諏訪湖の静振について

谷本勉之助*　草間孝志**

ON THE SEICHES IN LAKE SUWA

By

Bennosuke TANIMOTO

Takashi KUSAMA

Synopsis: The writers computed periods of the seiche in Lake Suwa by using a two-dimensional interpolation formula, and compared them with those calculated by Prof. K. HIDAKA and observed by Dr. A. TANAKA. They also obtained the relative displacement of water surface and nodal line of the lake for uninodal oscillation.

要旨

本文は，諏訪湖の静振の週期を二次元内挿式を使つて求め，田中阿歌麿博士による実測値及び日高教授による理論値と比較し，且つ一次振動に於ける振幅の相対値並びに節線の式を理論的に求めたものである。

1. 緒言

諏訪湖は長野県の中央に位し，その湖面積 14,322 km^2，及び貯水量 642×10^5 m^3 を有し，天龍川の源をなしている。

この湖は早くより田中阿歌麿博士により，湖沼学上種々の調査がなされた。静振に関しては同博士により週期の実測がなされ，又日高教授は壷井氏の方法を卵形水域に応用してその週期を理論的に求められている。

本文に於いては，二次元の Stirling 型の内挿式の第3階差までを用いてその週期を計算し，且つ一次振動に於ける振幅の相対値及び節線の理論的位置を求めた。

2. 基本式

水域の水の自由振動の微分方程式は，一般に次の式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\tau\,(x,y)\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\tau\,(x,y)\,\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\}+\lambda\zeta=0. \qquad \cdots\cdots(1)$$

* 信州大学教授　工学部土木教室

** 信州大学助手　工学部土木教室

茲に，λ は振動の固有値であり，$\tau(x, y)$ は水域の水深を表わす。特に $\tau(x, y)$ が水域を通じて一様と仮定すれば，(1) 式は簡単に次の如く表わし得る。

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \lambda'\zeta = 0. \quad \cdots\cdots(2)$$

茲に
$$\lambda' = \frac{\lambda}{\tau}. \quad \cdots\cdots(3)$$

水域の境界に於いて満足されるべき条件は次の如くである。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0. \quad \cdots\cdots(4)$$

ν は境界線に於ける法線であり，この条件は α, β を法線 ν の方向余弦とすると次の如くなる。

$$\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0. \quad \cdots\cdots(5)$$

3. 連立方程式及びその解

湖岸線を滑らかな曲線でおきかえ，第1図の如く 4 × 4 個の矩形網目をひく。又曲線上に適宜に7点を選びその点の法線を描く。而して格子の中心点を原点にとりこれら7点の座標及び方向余弦をスケールにより測定する。本計算に於いては，諏訪湖の1/25,000の地図をもとに次の値を得た。

	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6	ν_7
α	−0.9923	−0.8241	0.3381	0.9815	0.9586	0.1460	−0.8146
β	0.1239	0.5674	0.9402	0.1920	−0.2846	−0.9891	−0.5777
u	−1.912	−1.421	0.612	1.743	1.840	0.254	−1.777
v	0.000	1.500	1.880	0.568	−0.968	−1.969	−1.554

但し
$$u = \frac{x - x_0}{h}, \qquad v = \frac{y - y_0}{k}.$$

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad h = 36.25, \qquad k = 49.68.$$

さて次ぎの内挿式を採用する。

$$\zeta(x, y) = (00) + \frac{u}{2}\Delta_{10} + \frac{v}{2}\Delta_{01} + \frac{u^2}{2}\Delta_{20} + \frac{uv}{4}\Delta_{11} + \frac{v^2}{2}\Delta_{02} + \frac{u^3 - u}{12}\Delta_{30} + \frac{u^2 v}{4}\Delta_{21} + \frac{uv^2}{4}\Delta_{12} + \frac{v^3 - v}{12}\Delta_{03}, \quad \cdots\cdots(6)$$

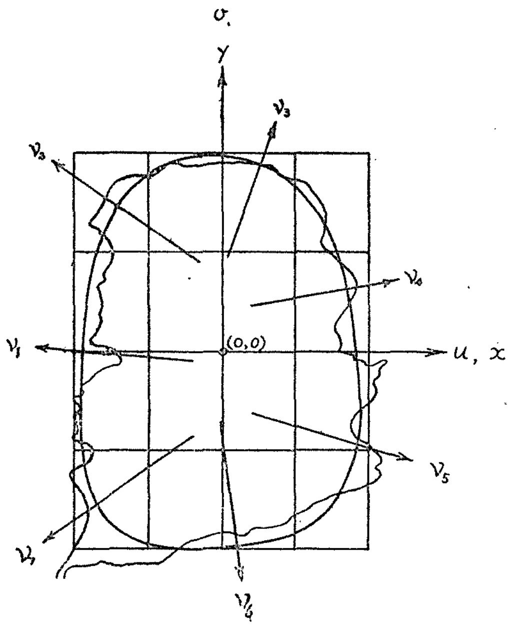
茲に
$$\Delta_{10} = (10) - (\bar{1}0), \qquad \Delta_{01} = (01) - (0\bar{1}),$$

$$\Delta_{20} = (10) + (\bar{1}0) - 2(00), \qquad \Delta_{02} = (01) + (0\bar{1}) - 2(00),$$

$$\Delta_{11} = (11) + (\bar{1}\bar{1}) - (1\bar{1}) - (\bar{1}1),$$

$$\Delta_{30} = -2(10) + 2(\bar{1}0) + [20], \qquad \Delta_{03} = -2(01) + 2(0\bar{1}) + [02],$$

第　1　図



$$\Delta_{21} = -2(01) + 2(0\bar{1}) + (11) + (\bar{1}1) - (1\bar{1}) - (\bar{1}\bar{1}),$$

$$\Delta_{12} = -2(10) + 2(\bar{1}0) + (11) + (1\bar{1}) - (\bar{1}1) - (\bar{1}\bar{1}),$$

$$[20] = (20) - (\bar{2}0), \qquad [02] = (02) - (0\bar{2}).$$

微分方程式（2）は（6）式より

$$h^2\lambda' [12(00) + 6u\Delta_{10} + 6v\Delta_{01} + 6u^2\Delta_{20} + 3uv\Delta_{11} + 6v^2\Delta_{02}$$
$$+ (u^3 - u)\Delta_{30} + 3u^2v\Delta_{21} + 3uv^2\Delta_{12} + (v^3 - v)\Delta_{03}]$$
$$+ 12\Delta_{20} + 12c^2\Delta_{02} + 6u\Delta_{30} + 6v\Delta_{21} + 6uc^2\Delta_{12} + 6vc^2\Delta_{03} = 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

玆に　$c = \dfrac{h}{k} = 0.7297.$

又境界条件（4）又は（5）式は（6）式より

$$6\alpha\Delta_{10} + 6\beta c\Delta_{01} + 12\alpha u\Delta_{20} + 3(\beta cu + \alpha v)\Delta_{11} + 12\beta cv\Delta_{02}$$
$$+\alpha(3u^2-1)\Delta_{30}+3u(\beta cu+2\alpha v)\Delta_{21}+3v(2\beta cu+\alpha v)\Delta_{12}+\beta c(3v^2-1)\Delta_{03}=0. \quad \cdots(8)$$

第１図の格子点の中，適当な４点を選ぶ。即ち

i) $\begin{matrix} u = 1 \\ v = 0 \end{matrix}$　ii) $\begin{matrix} u = 0 \\ v = 1 \end{matrix}$　iii) $\begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}$　iv) $\begin{matrix} u = -1 \\ v = -1 \end{matrix}$

（7）式にこれらの値を代入すると

	(00)	(10)	$(\bar{1}0)$	(01)	$(0\bar{1})$	(11)	$(1\bar{1})$	$(\bar{1}1)$	$(\bar{1}\bar{1})$	$[20]$	$[02]$
i	$-4(1+c^2)$	$-2c^2+2\Lambda$	$2(2+c^2)$	$2c^2$	$2c^2$	c^2	c^2	$-c^2$	$-c^2$	1	0
ii	$-4(1+c^2)$	2	2	$-2+2\Lambda$	$2(1+2c^2)$	1	-1	1	-1	0	c^2
iii	$-2(1+c^2)+\Lambda$	1	1	c^2	c^2	0	0	0	0	0	0
iv	$-8(1+c^2)-4\Lambda$	$4(2+c^2)+2\Lambda$	$-4c^2+2\Lambda$	$4(1+2c^2)+2\Lambda$	$-4+2\Lambda$	$-2(1+c^2)-\Lambda$	$2(1-c^2)-\Lambda$	$-2(1-c^2)-\Lambda$	$2(1+c^2)+3\Lambda$	-2	$-2c^2$

$=0.$ ⋯(9)

茲に
$$\Lambda = h^2\lambda' = \frac{h^2\lambda}{\tau}. \qquad \cdots\cdots(10)$$

境界条件 (8) に α, β, u, v 及び c の値を代入すると

(00)	(10)	$(\bar{1}0)$	(01)	$(0\bar{1})$	(11)	$(1\bar{1})$	$(\bar{1}1)$	$(\bar{1}\bar{1})$	$[20]$	$[02]$
−45.535	36.595	8.940	−1.260	1.260	0.473	−0.473	1.510	−1.510	−9.891	−0.090
−43.010	39.159	−11.054	−20.919	35.824	−3.284	−18.431	29.378	−7.663	−4.168	2.381
−35.921	−12.215	17.181	0.207	30.749	14.593	2.050	−8.383	−8.260	0.042	6.589
−42.968	6.926	34.132	−12.410	14.320	11.295	−7.730	2.920	−6.484	7.964	−0.005
−47.156	−0.466	42.798	26.626	−21.802	−11.370	21.193	−13.338	3.510	8.778	−0.376
−34.997	−6.171	7.061	29.223	4.884	1.874	5.854	−3.029	−4.698	−0.118	−7.672
−50.463	52.060	−17.319	45.577	−29.855	−24.332	−1.441	−10.649	36.422	−6.902	−2.632

$=0.$ ⋯⋯⋯(11)

(11) 式を整理すると次の諸式を得る。

$$
\left.\begin{aligned}
(00) &= 0.00117(\bar{1}0) + 0.99883(0\bar{1}) + 0.00000(\bar{1}1) + 0.34542[02],\\
(10) &= -0.97710(\bar{1}0) + 1.97710(0\bar{1}) + 0.00000(\bar{1}1) + 0.67396[02],\\
(01) &= 0.04256(\bar{1}0) + 0.95744(0\bar{1}) + 0.00000(\bar{1}1) + 0.67773[02],\\
(11) &= -1.65168(\bar{1}0) + 1.65168(0\bar{1}) + 1.00000(\bar{1}1) + 0.54958[02],\\
(1\bar{1}) &= -1.86712(\bar{1}0) + 1.86712(0\bar{1}) + 1.00000(\bar{1}1) - 0.02828[02],\\
(1\,1) &= 0.12568(\bar{1}0) - 0.12568(0\bar{1}) + 1.00000(\bar{1}1) - 0.71549[02],\\
[20] &= -2.73105(\bar{1}0) + 2.73105(0\bar{1}) + 0.00000(\bar{1}1) + 0.94476[02].
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)
$$

これらの値を（9）式へ代入すると

$$
\left|\begin{array}{cccc}
(\bar{1}0) & (0\bar{1}) & (\bar{1}1) & [02]\\
1.4720-1.9542A & -1.4720+3.9542A & 0.0000+0.0000A & -0.5100+1.3479A\\
0.0433+0.0851A & -0.0433+1.9149A & 0.0000+0.0000A & -0.2991+1.3555A\\
0.0420+0.0012A & -0.0420+0.9988A & 0.0000+0.0000A & -0.0239+0.3454A\\
-2.5269+4.0221A & 2.5269-0.0221A & 0.0000+0.0000A & 1.3319-1.3461A
\end{array}\right| = 0. \cdots\cdots(13)
$$

$[01] = (\bar{1}0) + (0\bar{1})$ とおいて (13) 式を変換すれば

$$
\left|\begin{array}{ccc}
[01] & (0\bar{1}) & [02]\\
2.0000A & -1.4720+3.9542A & -0.5100+1.3479A\\
2.0000A & -0.0433+1.9149A & -0.2991+1.3555A\\
1.0000A & -0.0420+0.9988A & -0.0239+0.3454A\\
4.0000A & 2.5269-0.0221A & 1.3319-1.3461A
\end{array}\right| = 0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)
$$

(14)式に於ける4個の連立方程式の中，上より3個の連立方程式をとり，これらの方程式の係数によつて成立つ行列式は零となる故

$$
\begin{vmatrix}
2A & -1.4720+3.9542A & -0.5100+1.3479A\\
2A & -0.0433+1.9149A & -0.2991+1.3555A\\
A & -0.0420+0.9988A & -0.0239+0.3454A
\end{vmatrix} = 0.
$$

上式を展開し，整理すれば

$$
1.3549A^2 - 1.4793A + 0.3676 = 0
$$

となり，これより次の値を得る。

$$
A = 0.3825,\quad 0.7093. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)
$$

4. 振動週期

静振の週期は次式によつて与えられる。

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\tau\lambda'}}. \quad \cdots\cdots(16)$$

玆に g は重力による加速度であり，τ は湖水の平均水深を示す。

即ち　$g = 9.80\ \mathrm{m/sec^2}$,　$\tau = 4.614\ \mathrm{m}$.

従つて　$\sqrt{\lambda'} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{h} = 0.6825\times10^{-3}$,　0.9293×10^{-3}.

依つて，静振の週期は

$$T_1 = 1369\ \mathrm{sec} = 22.8\ \mathrm{min}, \qquad T_2 = 1006\ \mathrm{sec} = 16.8\ \mathrm{min}. \quad \cdots\cdots(17)$$

これに対して日高教授の計算値は

$T_1 = 23.0\ \mathrm{min}$,　$T_2 = 16.7\ \mathrm{min}$.

又田中博士による観測値は

$T_1 = 20.8\ \mathrm{min}$,　$T_2 = 16.2\ \mathrm{min}$.

である。

5. 一次振動に於ける湖水曲面

一次振動の場合の湖水の曲面を求める。(15) 式を (14) 式へ代入し，連立方程式を解いて

$[02] = -3.0336\ (0\bar{1})$,　$(\bar{1}0) = -1.0308\ (0\bar{1})$.

を得る。従つて，(12) 式より

$(10) = -18.684(00)$,　$(11) = -33.539(00) + (\bar{1}1)$,　$[20] = -53.284(00)$,

$(\bar{1}0) = 20.493(00)$,　$(1\bar{1}) = -77.087(00) + (\bar{1}1)$,　$[02] = 60.310(00)$,

$(01) = 22.712(00)$,　$(\bar{1}1) = (\bar{1}1)$,

$(0\bar{1}) = -19.881(00)$,　$(\bar{1}\bar{1}) = -38.078(00) + (\bar{1}1)$

となる。今 (00) = 1 なる水面変化があつた場合について，任意点に於ける水面上昇又は下降高 $\zeta(x, y)$ を求めると，上の諸式より，

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta_{10} = -39.177, & \Delta_{02} = 0.831, & \Delta_{03} = -24.876, \\ \Delta_{01} = 42.593, & \Delta_{11} = 5.470, & \Delta_{21} = -3.560, \\ \Delta_{20} = -0.191, & \Delta_{30} = 25.070, & \Delta_{12} = 5.806. \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

(18) 式を (6) 式へ代入すると

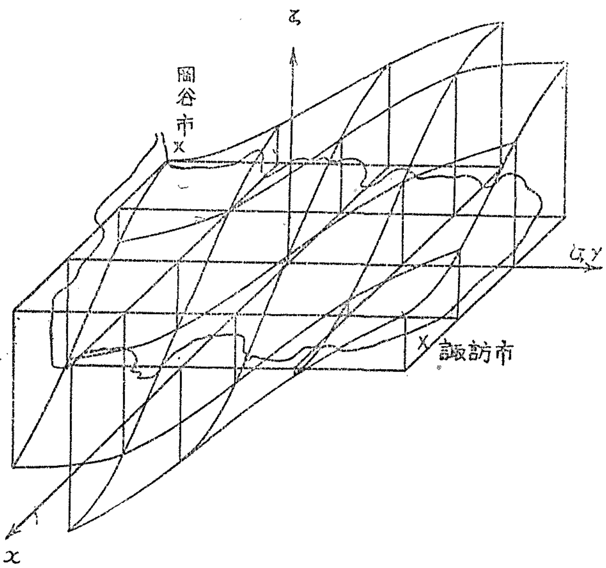
$$\zeta(x, y) = 1.000 - 19.5885\,u + 21.2965\,v - 0.0955\,u^2 + 1.3675\,uv$$
$$+ 0.4155v^2 + 2.0892\,(u^3 - u) - 0.8900\,u^2v + 1.4515\,uv^2 - 2.0730\,(v^3 - v). \cdots(19)$$

を得る。この式は前述の如く，一次振動の場合の水面上昇又は下降高を求める式である。格子点に対しては次の値を得る。

格子点	ζ	格子点	ζ	格子点	ζ	格子点	ζ	格子点	ζ
(22)	15.755	(12)	19.894	(02)	32.817	$(\bar{1}2)$	41.989	$(\bar{2}2)$	34.875
(21)	−2.234	(11)	4.957	(01)	22.712	$(\bar{1}1)$	38.496	$(\bar{2}1)$	39.774
(20)	−26.024	(10)	−18.684	(00)	1.000	$(\bar{1}0)$	20.493	$(\bar{2}0)$	27.260
$(2\bar{1})$	−43.177	$(1\bar{1})$	−38.591	$(0\bar{1})$	−19.881	$(\bar{1}\bar{1})$	0.418	$(\bar{2}\bar{1})$	9.771
$(2\bar{2})$	−41.255	$(1\bar{2})$	−42.326	$(0\bar{2})$	−27.493	$(\bar{1}\bar{2})$	−9.291	$(\bar{2}\bar{2})$	−0.255

これを第2図に示す。

第　2　図



6.　一次振動に於ける節線

(6)式に於いて $\zeta = 0$ として得られる方程式は，一次振動に於ける節線の方程式である。(6) 式に於いて

$$v = f(u)$$

を考え，この右辺を次の如く仮定する。

$$v = A + Bu + Cu^2 + Du^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

(20) 式を (6) 式へ代入して得られる式は，u の全ての値に対して成立つ故，次の諸式を得る。

$$
\left.\begin{array}{l}
12\cdot(00)+(6\Delta_{01}-\Delta_{03})A+6\Delta_{02}A^2+\Delta_{03}A^3=0,\\
(6\Delta_{10}+3\Delta_{11}A-\Delta_{30}+3\Delta_{12}A^2)+\{6\Delta_{01}+12\Delta_{02}A+(3A^2-1)\Delta_{03}\}B=0,\\
(6\Delta_{20}+3\Delta_{11}B+6\Delta_{02}B^2+3\Delta_{21}A+6\Delta_{12}AB+3\Delta_{03}AB^2)\\
\qquad\qquad+\{6\Delta_{01}+12\Delta_{02}A+(3A^2-1)\Delta_{03}\}C=0,\\
\{3\Delta_{11}C+12\Delta_{02}BC+\Delta_{30}+3\Delta_{21}B+3\Delta_{12}(B^2+2AC)+\Delta_{03}(B^3+4ABC)\}\\
\qquad\qquad+\{6\Delta_{01}+12\Delta_{02}A+\Delta_{03}(3A^2-1)\}D=0.
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(21)
$$

A, B, C, D の値は (21) 式より求められる。

(18), (21) 式より

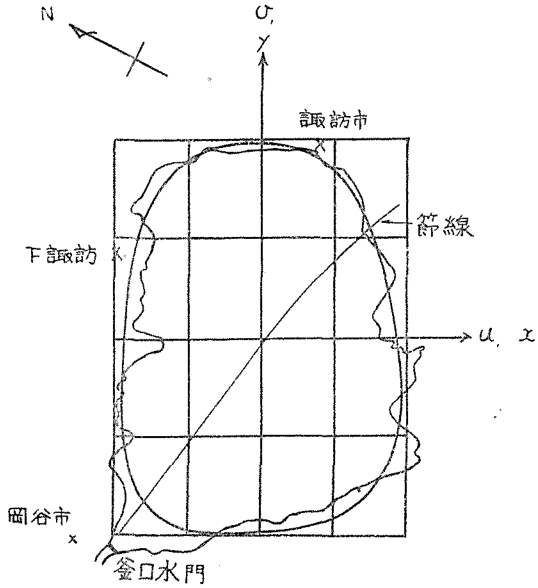
$$A=-0.0428,\qquad B=0.9319,\qquad C=-0.0726,\qquad D=-0.0288.$$

依つて，節線の方程式は

$$v=-0.043+0.932\,u-0.073\,u^2-0.029\,u^3.$$

これを第3図に示した。

第 3 図



7. 結　　　言

以上諏訪湖に於ける振動週期，湖水曲面，節線を内挿式を使つて求めた。振動週期については，壷井氏の方法による日高教授の計算値と殆んど等しく，田中博士による観測値とも略々一致する結果を得た。なお計算値の観測値に対する多少の誤差は，湖水の水深を一様と仮定した為であろう。計算誤差に関しては，微分方程式に当てた4個の格子点を更に必要に応じて多くとり，これをもとに最小自乗法によつて求めたならば，更に精度があがると思う。