角加速度を有する回転円板の変位と歪[1]

（第 6 報）

竹　　多　　勇*

（信州大学工学部機械工学科教室）

第5報[2]に於て，厚さが双曲線的に変化する回転円板が角加速度を有する場合円板に生ずる応力の一般式を求め，又その破損限界曲線を誘導して，比較検討した。本報告では円板の変形状態を明かにするために，切線方向及び半径方向の変位と円板面内の主歪，軸方向の主歪を求めた。尚お最大剪断応力と対応させるため最大剪断歪の式を添加した。

1　切線方向の変位，η

a)　一般の場合

$$\tau_{r.\theta}=Ge_{r.\theta}=G\left(\frac{d\eta}{dr}-\frac{\eta}{r}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

然るに，
$$\tau_{r.\theta}=-\sigma_i\,(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{\lambda^{\alpha-2}-\lambda^2}{(4-\alpha)}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}\,(1-1/n^{2-\alpha})\,\lambda^{\alpha-2}\right\}\cdots(2)$$

故に
$$\frac{d\eta}{dr}-\frac{\eta}{r}=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{\lambda^{\alpha-2}-\lambda^2}{(4-\alpha)}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-1/n^{2-\alpha})\lambda^{\alpha-2}\right\}\cdots(3)$$

但しGは材料の剛性率で，$\lambda=r/r_2$である。(3)は線型微分方程式でその解は，

$$\eta=e^{\int\frac{1}{r}dr}\left[\int e^{-\int\frac{1}{r}dr}\left\{-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\right\}\left\{\frac{\lambda^{\alpha-2}-\lambda^2}{(4-\alpha)}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-1/n^{2-\alpha})\lambda^{\alpha-2}\right\}dr+C'\right]$$

$e^{\int\frac{1}{r}dr}=r,\ e^{-\int\frac{1}{r}dr}=\frac{1}{r}$　を代入して積分すると，

$$\eta=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{1}{(4-\alpha)}\left(\frac{r^{\alpha-1}}{(\alpha-2)r_2^{\alpha-2}}-\frac{r^3}{2r_2^2}\right)+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-1/n^{2-\alpha})\frac{r^{\alpha-1}}{(\alpha-2)r_2^{\alpha-2}}\right\}+C'r\cdots\cdots(4)$$

C'は積分常数である。内周縁$r=r_1$で$\eta=\eta_1$とすると，$\eta_1/r_1=\theta_1$は円板が車軸に附着する点の捩れ角となる。$r=r_1$で，$\eta=r_1\theta_1$なる内周縁条件からC'が定められる。

$$C'=\theta_1+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{1}{(4-\alpha)}\left\{\frac{1}{(\alpha-2)n^{\alpha-2}}-\frac{1}{2n^2}\right\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-1/n^{2-\alpha})\frac{1}{(\alpha-2)n^{\alpha-2}}\right]\cdots\cdots(5)$$

(5)を(4)に代入して，任意点の変位ηが求められる。今$\eta/r_2=\bar{\eta}$と置くと，

$$\bar{\eta}=\theta_1\lambda+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{1}{(4-\alpha)}\left\{\frac{\lambda}{(\alpha-2)}(1/n^{\alpha-2}-\lambda^{\alpha-2})-\frac{\lambda}{2}(1/n^2-\lambda^2)\right\}-\frac{\mu}{(\alpha-2)^2}(1-1/n^{2-\alpha})\,\lambda\,(1/n^{\alpha-2}-\lambda^{\alpha-2})\right]\cdots\cdots(6)$$

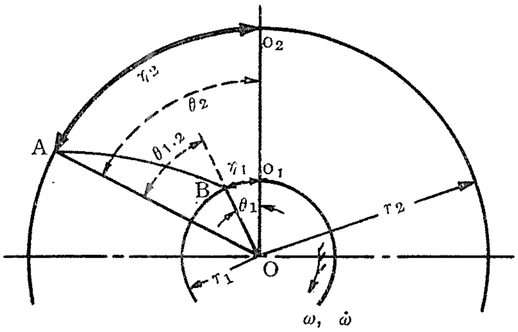
---

* 信州大学教授

$r = r_2$ では $\bar{\eta}=\eta_2/r_2=\theta_2$ で，$\lambda=1$ と置いて，

$$\theta_{1.2}=\theta_2-\theta_1=\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{1}{(4-\alpha)}\left\{\frac{1}{(\alpha-2)}(1/n^{\alpha-2}-1)-\frac{1}{2}(1/n^2-1)\right\}-\frac{\mu}{(\alpha-2)^2}\frac{(n^{\alpha-2}-1)^2}{n^{\alpha-2}}\right]\cdots\cdots(7)$$

第 1 図



$\theta_{1.2}$は円板の内外両周縁の相対捩れ角である。(第1図参照)

b) 特別の場合，$\alpha=0$

一定厚さの円板については，一般式(6)，(7)中に $\alpha=0$ と置いて求められる。

$$\bar{\eta}=\theta_1\lambda+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\frac{1}{8}\left[\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}-n^2\right)-\lambda\left(\frac{1}{n^2}-\lambda^2\right)-2\mu(1-1/n^2)\lambda(n^2-1/\lambda^2)\right]\cdots\cdots(8)$$

$$\theta_{1.2}=\theta_2-\theta_1=\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\frac{1}{8}\left[(2-n^2-1/n^2)-2\mu(n^2-1)^2/n^2\right]\cdots\cdots(9)$$

c) $\alpha=2$ の場合

$\tau_{r.\theta}$は一般式が適用されぬから，ηは別に求めねばならぬ。

$$\tau_{r.\theta}=-\sigma_i(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{1}{2}(1-\lambda^2)+\mu\log n\right\}\cdots\cdots(10)$$

(1)を用いて，$$\frac{d\eta}{dr}-\frac{\eta}{r}=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{1}{2}(1-\lambda^2)+\mu\log n\right\}\cdots\cdots(11)$$

(11)の解として，$$\eta=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{r}{2}(\log r-r^2/2r_2^2)+\mu r\log n\log r\right]+C'r\cdots\cdots(12)$$

(a)の場合と同様の内周縁条件を用いて，C′が定められる。

$$C'=\theta_1+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{\frac{1}{2}(\log r_1-1/2n^2)+\mu\log n\log r_1\right\}\cdots\cdots(13)$$

(13)を(12)に代入して，

$$\bar{\eta}=\theta_1\lambda+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{\lambda}{2}\left\{\log(1/n\lambda)-\frac{1}{2}(1/n^2-\lambda^2)\right\}+\mu\lambda\log n\log(1/n\lambda)\right]\cdots(14)$$

$$\theta_{1.2}=\theta_2-\theta_1=\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left[\frac{1}{2}\left\{\log(1/n)-\frac{1}{2}(1/n^2-1)\right\}-\mu(\log n)^2\right]\cdots\cdots(15)$$

d) $\alpha=4$ の場合

$\alpha=2$ の場合と同様ηは別に求めねばならぬ。

$$\tau_{r.\theta}=-\sigma_i(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{-\lambda^2\log\lambda+\frac{\mu}{2}(n^2-1)\lambda^2\right\} \cdots\cdots(16)$$

(1)を用いて次の微分方程式を得る。

$$\frac{d\eta}{dr}-\eta/r=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\left\{-\lambda^2\log\lambda-\frac{\mu}{2}(n^2-1)\lambda^2\right\} \cdots\cdots(17)$$

(17)の解として,

$$\eta=-\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)r\left\{-\log\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}(n^2-1)\right\}\frac{\lambda^2}{2}+C'r \cdots\cdots(18)$$

(a)と同様，内周縁条件を用いて，C'が定められる。

$$C'=\theta_1+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\frac{1}{2n^2}\left\{-\log(1/n)+\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}(n^2-1)\right\} \cdots\cdots(19)$$

(19)を(18)に代入して,

$$\bar{\eta}=\theta_1\lambda+\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\frac{1}{2}\left\{\lambda^3\log\lambda-\frac{\lambda}{n^2}\log(1/n)+\frac{\lambda}{2}(1/n^2-\lambda^2)+\frac{\mu}{2}(n^2-1)\lambda(1/n^2-\lambda^2)\right\} \cdots\cdots(20)$$

$$\theta_{1,2}=\theta_2-\theta_1=\frac{\sigma_i}{G}(\dot{\omega}/\omega^2)\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^2}\log n+\frac{1}{2}(1/n^2-1)-\frac{\mu}{2n^2}(n^2-1)^2\right\} \cdots\cdots(21)$$

2 半径方向の変位，ξ

a) 一般の場合

$$\xi=B_1r^{\phi_1}+B_2r^{\phi_2}+ar^3 \cdots\cdots(22)$$

但し $$a=-\frac{(1-\nu^2)}{Eg}\frac{\gamma\omega^2}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \cdots\cdots(23)$$

B_1，B_2に第5報の(19)，(20)を代入し，又$\bar{\xi}=\xi/r_2$と置いて，

$$\bar{\xi}=\frac{\sigma_i}{E}\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}\lambda}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\left\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\right\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\left\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}\cdot\frac{1}{n^{\phi_2-1}}-\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}\cdot\frac{1}{n^{\phi_1-1}}\right\}\right]-\frac{\sigma_i}{E}\cdot\frac{(1-\nu^2)\lambda^3}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \cdots\cdots(24)$$

内周縁$r=r_1$で$\lambda=1/n$，$\bar{\xi}$の値を$\bar{\xi}_1$とすると，

$$\bar{\xi}_1=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)n^{\alpha-3}}{E(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\left\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\right\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}\cdot\frac{(1-n^{\alpha-2})}{n^{\alpha-2}}\left\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)}\right\}\right]-\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{E\{8-\alpha(3+\nu)\}n^3} \cdots\cdots(25)$$

外周縁$r=r_2$で$\lambda=1$，$\bar{\xi}$の値$\bar{\xi}_2$とすると，

$$\xi_2=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}\cdot(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}$$
$$-\frac{1}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{E\{8-\alpha(3+\nu)\}}\quad\cdots\cdots(26)$$

b) 特別の場合，$\alpha=0$

一定厚さの場合は$\alpha=0$で(a)の諸式中に$\alpha=0$と置いて求められる。

$$\xi=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)\lambda}{E}\Big[\frac{(3+\nu)}{8}\Big\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)+\frac{1}{(1-\nu^2)n^2\lambda^2}\Big\}$$
$$+\frac{\mu}{2}\Big\{1/(1+\nu)+\frac{1}{(1-\nu)n^2\lambda^2}\Big\}-\frac{\sigma_i(1-\nu^2)\lambda^3}{8E}\quad\cdots\cdots(27)$$

$$\xi_1=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{En}\Big[\frac{(3+\nu)}{8}\Big\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)+1/(1-\nu)\Big\}+\frac{\mu}{2}\Big\{1/(1+\nu)+1/(1-\nu)\Big\}\Big]$$
$$-\frac{(1-\nu^2)\sigma_i}{8n^3E}\quad\cdots\cdots(28)$$

$$\xi_2=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{E}\Big[\frac{(3+\nu)}{8}\Big\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)+\frac{1}{(1-\nu)n^2}\Big\}+\frac{\mu}{2}\Big\{1/(1+\nu)+\frac{1}{(1-\nu)n^2}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{8E}\quad\cdots\cdots(29)$$

c) $\alpha=2$の場合

B_1，B_2の値は一般式が適用されない。第5報(53)，(54)を(22)に代入し，且つϕ_1，ϕ_2は第5報(52)を用いてξが求められる。

$$\xi=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)\lambda}{E(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{\sigma_i(1+\nu)\lambda^3}{2E}\quad\cdots\cdots(30)$$

$$\xi_1=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{En(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})$$
$$+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\frac{\mu\log n}{n^{\alpha-2}}\Big\{1/(\phi_1+\nu)-1/(\phi_2+\nu)\Big\}\Big]$$
$$-\frac{\sigma_i(1+\nu)}{2En^3}\quad\cdots\cdots(31)$$

$$\xi_2=\frac{\sigma_i(1-\nu^2)}{E(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{(1+\nu)\sigma_i}{2E}\quad\cdots\cdots(32)$$

但し，$\phi_1=1+\sqrt{2(1+\nu)}$，$\phi_2=1-\sqrt{2(1+\nu)}$ $\cdots\cdots(33)$

d)　$\alpha=4$ の場合

B_1，B_2は一般式が適用出来るから，$\bar{\xi}$，$\bar{\xi}_1$，$\bar{\xi}_2$の値は(a)の場合の諸式中に $\alpha=4$ と置けば求められる。

3　垂直歪成分，ε_r と ε_θ

a)　一般の場合

(22)のξの式からε_r，ε_θは次の様になる。

$$\varepsilon_r=\frac{d\xi}{dr}=B_1\phi_1 r^{\phi_1-1}+B_2\phi_2 r^{\phi_2-1}+3ar^2 \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\varepsilon_\theta=\xi/r=B_1 r^{\phi_1-1}+B_2 r^{\phi_2-1}+ar^2 \quad\cdots\cdots(35)$$

$\varepsilon_r E/\sigma_i=\bar{\varepsilon}_r$，$\varepsilon_\theta E/\sigma_i=\bar{\varepsilon}_\theta$と置き，$B_1$，$B_2$に第5報の(19)，(20)を代入して，

$$\bar{\varepsilon}_r=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}\lambda^{\phi_1-1}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}\lambda^{\phi_2-1}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}\cdot\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{n^{\phi_2-1}}-\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}\cdot\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{3(1-\nu^2)\lambda^2}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad\cdots\cdots(36)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_1+1}}-\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad\cdots\cdots(37)$$

$\bar{\varepsilon}_r$の内外周縁の値を夫々$\bar{\varepsilon}_{r,1}$，$\bar{\varepsilon}_{r,2}$とすると，

$$\bar{\varepsilon}_{r,1}=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})+\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}\cdot\frac{(1-n^{\alpha-2})}{n^{\alpha-2}}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}-\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\Big]-\frac{3(1-\nu^2)}{n^2\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad\cdots\cdots(38)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r,2}=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{3(1-\nu^2)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad\cdots\cdots(39)$$

$\bar{\varepsilon}_\theta$の内外周縁の値を夫々$\bar{\varepsilon}_{\theta,1}$，$\bar{\varepsilon}_{\theta,2}$とすると，

$$\bar{\varepsilon}_{\theta,1}=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}\cdot\frac{(1-n^{\alpha-2})}{n^{\alpha-2}}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\Big]$$

$$-\frac{(1-\nu^2)}{n^2\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad \cdots\cdots (40)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta,2}=\frac{(1-\nu^2)n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\left\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\right\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\left\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}\right]-\frac{(1-\nu^2)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \quad \cdots\cdots (41)$$

b) 特別の場合，$\alpha=0$

一定厚の円板では$\alpha=0$で，(a)の諸式中に$\alpha=0$と置いて求められる。

$$\bar{\varepsilon}_r=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)-\frac{1}{(1-\nu)n^2\lambda^2}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)-\frac{1}{(1-\nu)n^2\lambda^2}\right\}\right]-\frac{3}{8}\lambda^2(1-\nu^2) \quad \cdots\cdots (42)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)+\frac{1}{(1-\nu)n^2\lambda^2}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)+\frac{1}{(1-\nu)n^2\lambda^2}\right\}\right]-\frac{\lambda^2}{8}(1-\nu^2) \quad \cdots\cdots (43)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r,1}=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)-\frac{1}{(1-\nu)}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)-1/(1-\nu)\right\}\right]-\frac{3(1-\nu^2)}{8n^2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{r,2}=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)-\frac{1}{(1-\nu)n^2}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)-1/(1-\nu)n^2\right\}\right]-\frac{3(1-\nu^2)}{8} \quad \cdots\cdots (44)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta,1}=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}(1+1/n^2)+\frac{1}{(1-\nu)}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)+1/(1-\nu)\right\}\right]-\frac{(1-\nu^2)}{8n^2} \quad \cdots\cdots (45)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta,2}=(1-\nu^2)\left[\frac{(3+\nu)}{8}\left\{\frac{1}{(1+\nu)}\cdot(1+1/n^2)+\frac{1}{(1-\nu)n^2}\right\}+\frac{\mu}{2}\left\{1/(1+\nu)+1/(1-\nu)n^2\right\}-\frac{(1-\nu^2)}{8} \quad \cdots\cdots (46)$$

c) $\alpha=2$の場合

第5報(53)，(54)のB_1，B_2を(34)，(35)に代入して求められる。

$$\bar{\varepsilon}_r=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\left\{\frac{\phi_1\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)+\frac{\phi_2\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\right\}+\mu\log n\left\{\frac{\phi_1\ \lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{\phi_2\ \lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}-\frac{3(1+\nu)\lambda^2}{2} \quad \cdots\cdots (47)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{(1+\nu)\lambda^2}{2} \quad\cdots\cdots(48)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r.1}=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})$$
$$+\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\mu\log n\frac{1}{n^{\alpha-2}}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}-\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{3(1+\nu)}{2n^2} \quad\cdots\cdots(49)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r.2}=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{\phi_1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{\phi_2}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}$$
$$-\frac{3(1+\nu)}{2} \quad\cdots\cdots(50)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta.1}=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\alpha-2}-1/n^{\phi_1+1})$$
$$+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\frac{1}{n^{\alpha-2}}\Big]$$
$$-\frac{(1+\nu)}{2n^2} \quad\cdots\cdots(51)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta.2}=\frac{(1-\nu^2)}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_2-1}-1/n^2)$$
$$+\frac{1}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\Big\}+\mu\log n\Big\{\frac{1}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{1}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}$$
$$-\frac{(1+\nu)}{2} \quad\cdots\cdots(52)$$

但しϕ_1，ϕ_2は(33)で与えられる。

d) $\alpha=4$の場合

B_1，B_2は一般式が適用されるから，$\bar{\xi}$と同様に，(a)の場合の諸式中に単に$\alpha=4$と置いて求められる。

4 円板面内の主歪，ε_1，ε_2

a) 一般の場合

ε_1，ε_2は主応力σ_1，σ_2から弾性法則に依つて求められる。

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\nu\frac{\sigma_2}{E},\quad \varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{E}-\nu\frac{\sigma_1}{E} \quad\cdots\cdots(53)$$

今$\varepsilon_1 E/\sigma_i=\bar{\varepsilon}_1$，$\varepsilon_2 E/\sigma_i=\bar{\varepsilon}_2$と置き，第5報(24)′の$\sigma_1$，$\sigma_2$の値を用いて，

$$\bar{\varepsilon}_1=(1-\nu)区_1+(1+\nu)\sqrt{区_1'^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \cdots\cdots(54)$$

$$\bar{\varepsilon}_2=(1-\nu)区_1-(1+\nu)\sqrt{区_1'^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \cdots\cdots(55)$$

(54), (55)中の$区_1$, $区_1'$, $区_2$の値は第5報の(27), (28), (29)で与えられる。$\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$の内周縁の値を夫々$\bar{\varepsilon}_{1.1}$, $\bar{\varepsilon}_{2.1}$と置くと,

$$\bar{\varepsilon}_{1.1}=(1-\nu)区_1+(1+\nu)\sqrt{区_1^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega_2)^2} \cdots\cdots(56)$$

$$\bar{\varepsilon}_{2.1}=(1-\nu)区_1-(1+\nu)\sqrt{区_1^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \cdots\cdots(57)$$

(56), (57)中の$区_1$, $区_2$の値は第5報の(30), (31)で与えられる。$\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, の外周縁の値を夫々$\bar{\varepsilon}_{1.2}$, $\bar{\varepsilon}_{2.2}$と置くと,

$$\bar{\varepsilon}_{1.2}=(1-\nu)区_1+(1+\nu)\sqrt{区_1'^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \cdots\cdots(58)$$

$$\bar{\varepsilon}_{2.2}=(1-\nu)区_1-(1+\nu)\sqrt{区_1'^2+区_2^2\ (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \cdots\cdots(59)$$

(58), (59)中の$区_1$, $区_1'$, $区_2$は第5報の(27), (28), (29)中に$\lambda=1$と置いて得られる値で次式で示される。

$$区_1=\frac{n^{\alpha-2}}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})$$
$$-\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}$$
$$-\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{2(1+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \cdots\cdots(60)$$

$$区_1'=\frac{n^{\alpha-2}}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{(1-\nu)(\phi_2-1)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})$$
$$-\frac{(1-\nu)(\phi_1-1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{(1-\nu)(\phi_1-1)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}$$
$$-\frac{(1-\nu)(\phi_2-1)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]-\frac{(1-\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \cdots\cdots(61)$$

$$区_2=\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-1/n^{2-\alpha}) \cdots\cdots(62)$$

b) 特別の場合, $\alpha=0$

厚さ一定の場合は$\alpha=0$で一般式が適用される。即ち$\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$は(54), (55)で与えられ, $区_1$, $区_1'$, $区_2$の値は第5報の(39), (40), (41) で与えられる。$\bar{\varepsilon}_{1.1}$, $\bar{\varepsilon}_{2.1}$は(56), (57)で与えられ式中$区_1$, $区_2$の値は次の様になる。

$$区_1=\frac{(3+\nu)}{8}\Big\{(1+1/n^2)-\frac{2(1+\nu)}{(3+\nu)n^2}\Big\}+\mu/2 \cdots\cdots(63)$$

$$区_2=\frac{1}{4}(n^2-1/n^2)+\frac{\mu}{2}(n^2-1) \cdots\cdots(64)$$

$\bar{\varepsilon}_{1.2}$, $\bar{\varepsilon}_{2.2}$は(58), (59)で与えられ, 式中の$区_1$, $区_1'$, $区_2$の値は次の様になる。

$$区_1=\frac{(3+\nu)}{8}\Big\{(1+1/n^2)-\frac{2(1+\nu)}{(3+\nu)}\Big\}+\frac{\mu}{2} \cdots\cdots(65)$$

$$\text{区}_1'=-\frac{(3+\nu)}{8}\left\{1/n^2+\frac{(1-\nu)}{(3+\nu)}\right\}-\frac{\mu}{2n^2} \quad \cdots\cdots(66)$$

$$\text{区}_2=\frac{\mu}{2}(1-1/n^2) \quad \cdots\cdots(67)$$

c)　$\alpha=2$ の場合

$\bar{\varepsilon}_1$，$\bar{\varepsilon}_2$ は (54)，(55)で与えられ，式中の区_1，$\text{区}_1'$，区_2の値は第5報(57)，(58)，(49)で与えられる。$\bar{\varepsilon}_{1.1}$，$\bar{\varepsilon}_{2.1}$は(56)，(57)で与えられ，式中の区_1，区_2の値は第5報の(59)，(60で与えられる。$\bar{\varepsilon}_{1.2}$，$\bar{\varepsilon}_{2.2}$は(58)，(59)で与えられ，式中の区_1，$\text{区}_1'$，区_2の値は次の様になる。

$$\text{区}_1=\frac{1}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\left\{\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\right\}+\mu\left\{\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}\log n\right]-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \quad \cdots\cdots(68)$$

$$\text{区}_1'=\frac{1}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\left\{\frac{(\phi_2-1)(1-\nu)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(\phi_1-1)(1-\nu)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\right\}+\mu\left\{\frac{(\phi_1-1)(1-\nu)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(\phi_2-1)(1-\nu)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}\log n\right]-1/2 \quad \cdots\cdots(69)$$

$$\text{区}_2=\mu\log n \quad \cdots\cdots(70)$$

d)　$\alpha=4$ の場合

区_1，$\text{区}_1'$，区_2は一般式が適用出来ない。$\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$に対しては第5報(69)，(70)，(65)を用い，又$\bar{\varepsilon}_{1.1}$，$\bar{\varepsilon}_{2.1}$に就いては第5報(71)，(72)を用いる。$\bar{\varepsilon}_{1.2}$，$\bar{\varepsilon}_{2.2}$ の式中の区_1，$\text{区}_1'$，区_2は次の様になる。

$$\text{区}_1=\frac{n^2}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[-\frac{(3+\nu)}{4(1+\nu)}\left\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\right\}-\frac{\mu}{2}(1-n^2)\left\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}\right]+1/2 \quad \cdots\cdots(71)$$

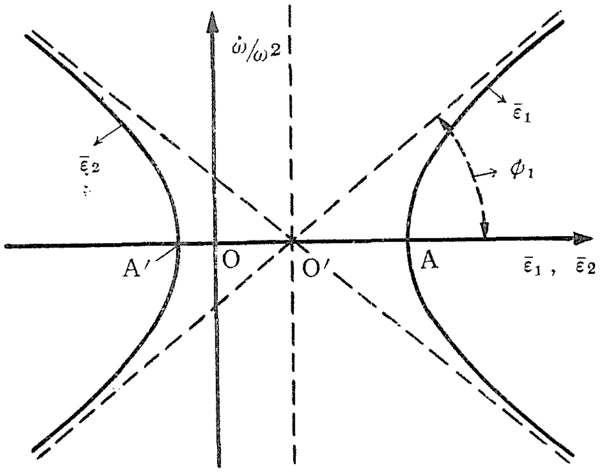
$$\text{区}_1'=\frac{n^2}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\left[-\frac{(3+\nu)}{4(1+\nu)}\left\{\frac{(1-\nu)(\phi_2-1)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(1-\nu)(\phi_1-1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\right\}-\frac{\mu}{2}(1-n^2)\left\{\frac{(1-\nu)(\phi_1-1)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(1-\nu)(\phi_2-1)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\right\}\right]+\frac{(1-\nu)}{4(1+\nu)} \quad \cdots\cdots(72)$$

$$\text{区}_2=\frac{\mu}{2}(n^2-1) \quad \cdots\cdots(73)$$

(56)，(57)の$\bar{\varepsilon}_1$，$\bar{\varepsilon}_2$の内周縁の式を書き改めると，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\{\bar{\varepsilon}_{1.1}-(1-\nu)K_1\}^2}{\{(1+\nu)K_1\}^2}-\dfrac{(\dot{\omega}/\omega^2)^2}{(K_1/K_2)^2}=1\\[2ex]\dfrac{\{\bar{\varepsilon}_{2.2}-(1-\nu)K_1\}^2}{\{(1+\nu)K_1\}^2}-\dfrac{(\dot{\omega}/\omega^2)^2}{(K_1/K_2)^2}=1\end{array}\right\} \cdots\cdots(74)$$

第 2 図



$OO'=(1-\nu)K_1$, $O'A=O'A'=(1+\nu)K_1$

$OA'=2\nu K_1$, $\tan\phi_1=1/(1+\nu)K_2$

$\dot{\omega}/\omega^2$を縦座標に又$\bar{\varepsilon}_{1.1}$, $\bar{\varepsilon}_{2.1}$を横座標に取ると，(74)は双曲線を表す事になり，$\bar{\varepsilon}_{1.1}$は正の分枝，$\bar{\varepsilon}_{2.1}$は負の分枝で表される。(第2図参照)

5 軸方向の主歪，ε_3

a) 一般の場合

軸方向歪は円板の厚さの変化を指示する。ε_3は弾性法則に依つて，σ_1, σ_2より求められる。

$$\varepsilon_3=-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) \cdots\cdots(75)$$

第5報(24)のσ_1, σ_2の値を用いて，尙$-\varepsilon_3E/\sigma_i=\bar{\varepsilon}_3$と置いて，

$$\bar{\varepsilon}_3=2\nu K_1 \cdots\cdots(76)$$

$$\bar{\varepsilon}_3=\frac{\nu n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\lambda^{\phi_2-1}$$
$$-\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\lambda^{\phi_1-1}\Big\}$$
$$+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)\lambda^{\phi_1-1}}{(\phi_1+\nu)\ n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)\lambda^{\phi_2-1}}{(\phi_2+\nu)\ n^{\phi_1-1}}\Big\}\Big]$$
$$-\frac{4\nu(1+\nu)\lambda^2}{\{8-\alpha(3+\nu)\}} \cdots\cdots(77)$$

$\bar{\varepsilon}_3$の内周縁の値を$\bar{\varepsilon}_{3,1}$とすると，

$$\bar{\varepsilon}_{3,1}=\frac{\nu}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}(n^{\phi_1-3}-1)-\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}(n^{\phi_2-3}-1)\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}-\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\Big]-\frac{4\nu(1+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}n^2} \quad\cdots\cdots(78)$$

$\bar{\varepsilon}_3$の外周縁の値を$\bar{\varepsilon}_{3,2}$とすると，

$$\bar{\varepsilon}_{3,2}=\frac{\nu n^{\alpha-2}}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{\{8-\alpha(3+\nu)\}}\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\Big\}+\frac{\mu}{(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})\Big\{\frac{(1+\nu)(1+\phi_1)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\nu)(1+\phi_2)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}-\frac{4\nu(1+\nu)}{\{8+\alpha(3+\nu)\}} \quad\cdots\cdots(79)$$

b)　特別の場合，$\alpha=0$

一定厚の円板では$\alpha=0$で，(a)の一般式に$\alpha=0$と置いて求められる。

$$\bar{\varepsilon}_3=\nu\Big[\frac{(3+\nu)}{4}(1+1/n^2)-\frac{1}{2}(1+\nu)\lambda^2+\mu\Big] \quad\cdots\cdots(80)$$

$$\bar{\varepsilon}_{3,1}=\nu\Big[\frac{(3+\nu)}{4}(1+1/n^2)-\frac{(1+\nu)}{2n^2}+\mu\Big] \quad\cdots\cdots(81)$$

$$\bar{\varepsilon}_{3,2}=\nu\Big[\frac{(3+\nu)}{4}(1+1/n^2)-\frac{(1+\nu)}{2}+\mu\Big] \quad\cdots\cdots(82)$$

c)　$\alpha=2$の場合

(76)中の$\bar{\varepsilon}_1$の値は第5報の(57)を用いる。

$$\bar{\varepsilon}_3=\frac{\nu}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})\lambda^{\phi_2-1}-\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\lambda^{\phi_1-1}\Big\}+\mu\Big\{\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}\frac{\lambda^{\phi_1-1}}{n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}\frac{\lambda^{\phi_2-1}}{n^{\phi_1-1}}\Big\}\log n\Big]-\frac{2\nu(1+\nu)\lambda^2}{(1-\nu)} \quad\cdots\cdots(83)$$

$$\bar{\varepsilon}_{3,1}=\frac{\nu}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)}\Big\{\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^{\phi_2+1}-1/n^{\alpha-2})-\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^{\phi_1+1}-1/n^{\alpha-2})\Big\}+\frac{\mu}{n^{\alpha-2}}\Big\{\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}-\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}\Big\}\log n\Big]-\frac{2\nu(1+\nu)}{(1-\nu)n^2} \quad\cdots\cdots(84)$$

$$\bar{\varepsilon}_{3,2}=\frac{\nu}{(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})}\Big[\frac{(3+\nu)}{2(1-\nu)}\Big\{\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_1-1})-\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)}(1/n^2-1/n^{\phi_2-1})\Big\}+\mu\Big\{\frac{(1+\phi_1)(1+\nu)}{(\phi_1+\nu)n^{\phi_2-1}}-\frac{(1+\phi_2)(1+\nu)}{(\phi_2+\nu)n^{\phi_1-1}}\Big\}\log n-\frac{2\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} \quad\cdots\cdots(85)$$

但しϕ_1，ϕ_2は(33)で与えられる。

d) $\alpha=4$ の場合

K_1の値は一般式が適用されるから，(a)の場合の諸式中に$\alpha=4$と置いて，$\bar{\varepsilon}_3$，$\bar{\varepsilon}_{3.1}$，$\bar{\varepsilon}_{3.2}$が求められる。

6 最大剪断歪，γ_m

最大剪断歪γ_mは(54)，(55)のε_1，ε_2の値を用いて，

$$\gamma_m=\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

$$=\frac{2\sigma_i}{E}(1+\nu)\sqrt{K_1'^2+K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2} \quad \cdots\cdots(86)$$

然るにE，とGの関係式，$E=2G(1+\nu)$を用いて，

$$\gamma_m=\frac{1}{G}\left\{\sigma_i\sqrt{K_1^2+K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2}\right\} \quad \cdots\cdots(87)$$

第5報の(24)により最大剪断応力τ_mを代入すると，

$$\gamma_m=\tau_m/G \quad \cdots\cdots(88)$$

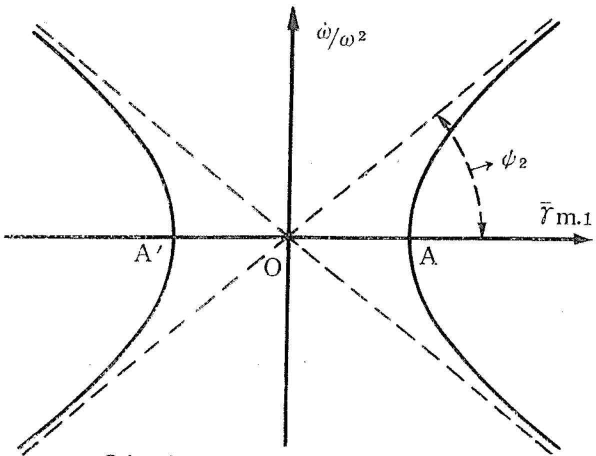
(88)は剪断応力並に歪に関する弾性法則を示している。内周縁のγ_mの値を$\gamma_{m.1}$とすると，

$$\gamma_{m.1}=\frac{2\sigma_i}{E}(1+\nu)\sqrt{K_1^2+K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2} \quad \cdots\cdots(89)$$

或は$\gamma_{m.1}E/\sigma_i=\bar{\gamma}_{m.1}$として，

$$\left(\frac{\bar{\gamma}_{m.1}}{2(1+\nu)K_1}\right)^2-\left(\frac{\dot{\omega}/\omega^2}{K_1/K_2}\right)^2=1 \quad \cdots\cdots(90)$$

第 3 図



$OA=OA'=2(1+\nu)K_1$

$\tan\psi_2={}^1/_2(1+\nu)K_2$

$\dot{\omega}/\omega^2$を縦座標に，又$\bar{\gamma}_{m.1}$を横座標にとると，(90)は双曲線を表す事になる。（第３図参照）

7 結　　言

本報告では円板の変形状態を明かにするため変位と歪の式を求めた。(1)では剪断応力に起因して生ずる円板の捩れ状態を調べ(2)では遠心力に起因する円板の半径方向の伸び状態が明かになる。(3)では垂直歪ε_r，ε_θを求め，(4)では円板面内の主歪ε_1，ε_2を求め(5)では軸方向の主歪ε_3を求めて円板の厚さの変化を調べた。(6)では最大剪断歪γ_mを求めて，最大剪断応力τ_mとの関係を明かにした。第5報，並に第6報に述べた応力，変位，歪等に関する数値計算は追つて報告する心算である。

参 考 文 献

1) 筆者：同題目：昭和28年5月　日本機械学会長岡地方講演会　前刷
2) 筆者：角加速度を有する回転円板の応力とその破損限界(第5報)(信州大学紀要第3号177頁)

Summary

THE DISPLACEMENTS AND STRAINS IN A ROTATING DISC WITH ANGULAR ACCELERATION

(6 TH REPORT)

Yu TAKEDA*

(Institute of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

A disc with hyperbolic profile is often used in steam turbine practices. In the previous paper (5th report), the principal stresses produced in the disc are obtained and the limiting curves of its failure are deduced using the various theories related to the failure of materials which are commonly recognized to date and are compared with each other. In the present paper (6th report) the displacements and strains are obtained in order to examine the deformation of disc precisely ; namely in (1) the tangential displacement that measures the twist of dise, in (2) the radial displacement that is a measure of increase of a radius, in (3) the radial and hoop normal strains, in (4) the two principal strains in the plane of disk, in (5) the axial principal strain which indicates the change of disc thickess, in (6) the maximum shearing strains that have a close relatiouship to the maximum shearing stresses, are studied. The results of our mumerical calculations of stress and strain and displacement may fully be reported later.

* Professor of Shinshu University.