と仮定すれば  $d$  は 57.4 となるが，第 4 図 B によれば軸対称固有振動の振動数は，曲げスティフネスの効果を無視した場合の 1.02 倍 ( $n=1$ )，ないし 1.05 ( $n=5$ ) 倍になることがわかる。したがってこの場合実用上重要な低次振動に関する限り普通の円膜と考えるも差支えないことが判るが，若し張力がひと桁少くて  $2Th=0.226 \times 10^6$  dyne/cm になつている場合には  $d=18.1$  となり，最低次振動数は約 7%， $n=5$  については 36% ものちがいがみられる。

また他の例について述べると，いま  $a=2.5$ cm， $h=0.025$ cm のチタニウム製薄板の周辺をクランプするに際して，一様な初期張力をあたえてその最低次固有振動の振動数を，張力を加えない場合の 2 倍にするには，第 4 図 A において  $\eta_{01P} = 2.0$  の点によつて  $d=6.8$  が必要であり，前記の弾性定数と共にそれを

$$T = E \cdot d^2 \cdot (h/a)^2 / 3(1-\sigma^2)$$

に代入すれば所要の  $T$  は，1.94 dyne/cm<sup>2</sup> 即ち約 20kg/mm<sup>2</sup> であることが判る。しかしこのとき  $n=5$  の振動は僅かに 1.25 倍に上昇するだけで張力の影響ははるかに少い。

## 7 結 言

以上周辺がクランプされ，且つ一様な張力を予め与えられた円形剛膜の変形エネルギーをしらべて運動方程式を導き，その固有振動に対して数値計算を行つて，膜剛の曲げスティフネスの影響や，引張られた板に対する張力の効果を定量的に検討した。

その結果一般に膜の曲げ剛さの効果は高次振動程強く，また板に与える初期張力の影響は低次振動程強いことがわかつた。そしてとくに最低次振動では，剛膜の直径と厚さ

※ 2 之等の数値はポアソン比  $\sigma$  を除いてはすべて音響標準器として採用された MR-103 コンデンサマイクロホンの振動膜<sup>(16)(18)</sup>の値を揚げた。

との比の自乗と、ヤング率で初期張力を割つたものとの積が1以下かまたは100以上のときには夫々周辺クランプの円板、または円形膜と考えても大して差支えないことがわかつた。

本文中に於ける数値計算結果はほとんどが比較的 重要と思われる軸対称振動 ( $m=0$ ) に限られたが、非対称振動に対しても全く同様な方法で計算が進められる。

また固有函数として得られた (20) 式の結果はそれを規準化 (normalization) することにより規準函数を作つておくことは、その値の同心円内における積分値を求めることと共に振動伝送系としての諸特性を表示するの(19)(20)に都合が良い。そしてまたそれらの値によつて示される伝送特性が張力や曲げスティフネス等によつていかに支配されるかを明らかにするには、機器設計上極めて重要であるが、之等については次の機会に述べる予定である。

終りに本研究に関して有益な御教えを賜つた日本電信電話公社電気通信研究所音響研究室長早坂寿雄博士、同室増沢健郎博士ならびに小林理学研究所能本乙彦博士、さらに当学部内の関係の諸先生に深く感謝申上げる次第である。また本文後半に記した数値計算の大部分を担当し、注意深い考察により、筆者に有力な協力をしていただいた多摩川精機株式会社尾身芳郎君に深く敬意を表するものである。

## 文 献

- 1) 安田：日本音響学会雑誌 Vol. 10, No1 (1954) Pp. 5~9.
- 2) W. P. Mason: "Electromechanical Transducers and Wave Filters" (D. van Nostrand, N. Y. 1948) Chapter V P. 158~
- 3) Lord Rayleigh: "Theory of Sound" Vol. I, P. 305.
- 4) 同前 P. 352.
- 5) 松平, 早坂：電永通信学会雑誌 昭和12年9月号, P. 741.
- 6) 松平, 早坂：電気通信学会雑誌 昭和12年8月号
- 7) A. E. H. Love: "A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity" (Cambridge Univ. Press, 1934) P. 103 Eg. (22).
- 8) Rayleigh: 文献 3, Vol. I, P. 296.
- 9) Mason: 文献 2, P. 161, Eg. (5.12)
- 10) 早坂: "音響振動論" (コロナ社, 1948) 第6章 P. 156~.
- 11) 同前 P. 114
- 12) 同前 P. 112
- 13) 林: 高等函数表 (岩波書店, 1947)
- 14) 林: ベッセル函数表 (岩波書店, 1943)
- 15) G. N. Watson: "Theory of Bessel Function" (Cambridge Univ. Press 1922).
- 16) 早坂, 増沢, 鈴木: 通研月報 Vol. 6, No. 11, Pp. 667—683.
- 17) 早坂: 日本音響学会雑誌 Vol. 10, No. 3, (1954) Pp. 168—176.
- 18) 早坂, 増沢, 鈴木: 電気通信学会雑誌 Vol. 37, No. 4, (1954) Pp. 287—292.
- 19) 安田: 電気通信学会雑誌 Vol. 37, No. 1, (1954) Pp. 37—42.
- 20) 安田: 電気通信学会雑誌 Vol. 37, No. 2, (1954) Pp. 109—113.

**Summary****VIBRATION OF STRETCHED CIRCULAR PLATE**

BY

Tsutomu YASUDA

(Department of Communication Engineering, Faculty of Engineering)

A stretched circular diaphragm, which is not only under permanent tensile stress but also with some bending stiffness due to its elastic characters, is treated. An expression of the potential energy taking account of the bending stiffness and the permanent tensile stress is obtained. And from this results the equation of motion, the normal functions and the normal frequencies are found out. Then numerical investigations of the normal vibrations are carried out. By these investigations, it has become easy to estimate the effects of the bending stiffness in the normal vibrations of a circular membrane and of the permanent tensile stress in the case of a stretched circular plate.