

厚さが $h = \beta r^{-\alpha}$ で表される円板の捩れ振動 (第1報)<sup>(1)</sup>

竹 多 勇\*

(信州大学工学部機械工学科教室)

THE TORSIONAL VIBRATION OF A DISC  
WITH HYPERBOLIC PROFILE (1ST REPORT)

BY

Yu TAKEDA\*

(Institute of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

**Synopsis:** A disc whose thickness varies as  $1/r^\alpha$ , is usually used as a blade wheel in steam turbine practices. It may probably be anticipated that the disc performs a torsional vibration, when it is subjected to variations in its speed owing to the load fluctuations of a turbine. Therefore this treatment has an important significance to study theoretically the characteristics of such vibrations and the nature of resonance phenomena in a forced vibration. In the 1st part (I), the differential equation of the torsional vibration of such a disc is deduced and also the solution given. In the 2nd part (II), as some applications of the solutions mentioned above, the frequency equations are found according to three different boundary conditions. In addition, a forced vibration is dealt with and the nature of its resonance is fully studied, when a periodically varying external twisting moment is applied to the inner edge of a disc. Finally in the 3rd part (III) an elastic disc coupled to one rigid mass by an elastic shaft is considered. Both free and forced vibrations of such a system are satisfactorily studied. The latter case resembles a single cylinder reciprocating engine that drives a disc which corresponds, so to speak, to the vibration of a fan impeller.

---

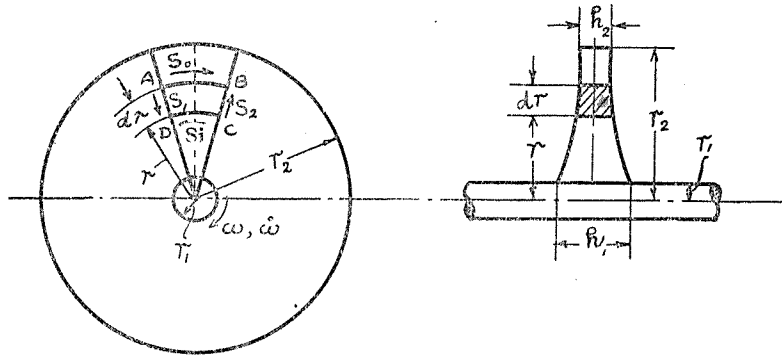
\* 信州大学教授

\* Professor of Shinshu University.

The results of our numerical calculations of such torsional vibrations given above will be reported later in the next paper.

要旨：厚さが  $h = \beta r^{-\alpha}$  で表される円板は、蒸気タービンの翼車として、實際上よく使用されてゐる。この円板の横振動に就いては理論的にも又実験的にも十分な研究がなされてゐる。然しその捩れ振動は実際に速度変動の際に起る可能性があり、相当重要な事項であるに係らず、筆者の知る範囲では、その理論的研究も未だ見当らない様である。かゝる意味で円板の捩れ振動を理論的に取扱ひ、振動の本質を究明したのである。

(I) 捩れ振動の基礎方程式とその解



第 1 図

第1図を参照して、円板の微小部分に就いて、円板の切線方向の運動方程式を樹てると、

$$S_0 - S_1 + (S_1 + S_2) \frac{d\theta}{2} - F_\theta = dM \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

Sは剪断力、 $F_\theta$ は円板の角加速度に起因する切線方向の慣性力、 $dM$ は微小部分の質量、 $\eta$ は切線方向の変位を表してゐる。

$$\left. \begin{aligned} S_1 = \tau_{r\theta} h r d\theta ; S_0 = (\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr) (h + dh) (r + dr) d\theta \\ S_1 = S_2 = \tau_{r\theta} h r dr ; F_\theta = \frac{\gamma}{g} h r^2 \dot{\omega} dr d\theta ; dM = \frac{\gamma}{g} h r dr d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(2)を(1)に代入して、高次の微小量を省略して、整頓すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h \tau_{r\theta}) = \frac{\gamma}{g} h r^2 \dot{\omega} + \frac{\gamma}{g} h r \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (3)$$

円板が一樣な角速度で回転する場合、又は静止してゐる時は  $\dot{\omega} = 0$  であり、茲ではこの様な場合のみを考へる事とする。(3)の中に  $\dot{\omega} = 0$  と置いて、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h \tau_{r\theta}) = \frac{\gamma}{g} h r \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (4)$$

(3), (4) 中で  $\gamma$  は材料の比重量,  $\tau_{r\theta}$  は剪断応力である。  $\tau_{r\theta}$  は弾性法則によつて, 次の様に変位  $\eta$  で表される。  $\mu$  を円板材料の剛性率として,

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \right) \quad (5)$$

然るに  $h = \beta r^{-\alpha}$  (6), (5), (6) を(4) に代入して,  $\eta$  のみで表すと,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{2-\alpha} \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \right) \right\} = \frac{\gamma}{\mu g} r^{2-\alpha} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (7)$$

今  $\eta = v(r) \sin pt$  (8), と置いて, (7) の偏微分方程式を常微分方程式に直すと,

$$\frac{d^2 v}{dr^2} - (\alpha-1) \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + (\alpha-1) \frac{v}{r^2} + \frac{\gamma}{\mu g} p^2 v = 0 \quad (9)$$

(9) の解を次の形で置き換える。  $v = r^{\alpha/2} \xi(r)$  (10)

(10) を(9) に代入すると,

$$\frac{d^2 \xi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dr} + \left\{ \frac{\gamma p^2}{\mu g} - \frac{(\alpha/2-1)^2}{r^2} \right\} \xi = 0 \quad (11)$$

今  $n = \alpha/2 - 1$ , (12) と置き又  $x = pr \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$  (13)

と置いて, 独立変数を変へると,

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\xi}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) \xi = 0 \quad (14)$$

(14) はベッセル型の微分方程式であり, その解として,

$$\xi(r) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad (15)$$

$$\xi(r) = AJ_n(x) + BY_n(x), \{n \text{ が } 0 \text{ 又は整数の時}\} \quad (16)$$

但し  $A, B$  は積分常数である。例えば  $\alpha=2$  の時は  $n=0$  であるから, (16) によつて,

$$\xi(r) = AJ_0(x) + BY_0(x) \quad (17)$$

又円板が一定の厚さの時は,  $\alpha=0$  で  $n=-1$  となるから,

$$\xi(r) = AJ_1(x) + BY_1(x) \quad (18)$$

(8), (10), (15), (16), を用いて, 変位  $\eta$  は一般に次式で表される。

$$\eta = r^{n+1} \{AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)\} \sin pt \quad (19)$$

$$\eta = r^{n+1} \{AJ_n(x) + BY_n(x)\} \sin pt, \{n=0 \text{ 又は整数の時}\} \quad (20)$$

$$\eta = r \{AJ_0(x) + BY_0(x)\} \sin pt, (\alpha=2, n=0) \quad (21)$$

$$\eta = \{AJ_1(x) + BY_1(x)\} \sin pt, (\alpha=0, n=-1) \quad (22)$$

(5) を用いて,

$$\tau_{r\theta} = \mu \{A \{nJ_n(x) + xJ_n'(x)\} + B \{nJ_{-n}(x) + xJ_{-n}'(x)\}\} r^n \sin pt \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \{A \{nJ_n(x) + xJ_n'(x)\} + B \{nY_n(x) + xY_n'(x)\}\} r^n \sin pt \quad (24)$$

( $n=0$  又は整数の時)

$$\tau_{r\theta} = \mu \{AJ_0'(x) + BY_0'(x)\} x \sin pt, (\alpha=2, n=0) \quad (25)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu [A\{xJ_1'(x) - J_1(x)\} + B\{xY_1'(x) - Y_1(x)\}] \frac{1}{r} \sin pt,$$

$$(\alpha=0, n=-1) \dots\dots\dots(26)$$

内周縁に於ける捩りモーメントを  $M_t$  とすると,

$$M_t = 2\pi r_1^2 (\tau_{r\theta})_{r=r_1}, \quad \text{で } (\tau_{r\theta})_{r=r_1} \text{ の値を代入して,}$$

$$M_t = Nr_1^n [A\{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} + B\{nJ_{-n}(x_1) + x_1 J_{-n}'(x_1)\}] \sin pt \dots(27)$$

$$M_t = Nr_1^n [A\{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} + B\{nY_n(x_1) + x_1 Y_n'(x_1)\}] \sin pt \dots(28)$$

( $n=0$  又は整数の時)

$$M_t = Nx_1 [AJ_0'(x_1) + BY_0'(x_1)] \sin pt, \quad (\alpha=2, n=0) \dots\dots\dots(29)$$

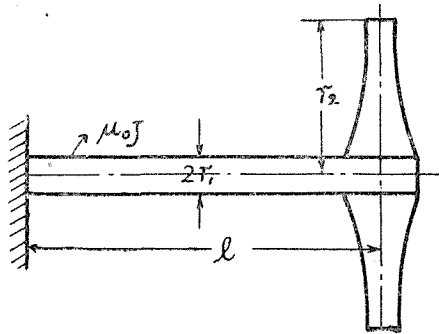
$$M_t = \frac{N}{r_1} [A\{x_1 J_1'(x_1) - J_1(x_1)\} + B\{x_1 Y_1'(x_1) - Y_1(x_1)\}] \sin pt \dots\dots(30)$$

( $\alpha=0, n=-1$ )

但し  $N=2\pi r_1^2 h_1 \mu, \quad x_1 = p\sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}} r_1,$

(II) 1 箇の円板の捩れ振動

(A) 自由振動



第 2 図

(a) 外周縁で自由, 内周縁で弾性的に固定される場合。

周縁条件として, (第2図参照)

$$r=r_1; \quad M_t = \mu_0 J \frac{\theta_1}{l} = \frac{\mu_0 J}{l} \left( \frac{\eta_1}{r_1} \right) \dots\dots\dots(30)_1$$

$$r=r_2; \quad \tau_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots(30)_2$$

但し  $\mu_0 J$  は車軸の捩れ剛性である。(30)<sub>1</sub>の条件式は(27)を用いて,

$$A [N \{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} - \frac{\mu_0 J}{l} J_n(x_1)]$$

$$+ B [N \{nJ_{-n}(x_1) + x_1 J_{-n}'(x_1)\} - \frac{\mu_0 J}{l} J_{-n}(x_1)] = 0 \dots\dots(31)$$

(30)<sub>2</sub>の条件式は(23)を用いて,

$$A [nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)] + B [nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)] = 0 \dots\dots(32)$$

(31), (32) から  $A, B$  を消去して, 次の固有振動数を決定するに用いられる振動数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & N \{ \{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} \{nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)\} - \{nJ_n(x_2) \\ & \quad + x_2 J_n'(x_2)\} \{nJ_{-n}(x_1) + x_1 J_{-n}'(x_1)\} \} + \frac{\mu_0 J}{l} \{ J_{-n}(x_1) \\ & \quad \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} - J_n(x_1) \{nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)\} \} \\ & = 0 \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$n=0$  又は整数の時には  $J_{-n}$  を  $Y_n$  と置換すればよい。

$$\begin{aligned} & N \{ \{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} \{nY_n(x_2) + x_2 Y_n'(x_2)\} - \{nJ_n(x_2) \\ & \quad + x_2 J_n'(x_2)\} \{nY_n(x_1) + x_1 Y_n'(x_1)\} \} + \frac{\mu_0 J}{l} \{ Y_n(x_1) \\ & \quad \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} - J_n(x_1) \{nY_n(x_2) + x_2 Y_n'(x_2)\} \} \\ & = 0 \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

$\alpha=2, (n=0)$  の場合には,

$$\begin{aligned} & N x_1 \{ J_0'(x_1) Y_0'(x_2) - J_0'(x_2) Y_0'(x_1) \} + \frac{\mu_0 J}{l} \{ Y_0(x_1) J_0'(x_2) \\ & \quad - J_0(x_1) Y_0'(x_2) \} = 0 \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

$\alpha=0, (n=-1)$  の場合には,

$$\begin{aligned} & N \{ \{x_1 J_1'(x_1) - J_1(x_1)\} \{x_2 Y_1'(x_2) - Y_1(x_2)\} - \{x_2 J_2'(x_2) \\ & \quad - J_1(x_2)\} \{x_1 Y_1'(x_1) - Y_1(x_1)\} \} + \frac{\mu_0 J}{l} \{ x_2 \{ Y_1(x_1) J_1'(x_1) \\ & \quad - J_1(x_1) Y_1'(x_2) \} + \{ J_1(x_1) Y_1(x_2) - J_1(x_2) Y_1(x_1) \} \} \\ & = 0 \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

(b) 外周縁で自由, 内周縁で固定される場合。

周縁条件として,

$$\begin{cases} r=r_1, \eta=0 \dots\dots\dots(37) \\ r=r_2, \tau_{r\theta}=0 \dots\dots\dots(38) \end{cases}$$

(37) の条件は (19) を用いて,

$$A J_n(x_1) + B J_{-n}(x_1) = 0 \dots\dots\dots(39)$$

(38) は (a) の場合と同一の条件式であるから, (32) を得る。故に (32) と (39) とから  $A, B$  を消去して次の振動数方程式を得る。

$$\begin{aligned} & J_n(x_1) \{nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)\} - J_{-n}(x_1) \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} \\ & = 0 \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

(a) の場合の車軸の振り剛性  $\mu_0 J$  が非常に大となつた極限で,  $\mu_0 J = \infty$  と置くと, (33) より (40) が直ちに求められる。即ち内周縁固定の条件は (a) の場合の車軸の剛性が  $\infty$  となつた場合に相当する。

$n$  が 0 又は整数の時は (40) の  $J_{-n}$  を  $Y_n$  で置換すればよい。

$$J_n(x_1) \{nY_n(x_2) + x_2 Y_n'(x_2)\} - Y_n(x_1) \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots(41)$$

$\alpha=2, (n=0)$  の場合は,

$$J_0(x_1) Y_0'(x_2) - Y_0(x_1) J_0'(x_2) = 0 \dots\dots\dots(42)$$

$\alpha=0, (n=-1)$  の場合は,

$$J_1(x_1) \{x_2 Y_1'(x_2) - Y_1(x_2)\} - Y_1(x_1) \{x_2 J_1'(x_2) - J_1(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots(43)$$

(c) 内外両周縁自由の場合,

周縁条件として,

$$\begin{cases} r=r_1, & \tau_{r\theta}=0 \\ r=r_2, & \tau_{r\theta}=0 \end{cases} \dots\dots\dots(44)$$

(44) の 2 条件式から,

$$\begin{cases} A \{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} + B \{nJ_{-n}(x_1) + x_1 J_{-n}'(x_1)\} = 0 \\ A \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} + B \{nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)\} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(45)$$

(45) の 2 式から  $A, B$  を消去して,

$$\{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} \{nJ_{-n}(x_2) + x_2 J_{-n}'(x_2)\} - \{nJ_{-n}(x_1) + x_1 J_{-n}'(x_1)\} \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots(46)$$

$n=0$  又は整数の場合は,

$$\{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} \{nY_n(x_2) + x_2 Y_n'(x_2)\} - \{nY_n(x_1) + x_1 Y_n'(x_1)\} \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

$\alpha=2, (n=0)$  の場合は,

$$J_0'(x_1) Y_0'(x_2) - Y_0'(x_1) J_0'(x_2) = 0 \dots\dots\dots(48)$$

$\alpha=0, (n=-1)$  の場合は,

$$\{x_1 J_1'(x_1) - J_1(x_1)\} \{x_2 Y_1'(x_2) - Y_1(x_2)\} - \{x_1 Y_1'(x_1) - Y_1(x_1)\} \{x_2 J_1'(x_2) - J_1(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots(49)$$

(a) の場合に於て車軸の剛性が非常に小さくなつた極限では  $\mu_0 J = 0$  となる。(33) 中に  $\mu_0 J = 0$  と置くと, (46) が直ちに求められる。即ち内周縁の自由である条件は (a) の場合の車軸の剛性が 0 となつた極限に相当する事が知られる。

### (B) 強制振動

外周縁で自由であり, 内周縁に  $M_t = M_0 \sin qt$  で表される周期的に変動する振りモーメントが作用する場合の円板の強制振動を論ずる事とする。周縁条件としては,

$$r = r_1; M_t = M_0 \sin qt \dots \dots \dots (50)$$

$$r = r_2; \tau_{r\theta} = 0 \dots \dots \dots (51)$$

(50) の条件は (27) を用いて,

$$\begin{aligned} A \{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} + B \{nJ_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)\} \\ = \frac{M_0}{N \Delta_1 r_1^n} \dots \dots \dots (52) \end{aligned}$$

(51) の条件は (32) と一致する。唯 (32) 中の  $x_2$  の代りに  $u_2$  で置換して,

$$A \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} + B \{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} = 0 \dots \dots (53)$$

(52), (53) を用いて,  $A, B$  が求められる。

$$A = -\frac{M_0}{N \Delta_1 r_1^n} \{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \dots \dots \dots (54)$$

$$B = -\frac{M_0}{N \Delta_1 r_1^n} \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \dots \dots \dots (55)$$

但し,

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} \{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \\ - \{nJ_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)\} \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \dots \dots (56) \end{aligned}$$

$$\text{又 } u_1 = q \sqrt{\frac{r}{\mu g}} r_1, \quad u_2 = q \sqrt{\frac{r}{\mu g}} r_2$$

(19) によりて,

$$\begin{aligned} \eta/r = \frac{M_0}{N \Delta_1} (\lambda m)^n [\{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} J_n(u) \\ - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} J_{-n}(u)] \sin qt \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

$$\text{但し, } u = q \sqrt{\frac{r}{\mu g}} r; \quad \lambda = r/r_2; \quad m = r_2/r_1$$

(23) によりて,

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}/\mu = \frac{M_0}{N \Delta_1} (\lambda m)^n [\{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \{nJ_n(u) \\ + u J_n'(u)\} - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \{nJ_{-n}(u) \\ + u J_{-n}'(u)\}] \sin qt \dots \dots \dots (58) \end{aligned}$$

$n=0$  又は整数の時には,

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \\ - \{nY_n(u_1) + u_1 Y_n'(u_1)\} \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \dots \dots (59) \end{aligned}$$

$$A = \frac{M_0}{N \Delta_1 r_1^n} \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \dots \dots \dots (60)$$

$$B = -\frac{M_0}{N \Delta_1 r_1^n} \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \dots \dots \dots (61)$$

$$\begin{aligned} \eta/r = \frac{M_0}{N \Delta_1} (\lambda m)^n [\{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} J_n(u) \\ + \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} Y_n(u)] \sin qt \dots \dots \dots (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}/\mu &= \frac{M_0}{N\Delta_1} (\lambda m)^n [\{nY_n(u_2) + u_2Y_n'(u_2)\} \{nJ_n(u) \\ &\quad + uJ_n'(u)\} - \{nJ_n(u_2) + u_2J_n'(u_2)\} \{nY_n(u) \\ &\quad + uY_n'(u)\}] \sin qt \dots\dots\dots(63) \end{aligned}$$

$\alpha=2, (n=0)$  の場合は,

$$A_1 = u_1u_2 \{J_0'(u_1) Y_0'(u_2) - Y_0'(u_1) J_0'(u_2)\} \dots\dots\dots(64)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_0}{N\Delta_1} u_2 Y_0'(u_2), \\ B &= -\frac{M_0}{N\Delta_1} u_2 J_0'(u_2), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

$$\eta/r = \frac{M_0 u_2}{N\Delta_1} \{Y_0'(u_2) J_0(u) + J_0'(u_2) Y_0(u)\} \sin qt \dots\dots\dots(66)$$

$$\tau_{r\theta}/\mu = \frac{M_0}{N\Delta_1} u_2 u \{Y_0'(u_2) J_0'(u) - J_0'(u_2) Y_0'(u)\} \sin qt \dots\dots\dots(67)$$

$\alpha=0, (n=-1)$  の場合は,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{u_1 J_1'(u_1) - J_1(u_1)\} \{u_2 Y_1'(u_2) - Y_1(u_2)\} - \{u_1 Y_1'(u_1) \\ &\quad - Y_1(u_1)\} \{u_2 J_1'(u_2) - J_1(u_2)\} \dots\dots\dots(68) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_0 r}{N\Delta_1} \{u_2 Y_1'(u_2) - Y_1(u_2)\} \\ B &= -\frac{M_0 r}{N\Delta_1} \{u_2 J_1'(u_2) - J_1(u_2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(69)$$

$$\begin{aligned} \eta/r &= \frac{M_0}{N\Delta_1} [\{u_2 Y_1'(u_2) - Y_1(u_2)\} J_1(u) - \{u_2 J_1'(u_2) \\ &\quad - J_1(u_2)\} Y_1(u)] \sin qt \dots\dots\dots(70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}/\mu &= \frac{M_0}{N(m\lambda)} [\{u_2 Y_1'(u_2) - Y_1(u_2)\} \{u J_1'(u) - J_1(u)\} \\ &\quad - \{u_2 J_1'(u_2) - J_1(u_2)\} \{u Y_1'(u) - Y_1(u)\}] \sin qt \dots\dots\dots(71) \end{aligned}$$

内周縁に作用する周期的振りモーメント  $M_t$  の周期が固有振動の周期と一致する時には、 $q=p$  であり、従つて、 $u_1=x_1; u_2=x_2$  となる。か様な場合には (56) の  $A_1$  の値は (46) によつて 0 となる。従つて、 $\eta$  及び  $\tau_{r\theta}$  の値は  $\infty$  に接近する事になり、共鳴現象が起るのである。即ち周期的振りモーメント  $M_t$  の周期が両周縁自由の場合の固有振動周期と一致する時には共鳴が起る事が知られる。

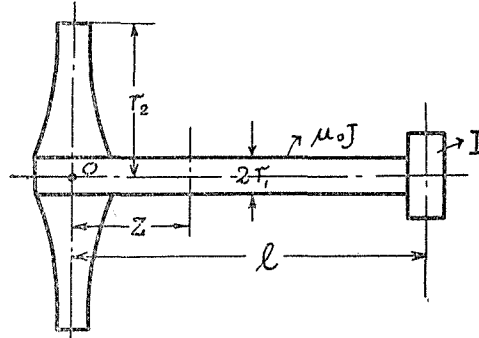
(Ⅲ) 円板と剛性質量との連成振動

第3図に示す様に、円板と1箇の剛性質量とが弾性車軸で連結されてある場合の連成振動を茲で論ずる事とする。

車軸については、その振れ振動の方程式は、

$$\frac{r_0}{l_0 g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \dots\dots\dots(72)$$





第 3 図

$r_0$  及  $\mu_0$  は夫々車軸材料の比重量及び剛性率で,  $\theta$  はその捩れ角を示し,  $Z$  軸の原点は車軸と円板の連結点に採つてある。車軸に作用する捩りモーメントを  $M_{t.0}$  で表すと,

$$M_{t.0} = \mu_0 J \frac{\partial \theta}{\partial Z} \dots\dots\dots(73)$$

$J$  は車軸の横断面の極慣性能率である。

今,

$$\theta = \zeta(Z) \sin pt \dots\dots\dots(74)$$

と置くと (72) は次の様になる。

$$\frac{d^2 \zeta}{dZ^2} = - \frac{r_0}{\mu_0 g} p^2 \zeta \dots\dots\dots(75)$$

(75) の解として,

$$\zeta(Z) = C \sin \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) + D \cos \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) \dots\dots\dots(76)$$

$$\theta = \left[ C \sin \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) + D \cos \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) \right] \sin pt \dots\dots\dots(77)$$

但し,

$$x_0 = p \sqrt{\frac{r_0}{\mu_0 g}} l \text{ 従つて, } \frac{x_0}{l} = p \sqrt{\frac{r_0}{\mu_0 g}} \dots\dots\dots(78)$$

又

$$M_{t.0} = \mu_0 J \frac{x_0}{l} \left[ C \cos \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) - D \sin \left( \frac{x_0 Z}{l} \right) \right] \sin pt \dots\dots\dots(79)$$

(A) 自由振動 周縁条件として,

(a) 円板の外周縁にて,

$$r = r_2 ; \tau_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots(80)$$

(b) 円板の内周縁, 即ち円板と車軸との連結点で,

$$Z=0, r=r_1 ; \begin{cases} (M_t)_{r=r_1} = (M_{t.0})_{Z=0} \dots\dots\dots(81) \\ (\gamma)_{r=r_1} = I_1(\theta)_{Z=0} \dots\dots\dots(82) \end{cases}$$

(81), (82) は夫々振りモーメント及び変位 (切線方向) が連続である条件を表してゐる。

(c) 車軸の右端即ち車軸と剛性質量との連結点では,

$$(M_{t_0})_{z=l} = -\frac{I}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \dots\dots\dots(83)$$

(83) は車軸に作用する振りモーメントが剛性質量の慣性偶力に等しい条件を示してゐる。但し I は剛性質量の慣性能率である。

(80) の条件より,

$$A \{nJ_n(x_2) + x_2J_n'(x_2)\} + B \{nJ_{-n}(x_2) + x_2J_{-n}'(x_2)\} = 0 \dots\dots(84)$$

(81) は (27) と (79) を用いて,

$$\begin{aligned} Nr_1^n [A \{nJ_n(x_1) + x_1J_n'(x_1)\} + B \{nJ_{-n}(x_1) \\ + x_1J_{-n}'(x_1)\}] = \mu_0 J \cdot \frac{x_0}{l} \cdot C \dots\dots\dots(85) \end{aligned}$$

(82) は (19) と (77) を用いて,

$$r_1^{n+1} [AJ_n(x_1) + BJ_{-n}(x_1)] = r_1 D \dots\dots\dots(86)$$

(83) は (79) と (77) を用いて,

$$C \cos x_0 - D \sin x_0 = kx_0 \{C \sin x_0 + D \cos x_0\} \dots\dots\dots(87)$$

但し,  $k = \frac{I}{\gamma_0 J l}$ ;  $x_0 = p \sqrt{\frac{\gamma_0}{\mu_0 g}} \cdot l$

或は (87) を書き更めて,

$$C \{\cos x_0 - kx_0 \sin x_0\} - D \{\sin x_0 + kx_0 \cos x_0\} = 0 \dots\dots\dots(88)$$

k は剛性質量の慣性能率と車軸自身のそれとの比である。(85), (86) より C, D を夫々 A, B の項で表し, これを (88) に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} A \left[ \frac{NI}{\mu_0 J} (\cos x_0 - kx_0 \sin x_0) \{nJ_n(x_1) + x_1J_n'(x_1)\} \right. \\ \left. - x_0 (\sin x_0 + kx_0 \cos x_0) J_n(x_1) \right] + B \left[ \frac{NI}{\mu_0 J} (\cos x_0 \right. \\ \left. - kx_0 \sin x_0) \{nJ_{-n}(x_1) + x_1J_{-n}'(x_1)\} - x_0 (\sin x_0 \right. \\ \left. + kx_0 \cos x_0) J_{-n}(x_1) \right] = 0 \dots\dots\dots(89) \end{aligned}$$

(84) と (89) から A, B を消去すると, 次の振動数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{NI}{\mu_0 J} (\cos x_0 - kx_0 \sin x_0) [\{nJ_n(x_1) + x_1J_n'(x_1)\} \{nJ_{-n}(x_2) \\ + x_2J_{-n}'(x_2)\} - \{nJ_{-n}(x_1) + x_1J_{-n}'(x_1)\} \{nJ_n(x_2) \\ + x_2J_n'(x_2)\}] - x_0 (\sin x_0 + kx_0 \cos x_0) [J_n(x_1) \{nJ_{-n}(x_2) \\ + x_2J_{-n}'(x_2)\} - J_{-n}(x_1) \{nJ_n(x_2) + x_2J_n'(x_2)\}] = 0 \dots\dots\dots(90) \end{aligned}$$

n=0 又整数の場合には, (90) の J<sub>-n</sub> を Y<sub>n</sub> で置換すればよい。

$$\begin{aligned} & \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos x_0 - kx_0 \sin x_0) [\{nJ_n(x_1) + x_1 J_n'(x_1)\} \{nJ_n(x_2) \\ & + x_2 J_n'(x_2)\} - \{nY_n(x_1) + x_1 Y_n'(x_1)\} \{nJ_n(x_2) \\ & + x_2 J_n'(x_2)\}] - x_0 (\sin x_0 + kx_0 \cos x_0) [J_n(x_1) \{nY_n(x_2) \\ & + x_2 Y_n'(x_2)\} - Y_n(x_1) \{nJ_n(x_2) + x_2 J_n'(x_2)\}] = 0 \dots\dots\dots (91) \end{aligned}$$

$\alpha=2, (n=0)$  の場合には,

$$\begin{aligned} & \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos x_0 - kx_0 \sin x_0) x_1 \{J_0'(x_1) Y_0'(x_2) - Y_0'(x_1) J_0'(x_2)\} \\ & - x_0 (\sin x_0 + kx_0 \cos x_0) \{J_0(x_1) Y_0'(x_2) \\ & - Y_0(x_1) J_0'(x_2)\} = 0 \dots\dots\dots (92) \end{aligned}$$

$\alpha=0, (n=-1)$  の厚さ一定の場合には,

$$\begin{aligned} & \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos x_0 - kx_0 \sin x_0) [\{x_1 J_1'(x_1) - J_1(x_1)\} \{x_2 Y_1'(x_2) \\ & - Y_1(x_2)\} - \{x_1 Y_1'(x_1) - Y_1(x_1)\} \{x_2 J_1'(x_2) \\ & - J_1(x_2)\}] - x_0 (\sin x_0 + kx_0 \cos x_0) [J_1(x_1) \{x_2 Y_1'(x_2) \\ & - Y_1(x_2)\} - Y_1(x_1) \{x_2 J_1'(x_2) - J_1(x_2)\}] = 0 \dots\dots\dots (93) \end{aligned}$$

(B) 強制振動, 剛性質量  $I$  に  $M_{t,0} = M_0 \sin qt$  で表される周期的な振りモーメントが作用する場合のこの系の強制振動を茲で論ずる事にする。周縁条件として, 次の3式が存在する。

(a) 円板の外周縁にて,

$$r=r_2; \tau_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots (94)$$

(b) 円板の内周縁, 即ち車軸と円板の連結点では,

$$(M_t)_{r=r_1} = (M_{t,0})_{z=0} \dots\dots\dots (95)$$

$$(\gamma)_{r=r_1} = \gamma_1(\theta)_{z=0} \dots\dots\dots (96)$$

(c) 車軸の右端, 即ち車軸と剛性質量との連結点で,

$$(M_{t,0})_{z=l} = -\frac{I}{g} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)_{z=l} + M_0 \sin qt \dots\dots\dots (97)$$

(94) より,

$$A \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} + B \{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} = 0 \dots\dots (98)$$

(95) より,

$$\begin{aligned} & Nr_1^n [A \{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} + B \{nJ_{-n}(u_1) \\ & + u_1 J_{-n}'(u_1)\}] = \mu_0 J \frac{v_0}{l} \cdot C \dots\dots\dots (99) \end{aligned}$$

但し,  $v_0 = \alpha \sqrt{\frac{\gamma_0}{\mu_0 g}} l$

(97) より,

$$C \cos v_0 - D \sin v_0 = kv_0 \{C \sin v_0 + D \cos v_0\} + \frac{M_0 l}{\mu_0 J v_0} \dots\dots\dots(100)$$

(96) より,

$$r_1^{n+1} [A J_n(u_1) + B J_{-n}(u_1)] = r_1 D \dots\dots\dots(101)$$

(99), (101) より C, D を夫々 A, B の項で表し (100) に代入すると,

$$A \left[ \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos v_0 - kv_0 \sin v_0) \{n J_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1) - v_0 (\sin v_0 + kv_0 \cos v_0) J_n(u_1)\} + B \left[ \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos v_0 - kv_0 \sin v_0) \{n J_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)\} - v_0 (\sin v_0 + kv_0 \cos v_0) J_{-n}(u_1) \right] \right] = \frac{M_0 l}{\mu_0 J r_1^n} \dots\dots\dots(102)$$

(98) と (102) から A, B が求められる。

$$A = \frac{M_0 l}{\mu_0 J \Delta_2 r_1^n} \{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \dots\dots\dots(103)$$

$$B = - \frac{M_0 l}{\mu_0 J \Delta_2 r_1^n} \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \dots\dots\dots(104)$$

但し  $\Delta_2$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos v_0 - kv_0 \sin v_0) [\{n J_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} \\ & \{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} - \{n J_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)\} \\ & \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\}] - v_0 (\sin v_0 + kv_0 \cos v_0) \\ & [J_n(u_1) \{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} - J_{-n}(u_1) \\ & \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\}] \dots\dots\dots(105) \end{aligned}$$

円板の変位及剪断応力は次の様になる。

$$\begin{aligned} \eta/r = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \frac{(\lambda m)^n}{\Delta_2} [\{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} J_n(u) \\ & - \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} J_{-n}(u)] \sin qt \dots\dots\dots(106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}/\mu = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \frac{(\lambda m)^n}{\Delta_2} [\{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \{n J_n(u) \\ & + u J_n'(u)\} - \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \{n J_{-n}(u) \\ & + u J_{-n}'(u)\}] \sin qt \dots\dots\dots(107) \end{aligned}$$

車軸について, C, D の値は (103), (104) の A, B を夫々 (99), (101) に代入して求められる。

$$\begin{aligned} C = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J v_0 \Delta_2} \cdot \left( \frac{Nl}{\mu_0 J} \right)^0 [\{n J_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} \{n J_n(u_1) \\ & + u_1 J_n'(u_1)\} - \{n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \{n J_{-n}(u_1) \\ & + u_1 J_{-n}'(u_1)\}] \dots\dots\dots(108) \end{aligned}$$

$$D = \left(\frac{M_0 l}{\mu_0 J}\right) \cdot \frac{1}{A_2} [\{nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)\} J_n(u_1) - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} J_{-n}(u_1)] \dots\dots\dots(109)$$

車軸の振れ角  $\theta$ , 及び作用する振れモーメント  $M_{t.0}$  の値は次の様になる。

$$\theta = \frac{M_0 l}{\mu_0 J A_2} \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} \{ (nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)) (nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)) - (nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) (nJ_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)) \} \sin\left(\frac{v_0 z}{l}\right) + \{ J_n(u_1) (nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)) + J_{-n}(u_1) (nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) \} \cos\left(\frac{v_0 z}{l}\right) \right] \dots\dots\dots(110)$$

$$M_{t.0} = \frac{M_0 v_0}{A_2} \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} \{ (nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)) (nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)) - (nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) (nJ_{-n}(u_1) + u_1 J_{-n}'(u_1)) + u_1 J_{-n}'(u_1) \} \cos\left(\frac{v_0 z}{l}\right) - \{ J_n(u_1) (nJ_{-n}(u_2) + u_2 J_{-n}'(u_2)) - J_{-n}(u_1) (nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) \} \sin\left(\frac{v_0 z}{l}\right) \right] \dots\dots\dots(111)$$

$n=0$  又は整数の場合には  $J_{-n}$  の代わりに  $Y_n$  と置けば上記の諸式が適用される。即ち、

$$A_2 = \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos v_0 - kv_0 \sin v_0) [\{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} - \{nY_n(u_1) + u_1 Y_n'(u_1)\} \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\}] - v_0 (\sin v_0 + kv_0 \cos v_0) [J_n(u_1) \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} - Y_n(u_1) \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\}] \dots\dots\dots(112)$$

$$A = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left(\frac{1}{A_2 r_1^n}\right) \{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \dots\dots\dots(113)$$

$$B = -\frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left(\frac{1}{A_2 r_1^n}\right) \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \dots\dots\dots(114)$$

$$\eta/r = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \frac{(\lambda m)^n}{A_2} [\{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} J_n(u) - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} Y_n(u)] \sin qt \dots\dots\dots(115)$$

$$\tau_{r\theta}/\mu = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \frac{(\lambda m)^n}{A_2} [\{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \{nJ_n(u) + u J_n'(u)\} - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \{nY_n(u) + u Y_n'(u)\}] \sin qt \dots\dots\dots(116)$$

$$C = \left(\frac{M_0 l}{\mu_0 J}\right) \cdot \frac{1}{v_0 A_2} \cdot \left(\frac{Nl}{\mu_0 J}\right) [\{nY_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)\} \{nJ_n(u_1) + u_1 J_n'(u_1)\} - \{nJ_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)\} \{nY_n(u_1) + u_1 Y_n'(u_1)\}] \dots\dots\dots(117)$$

$$D = \left( \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \right) \cdot \frac{1}{A_2} \{ J_n(u_1) \{ n Y_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2) \} \\ - Y_n(u_1) \{ n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2) \} \} \dots \dots \dots (118)$$

$$\theta = \left( \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \right) \frac{1}{A_2} \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} \{ (n Y_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)) (n J_n(u_1) \right. \\ \left. + u_1 J_n'(u_1)) - (n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) (n Y_n(u_2) \right. \\ \left. + u_2 Y_n'(u_2)) \} \sin \left( \frac{v_0 z}{l} \right) + \{ J_n(u_1) (n Y_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)) \right. \\ \left. - Y_n(u_1) (n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) \} \cos \left( \frac{v_0 z}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (119)$$

$$M_{t,0} = \frac{M_0 v_0}{A_2} \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} \{ (n Y_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)) (n J_n(u_1) \right. \\ \left. + u_1 J_n'(u_1)) - (n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) (n Y_n(u_1) \right. \\ \left. + u_1 Y_n'(u_1)) \} \cos \left( \frac{v_0 z}{l} \right) - \{ J_n(u_1) (n Y_n(u_2) + u_2 Y_n'(u_2)) \right. \\ \left. - Y_n(u_1) (n J_n(u_2) + u_2 J_n'(u_2)) \} \sin \left( \frac{v_0 z}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (120)$$

$\alpha=2$  ( $n=0$ ) の場合には,

$$A_2 = \frac{Nl}{\mu_0 J} (\cos v_0 - k v_0 \sin v_0) u_1 u_2 \{ J_0'(u_1) Y_0'(u_2) \\ - Y_0'(u_1) J_0'(u_2) \} - v_0 (\sin v_0 + k v_0 \cos v_0) u_2 \\ \{ J_0(u_1) Y_0'(u_2) - Y_0(u_1) J_0'(u_2) \} \dots \dots \dots (121)$$

$$\{ A = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{A_2} \right) u_2 Y_0'(u_2) \dots \dots \dots (122)$$

$$\{ B = - \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{A_2} \right) u_2 J_0'(u_2) \dots \dots \dots (123)$$

$$\eta/r = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{A_2} \right) u_2 \{ Y_0'(u_2) J_0(u_1) - J_0'(u_2) Y_0(u_1) \} \sin qt \dots (124)$$

$$\tau_{r\theta}/\mu = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{A_2} \right) [u_2 u_1 \{ Y_0'(u_2) J_0'(u_1) - J_0'(u_2) Y_0'(u_1) \} \\ \sin qt \dots \dots \dots (125)$$

$$C = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{v_0 A_2} \right) \left( \frac{Nl}{\mu_0 J} \right) u_1 u_2 \{ Y_0'(u_2) J_0'(u_1) \\ - J_0'(u_2) Y_0'(u_1) \} \dots \dots \dots (126)$$

$$D = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) [J_0(u_1) Y_0'(u_2) - Y_0(u_1) J_0'(u_2)] \dots \dots \dots (127)$$

$$\theta = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{A_2} \right) \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} u_1 u_2 \{ Y_0'(u_2) J_0'(u_1) \right. \\ \left. - J_0'(u_2) Y_0'(u_1) \} \sin \left( \frac{v_0 z}{l} \right) + u_2 \{ J_0(u_1) Y_0'(u_2) \right. \\ \left. - Y_0(u_1) J_0'(u_2) \} \cos \left( \frac{v_0 z}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (128)$$

$$M_{t,0} = \frac{M_0 v_0}{A_2} \left[ \frac{Nl}{v_0 \mu_0 J} u_1 u_2 \{ Y_0'(u_2) J_0'(u_1) - \right. \\ \left. J_0'(u_2) Y_0'(u_1) \} \cos \left( \frac{v_0 z}{l} \right) - u_2 \{ J_0(u_1) Y_0'(u_2) \right. \\ \left. - Y_0(u_1) J_0'(u_2) \} \sin \left( \frac{v_0 z}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (129)$$

$\alpha=0, (n=-1)$  である厚さ一定の円板の場合には,

$$\begin{aligned} D_2 = & \frac{NI}{\mu_0 J} (\cos v_0 - kv_0 \sin v_0) [\{u_1 J_1' (u_1) - J_1 (u_1)\} \{u_2 Y_1' (u_2) \\ & - Y_1 (u_2)\} - \{u_1 Y_1' (u_1) - Y_1 (u_1)\} \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\}] \\ & - v_0 (\sin v_0 + kv_0 \cos v_0) [J_1 (u_1) \{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} \\ & - Y_1 (u_1) \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\}] \dots\dots\dots(130) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{r_1}{D_2} \right) \{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} \dots\dots\dots(131) \\ B = - \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{r_1}{D_2} \right) \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\} \dots\dots\dots(132) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \eta/r = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{D_2} \right) \left( \frac{1}{\lambda m} \right) [\{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} J_1 (u) \\ & - \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\} Y_1 (u)] \sin qt \dots\dots\dots(133) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}/\mu = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{D_2} \right) \left( \frac{1}{\lambda m} \right) [\{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} \{u J_1' (u) \\ & - J_1 (u)\} - \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\} \{u Y_1' (u) \\ & - Y_1 (u)\}] \sin qt \dots\dots\dots(134) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \left( \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \right) \frac{1}{v_0 D_2} \left( \frac{NI}{\mu_0 J} \right) [\{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} \{u_1 J_1' (u_1) \\ & - J_1 (u_1)\} - \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\} \{u_1 Y_1' (u_1) - Y_1 (u_1)\}] \dots\dots(135) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & \left( \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \right) \frac{1}{D_2} [J_1 (u_1) \{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} \\ & - Y_1 (u_1) \{u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)\}] \dots\dots\dots(136) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{M_0 l}{\mu_0 J} \left( \frac{1}{D_2} \right) \left[ \frac{NI}{v_0 \mu_0 J} \{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2), (u_1 J_1' (u_1) \right. \\ & - J_1 (u_1)) - (u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)) (u_1 Y_1' (u_1) - Y_1 (u_1))\} \\ & \sin \left( \frac{v_0 Z}{l} \right) + \{J_1 (u_1) (u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)) \\ & - Y_1 (u_1) (u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2))\} \cos \left( \frac{v_0 Z}{l} \right) \dots\dots\dots(137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{t,0} = & \frac{M_0 v_0}{D_2} \left[ \frac{NI}{v_0 \mu_0 J} \{u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)\} (u_1 J_1' (u_1) \right. \\ & - J_1 (u_1)) - (u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2)) (u_1 Y_1' (u_1) \\ & - Y_1 (u_1))\} \cos \left( \frac{v_0 Z}{l} \right) - \{J_1 (u_1) (u_2 Y_1' (u_2) - Y_1 (u_2)) \\ & - Y_1 (u_1) (u_2 J_1' (u_2) - J_1 (u_2))\} \sin \left( \frac{v_0 Z}{l} \right) \dots\dots\dots(138) \end{aligned}$$

剛性質量に作用する振りモーメントの周期が振動系の固有周期と一致する時は  $q=p$  であり従つて  $v_0=x_0, u_1=x_1; u_2=x_2$  となるから (105) で与えられる  $D_2$  の値は (90) によりて 0 となる。従つて (105) の変位, (107) の剪断応力, (110) の捩れ角  $\theta$ , 等は  $\infty$  に接近しする事になるから, 共鳴現象が起る事が知られる。

## (IV) 結 言

以上を総括して、茲で取扱つた主要項目を述べ結言とする。(I)に於ては円板の振り振動の基礎微分方程式を誘導して、この解法を明にした。変位も、剪断応力も共にベッセル函数で表される事が知られた。(II)一般解の応用として1箇の円板の自由振動と強制振動を論じた。自由振動は3箇の異なる周縁条件の場合、即ち(a)外周縁自由で、内周縁が弾性的に固定される場合(b)外周縁自由で、内周縁が完全固定の場合(c)内外両周縁共に自由の場合を述べ、夫々について固有振動数を決定する振動数方程式を導いた。強制振動の例として、外周縁自由の円板の内周縁に  $M_t = M_0 \sin qt$  で表される周期的変動偶力が作用する場合を取り、その共鳴現象を解明した。(III)1円板と1箇の刚性質量が弾性車軸で連結されてゐる振動系を考へ、その振動を調べた。先づ円板の外周縁が自由の場合の系の固有振動数を与へる振動数方程式を導き、強制振動の例として刚性質量に  $M_{t.0} = M_0 \sin qt$  で表される周期的変動偶力が作用する場合を考へ、系の強制振動を論じ、その共鳴現象を解明した。尙数値的の計算、及び実験等については追つて報告する予定である。

## 参 考 文 献

- (1) 筆者：同題目：昭和28年9月，日本機械学会金沢地方講演会前刷
- (2) 大賀憲二：蒸気及瓦斯タービン，425頁  
A. Stodola：Dampf und Gasturbinen：S. 325 (Auf. 5)
- (3) J. Prescott：Applied elasticity：P. 565  
妹沢克惟：振動学，264頁
- (4) 大賀憲二：蒸気及瓦斯タービン，482頁  
妹沢克惟：振動学，273頁
- (5) Love：Mathematical theory of elasticity：P. 54 (4th ed.)