機械振動系の一解析法

安 田 力

AN ANALYSIS OF MECHANICALLY-VIBRATING SYSTEMS

By

Tsutomu YASUDA

Synopsis: This paper deals with the forced vibration of a mechanical system consisting of several elements.

The author regarded such a system as equivalent to an electrical multi-terminal network, some of the terminals of which being terminated by several additional circuit elements. The main elements of the vibrating system, such as plates, membranes, bars, strings, etc., can be represented by the multi-terminal networks and the additional mechanically-vibrating elements, coupled to the main elements, such as masses, springs, etc., can be replaced by the additional circuit elements referred to previously.

From the values of these elements, various characteristics of the entire system are obtained with the use of the conventional network theory.

I. 緒　　言

音響機器，機械濾波器，機械構造部分などにおける機械振動系の問題を取扱うに当つて，その系を構成している各素子の振動諸特性が既知であるときには，それらの組合せによつてできた連成機械振動系の強制定常振動諸特性を重畳の理によつて代数的操作だけで求めることができる。之は丁度電気回路網の特性を，構成する各素子の定数から求めることに相等している。ところで機械振動系の構成素子には集中質量，スプリング等のようにそれが集中二端子回路素子とみなされるものもあるが，弦，膜，棒または板などのような分布定数的素子が系の主幹となつていることが多い。之等の分布定数的な素子は一般に無限個の自由度をもつとみなされる上，その素子上の相異る二つ以上の個所で他の素子との間に energy の交換を行つているのが普通で，その取扱いには特別な配慮が必要である。

本稿は無損失振動体ではその上の energy の授受個所間の振動伝達特性が規準函数や規準振動数等によつて簡潔な形に表わしうることに着目し，そのような振動素子を主

幹とする連成機械振動系の強制定常振動諸特性を求める方法について述べたものである。とくに音響機器や機械的濾波器等の問題ではその系に出力を取出す個所と入力を加える個所とがあつて，ひとつの振動伝達系をなしていることが多いので，その特性は四端子網的な表示をするのが便利であるからそれにならつた。

電気系との対応には一応″力-電圧（速度-電流）法″[1],[2]を用いて説明したが，勿論″力-電流（速度-電圧）法″によつても推論には何のちがいもなく，取扱う機械量はすべて同一で，ただインピーダンス，アドミタンス等を相互に読みかえるだけでよい。

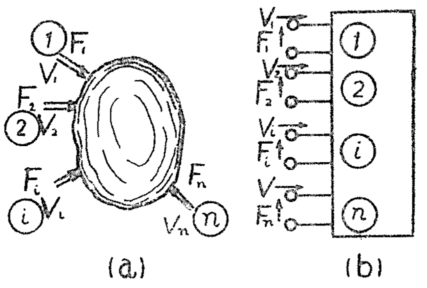
2.　Y行列（Z行列）による振動系の多端子網的表現

いま線型機械振動系に energy の授受個所が n 個あるとき，それら各個所の力と速度の関係は次式のようにあらわしうる。

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{F} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{V} \quad \cdots\cdots(2)$$

ただしこゝに $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ は夫々各個所におけるこの系の速度 V_1, ……, V_n または力 F_1, ……, F_n を要素とする n 次元のベクトルを示し，$\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, はそれら両ベクトル間の変換行列である。力-電圧法による等価考察によれば，各勢力授受個所を夫々一対の端子とみて系が $2n$-端子電気回路になるから，之等の変換行列 $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$は夫々短絡アドミタンス行列，開放インピーダンス行列に相等する。本文では之等を今後 $\mathbf{Y}$ 行列，$\mathbf{Z}$ 行列と略称することにしよう。勿論 $\mathbf{Z}$ 行列と $\mathbf{Y}$ 行列は互に逆行列であり，また何れも対称行列であることは電気回路の相反性と同じく通常の機械振動系では当然のことである。



第　1　図
(a)　n ヶ所に力を受ける機械振動系
(b)　その等価 $2n$ 端子網

次にこのような行列 $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ の要素のもつ物理的意味について若干の説明を加える。

いま(1)式に於て第 j 個所（$1 \leq j \leq n$）を力 F_j で駆動し，他の個所には何等力を加えていないとすれば，そのときの第 i 個所（$1 \leq i \leq n$）の速度 V_i は次式のようになる。

$$V_i = Y_{ij} F_j \quad \cdots\cdots(3)$$

こゝに Y_{ij} は $\mathbf{Y}$ 行列に於ける第 i 行第 j 列の要素をあらわすものとする。(3)式より直ちに判るように Y_{ij} は系の第 j 個所を単位の力で駆動したとき第 i 個所の強制定常振動速度をあらわす。したがつて系内の唯一個所を単位の力で駆動したときの系内各個所の振動速度を知れば特定の行または列の $\mathbf{Y}$ 行

列要素は直ちに与えられる。$i = j$ のとき即ち Y_{ii} はこのような場合駆動個所の動かし易さを代表する量で，通常系のその点に於けるモビリチ（Mobility）と言われ，系が二端子網回路とみられる場合にはよく用いられるものである。本文では電気回路に準じこの Y_{ii} を自己短絡アドミタンス，$i \fallingdotseq j$ のときの Y_{ij} を相互短絡アドミタンスと呼ぶことにする。短絡とは力-電圧対応に於て $F_i = 0$ なることが短絡という状態に対応することによる。通常用いられてきた自己ならびに相互機械インピーダンスというものゝ逆数は之に相等する。

つぎに **Z** は **Y** の逆行列であるが，それらの要素の物理的な意味は次の通りである。

即ちいま第 j 個所が V_j の速度となるように駆動されているとき，他の（$n-1$）個所の速度が零となるよう予め拘束を施してあるとすれば(2)式より第 i 個所の力 F_i は

$$F_i = Z_{ij}\ V_j \quad \cdots\cdots(4)$$

但し Z_{ij} は **Z** 行列の第 i 行第 j 列の要素で $Z_{ij} = Z_{ji}$ の関係がある。

(4)式から明らかなように Z_{ij} は第 j 個所以外の（$n-1$）個所の運動を全く拘束し，第 j 個所を単位の速度となるように駆動したときに，第 i 個所に発生する反力をあらわす。とくに Z_{jj} はこのような状態の下における第 j 個所からみた系の機械インピーダンスを示す。

つぎに $n = 2$ の場合を考えると，之は丁度四端子回路に相等するものになるから第1，第2両個所の力と速度の関係を

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(5)$$

のようにあらわすこともできる。之は **Y** 行列による表示

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (Y_{12} = Y_{21}) \cdots\cdots(6)$$

を書き直したものから，つぎの関係にあることがわかる。

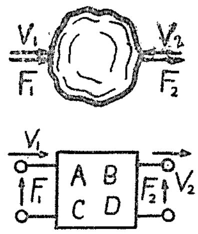
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{Y_{22}}{Y_{12}}, & B &= \frac{1}{Y_{12}}, \\ C &= \frac{Y_{11}Y_{22} - Y^2_{12}}{Y_{12}}, & D &= \frac{Y_{11}}{Y_{12}}, \\ AD &- BC = 1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7)$$

但し回路網理論に準じ (5), (7) 両式のように四端子定数による表現においては F_2 の符号を **Y** 行列と **Z** 行列の場合と逆向きにとる（第2図）。ところで之等四量の物理的意味はつぎのようになる。

まず (5) で $V_2 = 0$ とすれば之は第2個所の拘束を意味する。

$$\therefore \quad A = \left.\frac{F_1}{F_2}\right|_{V_2=0}, \qquad C = \left.\frac{V_1}{F_2}\right|_{V_2=0}$$

したがつて A は第2個所を固定し，第1個所を駆動したときにそれら二つの個所に於ける反力の比を示すもので，之は等価電気系では系を一つの変成器とみなしたときの変圧比をあらわすものとなる。また C の意味は同様な状態に於て第2個所に単位の反力を発生させるような第1個所の駆動速度であり，之は **Z** 行列の要素 $Z_{12} = Z_{21}$ の逆数に相等する。



第 2 図
四端子定数(基本行列)を用いるときの正符号のとり方

つぎに (5) に於て $F_2 = 0$ とおけば，

$$B = \left.\frac{F_1}{V_2}\right|_{F_2=0}, \qquad D = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{F_2=0}$$

したがつて B は **Y** 行列の要素 $Y_{12} = Y_{21}$ と同一の意味を，また D は第2個所に拘束力を全く加えぬときの，駆動点たる第1個所と受動点たる第2個所の速度の比をあらわし，之は変流比の如き量であることがわかる。

之等 A, B, C, 及び D の各量は機器設計の際屢々問題になるもので解析等により **Y** 行列が得られているときには (7) により計算する。

3. 単一の分布定数的素子の Y 行列

一般にその第 m 規準振動の規準函数が Ξ_m，規準振動数*（固有振動数*）ω_m，全質量 M の無損失機械振動体を

$$f\, e^{j\omega t}$$

であらわされるような，周波数 ω の正弦的時間変化をする分布力で駆動したときの強制定常振動速度分布 v は次式のようになる。(3)

$$v(x) = \sum_m \frac{j\omega \Xi_m(x)\, e^{j\omega t}}{(\omega_m^2 - \omega^2)\, M} \iiint \Xi_m f\, dV \quad \cdots\cdots (8)$$

こゝに $v(x)$, $\Xi_m(x)$ は夫々振動体上の点 x における v, Ξ_m の値を示し，右辺の積分範囲は振動体全容積に亘るものとする。

若しこのとき加えられる力が分布力でなく，振動体上の n 個の点 P_1, P_2, ……, P_n に加えられた n 個の集中力 F_1, F_2, ……, F_n であるならば，第 i 個所 P_i に於ける速度 V_i は

$$V_i = \sum_m \frac{j\omega \Xi_m(P_i)}{(\omega_m^2 - \omega^2)\, M} \sum_{j=1}^{n} \Xi_m(P_j)\, F_j \quad \cdots\cdots (8')$$

---

* 本稿では circular frequency を単に振動数または周波数と言うことにする。したがつて本当の振動数はその $1/2\pi$ である。

のようにあらわしうることが (8) からわかる。之により前節に述べた Y 行列はこの単一振動体については

$$\left.\begin{aligned} Y_{ii} &= \sum_m \frac{j\omega\, \Xi^2{}_m (P_i)}{(\omega^2{}_m - \omega^2)\, M}, \quad (n\text{個}) \\ Y_{ij} &= \sum_m \frac{j\omega\, \Xi_m (P_i)\, \Xi_m (P_j)}{(\omega^2{}_m - \omega^2)\, M}, \quad (n\,(n-1)\text{個}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (9)$$

のような要素をもつていることがわかる。したがつて既に規準函数や規準振動数が求められているような機械振動体（分布定数的素子）の Y 行列はそれらから (9) により直ちに求まることになる。

Z 行列は Y 行列の逆行列として求められるがその要素は Y 行列のそれに比べてはるかに複雑になるのが普通である。

4. 分布力を受ける場合の Y 行列

前項での論議は振動体と他系との勢力授受が集中力によつて行われるとしたものであるが，振動体上の面とか線とかまたときとしてはその容積に分布した力によつて勢力授受がなされるときにも力の分布の形が予め知られている場合には同様な取扱いができる。

いま第 j 個所に加えられる力が振幅位相を示す F_j と，分布の形を表す場所の函数 $\varphi_j(x)$ とによつて

$$F_j\, \varphi_j(x) \cdots\cdots\cdots (10)$$

のように表わされているならば，この力のみによる強制定常振動速度の分布は (8) から直ちに

$$v(x) = F_j \sum_m \frac{j\omega\, \Xi_m(x)\, e^{j\omega t}}{(\omega^2{}_m - \omega^2)\, M} \iiint \varphi_j(x)\, \Xi_m(x)\, dV_x$$

の形になることがわかる。したがつて若しこのような分布力を受ける個所に限り，力として (10) 式の F_j のような振幅（位相）代表量を，また速度としては

$$V_j = \iiint \varphi_j(x)\, v(x)\, dV_x \cdots\cdots\cdots (10')$$

のようにきめられた V_j をとることにすれば，(9) 式の $\Xi_m(P_j)$ の代りに積分

$$\iiint \varphi_j(x)\, \Xi_m(x)\, dV_x$$

を用いるだけで (1), (2) 両式のような表現が可能となることがわかる。

ところで以上は $\varphi_j(x)$ のような分布函数が既知の場合であるが，一般に既知の分布をした機械インピーダンスを振動体に附加した場合などでは，それによる反力の分布は必ずしも容易に得られないことに注意しなければならない。しかしながら音響工学上屡

々現れるのは振動体表面で流体系からなる容積インピーダンスを駆動する問題や平等分布力で振動体を駆動する場合である。このときには上述のような Y 行列または Z 行列による回路網的な表現が非常に役に立つ。このように面状平等分布力を受ける個所については，(10) で表われた F_j は力の面密度（音響系では之が音圧に相等する）を，また (10')の速度 V_j は第 j 個所に当る振動体表面が振動により排除する容積速度をあらわすことになるからである。

よつて面状平等分布力を受ける個所（之を前記 P_j の代りに S_j で表わす）S_j に関しては，Y 行列要素を示す (9) に於ける $\Xi_m(P_j)$ の代りに単に

$$\iint_{S_j} \Xi_m(x)\, d S_x$$

とおけば良いことがわかる。

したがつて平等分布力を受ける面 S_j と集中力を受ける点との間の相互短絡アドミタンス Y_{ij} は

$$Y_{ij} = \sum_m \frac{j\omega\, \Xi_m(P_i)}{(\omega^2{}_m - \omega^2)M} \iint_{S_j} \Xi_m(x)\, d S_x \quad \cdots\cdots (11)$$

また S_j 面からみた自己短絡アドミタンス Y_{jj} は

$$Y_{jj} = \sum_m \frac{j\omega}{(\omega^2{}_m - \omega^2)M} \left\{ \iint_{S_j} \Xi_m(x)\, d S_x \right\}^2 \cdots\cdots (12)$$

となる。

5.　連成振動系の特性式 [5]

本節では既に Y 行列が求まつているような振動系の数個所に特性のわかつた集中定数的振動素子を取付けてできた連成振動系の特性を求めることを試みる。このような問題の簡単な場合は，D. Young [6] 及び鈴木辰男 [7] により解かれているが，本節ならびに次節に述べるところのものはその一般化である。

いま (1) に於て第 3 個所以下第 n 個所までの力が夫々その個所にとりつけられた二端子網的素子を駆動するために生ずる反力であるならば，それら各個所の力と速度の間には

$$V_i = -F_i Y_i \qquad (i = 3, 4, \cdots\cdots, n) \cdots\cdots (13)$$

の関係がある。こゝに Y_i は第 i 個所にとりつけた振動体の機械インピーダンスの逆数（モビリチ）である。

(13) を (1) に代入して移項することにより直ちに次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ O \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\cdots\cdots Y_{1j}\cdots\cdots Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\cdots\cdots Y_{2j}\cdots\cdots Y_{2n} \\ Y_{31} & Y_{32} & (Y_{33}+Y_3)\cdots Y_{3j}\cdots\cdots Y_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & Y_{i3}\cdots\cdots(Y_{ii}+Y_i)\cdots Y_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3}\cdots\cdots(Y_{nn}+Y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \cdots\cdots(14)$$

この式から F_3, ………, F_n, を消去すれば，第1個所と第2個所だけの力と速度の関係式として次の形の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdots\cdots(15)$$

こゝに y_{11}, ……, y_{22} 等はこのような連成振動系の二つの個所間の **Y** 行列でありつぎのような値をもつている。

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= a_{22}/\Delta' & y_{12} &= a_{21}/\Delta' = a_{12}/\Delta' \\ y_{21} &= y_{12}\quad , & y_{22} &= a_{11}/\Delta' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(16)$$

式中 a_{ij} は (14) の変換行列の要素でできる n 次の行列式 Δ の第 i 行，第 j 列の要素に関する余因数で，また Δ' は行列式 Δ の第1及び第2行，列を除いてつくつた $(n-2)$ 次の行列式である。

したがつて $(n-2)$ 個の附加振動素子をもつ連成機械振動系の任意の二個所間の振動伝達特性は丁度四端子回路の場合のように (15) で表わされることが判つた。

(15) はまた次のような形に書き改めることもできる。

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \cdots\cdots(17)$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \cdots\cdots(18)$$

(17) は開放インピーダンス行列（**Z** 行列）による表示で，その各要素は (15) の行列の逆行列として求まり，また (18) は四端子網定数（基本行列）による表示でこの場合は F_2 の符号を逆にとる。第1表に之等を一括して示す。

第　1　表

Y 行　列 $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$	$y_{11} = \dfrac{a_{22}}{\Delta'}$,　$y_{12} = \dfrac{a_{21}}{\Delta'} = \dfrac{a_{12}}{\Delta'}$, $y_{21} = \dfrac{a_{12}}{\Delta'} = y_{12}$,　$y_{22} = \dfrac{a_{11}}{\Delta'}$

Z 行列 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$z_{11} = \dfrac{a_{11}}{\Delta}, \quad z_{12} = \dfrac{a_{21}}{\Delta} = \dfrac{a_{12}}{\Delta},$ $z_{21} = \dfrac{a_{12}}{\Delta} = z_{12}, \quad z_{22} = \dfrac{a_{22}}{\Delta}$
基本行列 $\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$	$a = \dfrac{a_{11}}{a_{12}}, \quad b = \dfrac{\Delta'}{a_{12}}$ $c = \dfrac{a_{11}a_{22} - a^2_{12}}{a_{12}\,\Delta'}, \quad d = \dfrac{a_{22}}{a_{12}}$
影像インピーダンス $Z_{01} = \Delta' \sqrt{\dfrac{a_{11}}{a_{22}(a_{11}a_{22} - a^2_{12})}}$ $Z_{02} = \Delta' \sqrt{\dfrac{a_{22}}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a^2_{12})}}$	伝達定数 $\cosh\theta = \dfrac{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}}{a_{12}}$ $\sinh\theta = \dfrac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a^2_{12}}}{a_{12}}$
共振条件 : $\Delta' = 0$	共振時振動姿態 : $\Delta''\Big\vert_{\Delta'=0}$

6. 共振諸特性[5]

前節のような連成系の共振に関する諸特性について考える。まず駆動力の周波数が共振周波数に近づくと振幅が極大となることから，無損失のときには (16) 式右辺の分母 Δ' を零とおき，

$$\Delta' = 0 \ : \text{共振条件} \quad \cdots\cdots (19)$$

とする。但しこのときもし (16) 式右辺分子との間に共通因数がある場合にはそれを除いたものを零とおかねばならない。

たとえば附加素子が Y_3 唯一個の場合には共振条件 (19) は

$$Y_{33} + Y_3 = 0$$

となり，モビリチを用いた方法では屢々現れる形となる。

つぎに共振時の振動姿態は (18) を満足する共振周波数を (16) の a_{12} に代入すれば求められるが，次のようにすれば計算をはるかに簡略にすることができる。すなわち "共振時の振動姿態は系に固有なもので，着力点 P_1 の座標に無関係である" とみなされるから，P_1 点を任意の附加素子をつけた点たとえば P_n に合致させると Δ の第1行要素はその第 n 行要素と等しくなり

$$a_{12} = a_{21} = (-1)^{n-1}\,Y_n\,\Delta'' \quad \cdots\cdots (20)$$

となる。こゝに Δ'' は Δ の第1行及び第2行と第1列及び第 n 列とを除いてできる

$(n-2)$ 次の小行列式である。故に

$$\Delta''|_{\text{共振周波数}} : \text{共振時振動姿態} \cdots\cdots (21)$$

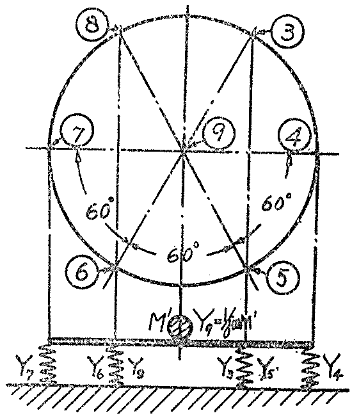
Δ'' は $(n-1)$ 次の a_{12} 等より一次低いから計算に便利である。

共振時以外の振動姿態も (16) の分母 Δ' が第2個所の位置に無関係であるから，a_{12} の値が第2個所の座標を移動したときに変る有様を調べれば得られる。また何れの場合にも Δ'' の中に Δ' と共通因数があるときにはそれを除いた分のみに着目すればよい。

7. 其他の諸問題

本法の目的は工学上の問題に対して所要の特性諸量を計算する簡易な手段を与えることにあるが，実際の適用に際して直面する事項についてつぎに簡単な例を二三あげながら説明を加える。

(a) **幾何学的対称性が存在する場合**　附加素子の数が多くなると行列の次数 n が大きくなるために実際の計算の手数は急激に増大する。ところで之等の附加素子の配置及び素子の特性値に幾何学的対称性が存在する場合には，Y 行列，したがつて取扱う行列式に同一要素ができるために，計算操作が極めて簡単になることが多い。



第 3 図
中心に集中質量をつけ周辺の対称六点をバネで支えた円板

たとえば第3図のように中心に集中質量を附加し，その周辺上の対称6点を等しいバネで支持した円板の問題を考えると，このときの行列式 Δ の次数 n は $n=2+6+1=9$ で大きいけれども，対称性によつて

$Y_{33}=Y_{44}=\cdots\cdots=Y_{88}$,　$Y_3=Y_4=\cdots\cdots=Y_8$,

$Y_{39}=Y_{49}=\cdots\cdots=Y_{89}$,　$Y_{34}=Y_{45}=Y_{56}=Y_{67}=Y_{78}=Y_{83}$,

$Y_{35}=Y_{46}=Y_{57}=Y_{68}=Y_{73}=Y_{84}$,　$Y_{36}=Y_{47}=Y_{58}$,　$Y_{ij}=Y_{ji}$

などが成り立つことに注意すれば，行列式 Δ', Δ'' などは

$$\Delta'=X\{(Y_{99}+Y_9)(Y_{33}+Y_3+2Y_{34}+2Y_{35}+Y_{36})-6(Y_{39})^2\},$$

$$\Delta''=X\{Y_{29}(Y_{33}+Y_3+2Y_{34}+2Y_{35}+Y_{36})-Y_{39}(Y_{23}+Y_{24}+\cdots\cdots+Y_{28})\}$$

のように極めて簡単な形となる。但しこゝに X は共通因数で，

$$X=-\{(Y_{33}+Y_3-Y_{35})^2-(Y_{34}-Y_{36})^2\}^2(Y_{33}+Y_3-2Y_{34}+2Y_{35}-Y_{36})$$

である。したがつて共振条件は

共振条件：$(Y_{99}+Y_9)(Y_{33}+Y_3+2Y_{34}+2Y_{35}+Y_{36})=6(Y_{39})^2$

となる。この式中でY_{ij}は自由円板の規準振動諸値から求められるもので，とくにY_{99}, Y_{39}などでは非対称規準振動の規準函数の値が中心で零となることからそれらは対称振動の項のみから成ることがわかる外，他のY_{ij}などについても特殊な関係があることに注意すれば計算がかなり容易になる。

（b） **集中個所で支持された振動体の問題** 若し振動体の特定個所の運動を拘束してそこの運動を零に保つならば，それは単にその個所にアドミタンス零の素子を附加したと考えれば良い。

たとえば前例で周辺の支持スプリングを取除き，それら各点を支持した場合を考えると，之は単に上記各式に於て

$$Y_3 = Y_4 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = Y_8 = 0$$

とおいたものになる。たとえばこのときの共振条件式は

$$\text{共振条件}:(Y_{99}+Y_9)(Y_{33}+2Y_{34}+2Y_{35}+Y_{36}) = 6\,(Y_{39})^2$$

となる。

（c） **高次振動の項を省略すること** 前述のように分布定数的振動素子に関するY行列の要素は各規準振動成分に対応する項からなる無限級数の形に表わされているが，(16)式分母を見ても明らかなように，使用周波数ωよりも甚だ高い規準振動数をもつ項はそうでない項よりはるかに小となるので，適当な範囲のみで級数の計算を打切るのが普通である。このときmをどの程度までとればよいかは一概に言えぬが，一般に板や棒などでは膜や弦などに比べて低次規準振動数の間隔（相隣る共振周波数の差）が多きいために比較的小数の項で足りることが多く，この傾向は錐状，またはくさび状の棒などではとくに著しい。(3)

また使用条件などから低次振動の項でも特定のものを除外できることがある。たとえば前例においてY_{39}, Y_{99}などを求めるときに非対称振動成分は全く除いてしまつて良い。その他円板や円膜の問題では対称振動成分のみを考えれば足りる場合が屡々ある。また棒，弦など一次元的ひろがりをもつ振動体では左右対称の分だけを考えることなども多い。

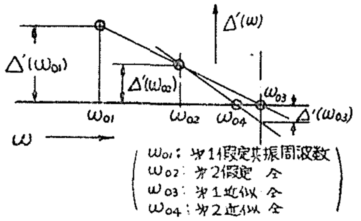
（d） **共振条件から共振周波数を求めること** 実際問題ではまず振動系に加えるべき力の周波数ωをあたえて系の勢力伝達特性を求めるとか，その周波数で共振させるために附加する振動素子の定数を計算するなどの場合が多いと思われるが，このような問題では周波数が既知であるために上述の諸計算は割合容易である。

しかしながら各素子の定数をあたえて共振周波数を計算するなどの問題ではωが未知であるために計算は稍面倒になる。この計算は前項の注意によつてY_{ij}などを必要最低

個数の有限項で打切り，各項の分母をはらえば ω^2 についての実係数の高次代数方程式が得られるから，それを数値解法によつて解いて根を求めれば所要の共振周波数が得られる。このとき ω^2 の代りにそれと第1規準振動数 ω_1 の自乗との比 ω^2/ω_1^2 またはω_1^2/ω^2 を根とする方程式を解く方が便利なことが多い。

附帯振動素子の数が数個以上あつて，対称性なども変えられない場合には共振条件式から上記の方法で共振周波数を求めることはかなり困難になる。このような場合にはつぎのように計算するのも一法である。

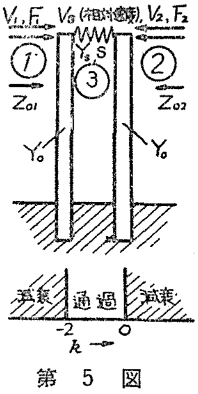
即ち大略の共振周波数は見当がつくからそれを共振条件式 (19) の左辺に代入して数値を求め，次にその数値が零に近くなるように若干周波数を変化させて再び共振条件式の左辺の値を計算し，前の値と丶もに図上に印をする。(第4図)共振周波数の近傍では共振条件式の左辺の値は単調に変化するから，上の操作に於て仮定した周波数が求める周波数から甚だしくかけはなれていないならば印した2点を結ぶ直線と周波数軸との交点の近傍に共振周波数があることが判る。このような操作をくり返せばよい。



第 4 図
共振周波数図式計算法

(e) 機械的濾波器と影像インピーダンス[5] 第1表末尾に $(n-2)$個の附加素子を設けたとき，第1，第2両個所間のenergy伝達動作を表わすものとして影像インピーダンス等を加えておいたが，之は機械濾波器などでは甚だ便利なものである。

第5図はありふれた帯域通過機械濾波器[5][8][9]であるが，之は等しい二本の棒（自由－固定）とそれらを連結する一個のバネとから成つている。いま棒の先端における機械アドミタンス（モビリチ）を Y_0，バネのスチフネスを s とすれば，行列式 Δ，Δ'，及び Δ'' はつぎのようになる。



第 5 図
帯域機械濾波器

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_0 & 0 & Y_0 \\ 0 & Y_0 & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 & (2Y_0+Y_s) \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} \Delta' &= 2\,Y_0 + Y_s, \\ \Delta'' &= Y_0 \end{aligned}$$

たゞしこ丶に Y_s は $Y_s = j\omega/s$ をあらわす。

第1表によれば影像インピーダンスはこの場合

$$Z_{01} = Z_{02} = Y_0^{-1}\sqrt{(2+k)/k}\ , \qquad k = Y_s\,/\,Y_0$$

のようになり，こ丶で Y_s，Y_0 がともに純虚数であることに着目すれば k は実数で，

また通過域では上式の右辺根号内が負とならねばならないから

$$-2 < k < 0$$

が通過域をあらわす条件式となる。よつて遮断周波数は

$$k = -2, \qquad k = 0$$

によつて容易に計算される。

8. 結　　言

以上機械振動系を回路網的に取扱うことによつて得られる利点について述べたが，それらを要約すれば次の通りである。

(i) 特性既知の振動子の組合せから成る連成機械振動系の振動諸特性は，系内に分布定数的素子が含まれている場合にも代数的操作によつて求めることができる。

(ii) 振動勢力の伝達にあづかるような振動系の特性は四端子網的に表わすのが自然であり，また便利でもある。

(iii) 振動系内部素子間または他系との間に勢力授受が行われる場合，その解析に際しては必ずしも集中力のみに限定しなくとも良く，分布の形のわかつた力によるならば集中力の場合と同一の形式で取扱うことができる。とくに平等分布力を振動体表面に受ける場合には力はその面密度，速度はその面が運動によつて排除する容積速度をとることになるから，音響工学上重要な意義をもつ。

(iv) 何れの場合にも系に幾何学的対称性があるときには構成素子数が大であつても実際の計算は極めて容易になることが多い。

本稿の方法の具体的応用例は一部発表したが[5]，種々の問題に利用しているので機会を得れば報告するつもりである。また本稿のように分布定数的機械振動素子を等価的に四端子電気回路網ないしは多端子電気回路網と考えた場合に想定される等価電気回路の構成ならびに動的機械模型の構造等については別文に述べた[10][11]。

本稿のような取扱いは分布機械インピーダンスを附加した機械振動体（系）の問題に対しては，容積インピーダンス附加以外の一般の場合には適用することができない。また附加素子の数が大となれば実際の計算操作が機械的とは云え非常に面倒になる。筆者は最近このような問題の解決に適用することのできる計算方法を考案したので[4]，その応用例とゝもに近く発表する予定である。

終りに御指導ならびに御鞭撻を賜つた恩師東京工業大学粟屋潔教授，西巻正郎助教授，また日本電信電話公社電気通信研究所音響研究課早坂寿雄課長，増沢健郎係長，池ヶ谷和夫主査及び当学部石田光夫教授はじめ関係の方々に深甚なる感謝の意を表する。

文　　献

(1) 粟屋：電気通信学会雑誌，Vol. 27，No. 8 昭和19年8月

(2) 粟屋：音響技術便覧，第5冊，音響学会編，昭27年，オーム社

(3) 早坂：音響振動論，昭23年，コロナ社

(4) 安田：電気三学会連合大会論文集，Ⅰ，p. 204，昭29年5月

(5) 安田：電気通信学会雑誌，Vol. 37，p. 37 昭29年1月

(6) D. Young: J. Applied Mechanics, Vol. 15, No. 1, 1948

(7) 鈴木：電気通信学会雑誌，Vol. 34，p. 312 昭26年6月

(8) W. P. Mason : Electro-Mechanical Transducers and Wave Filters, p. 86, 1948

(9) 松木：東北大学電気通信談話会記録 Vol. 21 No. 1 p. 185, 1952

(10) 安田：電気三学会支部連合大会論文集，Ⅰ，p155 昭28年10月

(11) 安田：電気通信学会雑誌 Vol. 37，p. 109，昭29年2月