

柱時計振子衝撃力の一解法

宮 入 武 夫

1. 序

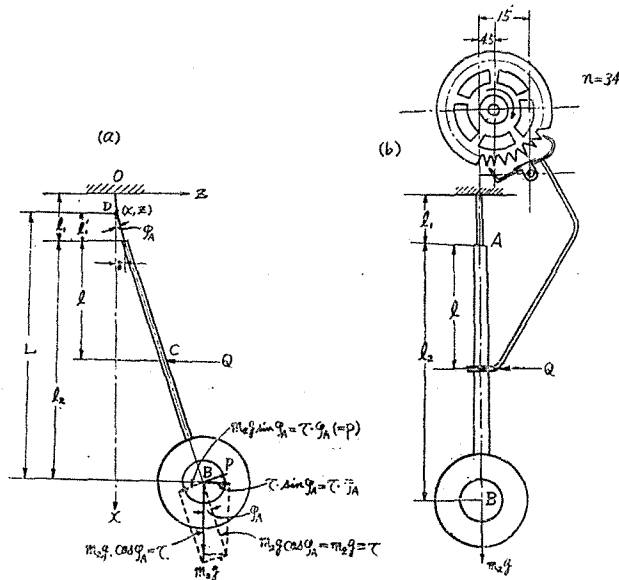
脱進機より振子竿に與えられる撃力の推定を運動機構上から試みたが、該力は衝撃的であり、アングルの腕が弾性的で且つ衝撃点が絶えず竿に接触している等の理由で極めて困難と思われたので筆者は振子の強制振動曲線を実測解析し、これと理論とを結合して撃力の逆算を行い、衝撃現象究明に一方法を提案した。

2. 撃力の解析法

柱時計振子は1個の自由度をもつ振動系と見なされるゆえ、振子の強制振動は一般に次の式で表示される。(第1図参照)

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dz}{dt} + n^2z = F(t) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 2ϵ ; 減衰係数
 n^2 ; 復原力係数
 $F(t)$; 未知の強制力の項



第 1 図

* 該振子は厳密には弾性棒である竿の弾性振動が合成されているのであるがその影響は僅少(実験及び現象から)であるためを過した。何れそれを考慮して見る筈である。

この $F(t)$ は振子の等時性と相まつて一定の円振動数 ω をもつ週期函数と考へてフーリエの級数に展開すると、

$$F(t) = B_0 + \sum_{m=1,2,3\dots} B_m \cos m\omega t + \sum_{m=1,2,3\dots} A_m \sin m\omega t \dots\dots\dots (2)$$

となり、これを(1)に代入すれば、

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dz}{dt} + n^2 z = B_0 + \sum_{m=1,2,3\dots} B_m \cos m\omega t + \sum_{m=1,2,3\dots} A_m \sin m\omega t \dots\dots\dots (3)$$

(3)は線型方程式であるから解の重疊の理が成立するゆゑ、問題の強制振動の項のみを考慮して、その解は

$$z = \frac{B_0}{n^2} + \sum (M_{m1} + M_{m2}) \sin m\omega t + \sum (N_{m1} + N_{m2}) \cos m\omega t \dots\dots\dots (4)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} M_{m1} + M_{m2} &= \frac{[n^2 - (m\omega)^2]A_m + 2\varepsilon m\omega B_m}{[n^2 - (m\omega)^2]^2 + (2\varepsilon m\omega)^2} \\ N_{m1} + N_{m2} &= \frac{-2\varepsilon m\omega A_m + [n^2 - (m\omega)^2]B_m}{[n^2 - (m\omega)^2]^2 + (2\varepsilon m\omega)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

一方強制振動曲線を実験より測定し、これを(2)と同一の円振動数 ω のフーリエ解析を行い (Rungeの48 ordinates)

$$z = b_0 + \sum_{m=1,2\dots 23} a_m \sin m\omega t + \sum_{m=1,2\dots 24} b_m \cos m\omega t \dots\dots\dots (6)$$

となる。(4)と(6)は恒等的に成立すべきゆゑ各係数を等置すれば、

$$\frac{[n^2 - (m\omega)^2]A_m + 2\varepsilon m\omega B_m}{[n^2 - (m\omega)^2]^2 + (2\varepsilon m\omega)^2} = a_m \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{-2\varepsilon m\omega A_m + [n^2 - (m\omega)^2]B_m}{[n^2 - (m\omega)^2]^2 + (2\varepsilon m\omega)^2} = b_m \dots\dots\dots (8)$$

(7), (8)を A_m, B_m に就いて連立して解けば

$$A_m = [n^2 - (m\omega)^2]a_m - 2\varepsilon m\omega b_m \dots\dots\dots (9)$$

$$B_m = 2\varepsilon m\omega a_m + [n^2 - (m\omega)^2]b_m \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{但し, } B_0 = n^2 b_0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{且つ } m \geq 1$$

となり、これ等係数を(2)に代入すれば強制力がわかる。

3. 復原力係数 n の誘導

本係数は自由振動の実験より求めうるが一応こゝで理論的に誘導して見ることにする。復原力 P を求めるにはベラの曲げ方程式 $EI \frac{d^2z}{dx^2} = M$ を境界条件に依つて求める。先ず下記の記号を用いる。

- l_1 = ベラの長さ
- l_2 = AB (竿の長さ)
- l = A点より撃力(Q)の作用点迄の距離
- $l_1' = DA'$ (第1図 a 参照、Dは撓みA点に於ける切線がx軸との交点とす)
- δ = 竿のA点の偏れ ϕ_A に於ける撓み
- Q = 撃力
- P = ベラの復原力

(x, z) = ベラの撓み曲線の座標

$E \cdot I$ = ベラの曲げ剛性 (竿 AB は剛体とす)

m_2 = 重錘の質量

なお $L \equiv l_1' + l_2$

$L' \equiv l_1' + l$

$$E \cdot I \frac{d^2 z}{dx^2} = M \dots\dots\dots (12)$$

座標 (x, z) に於ける曲げモーメント M は

$$M = P(l_1 + l_2 - x) + \tau \varphi_A (l_1 + l_2 - x) - \tau(\delta - z + \varphi_A l_2) \dots\dots\dots (13)$$

但し $\tau = m_2 g \cos \varphi_A \equiv m_2 g \dots\dots\dots (14)$

(13) を (12) に代入し整理すれば

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\tau}{EI} z = \frac{I}{EI} [-x(P + \tau \cdot \varphi_A) + P(l_1 + l_2) + \tau \cdot l_1 \varphi_A - \tau \cdot \delta] \dots\dots\dots (15)$$

今 $a = \sqrt{\tau/EI} \dots\dots\dots (16)$

$$\frac{1}{EI} [-x(P + \tau \cdot \varphi_A) + P(l_1 + l_2) + \tau l_1 \varphi_A - \tau \cdot \delta] = Ax + B \dots\dots\dots (17)$$

と置くと, (4) の解 z は

$$z = -\frac{A}{a^2} x - \frac{B}{a^2} + C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \dots\dots\dots (18)$$

境界条件として,

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad z=0 \text{ 且 } \frac{dz}{dx} &= 0 \\ x=l_1; \quad z=\delta \text{ 且 } \frac{dz}{dx} &= \varphi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

(19) を (18) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{A}{a} + B \right) \\ C_2 &= -\frac{1}{2a^2} \left(\frac{A}{a} - B \right) \\ -\frac{Al_1}{a_2} - \frac{B}{a^2} + C_1 e^{al_1} + C_2 e^{-al_1} &= \delta \\ -\frac{A}{a_2} + ac_1 e^{al_1} - ac_2 e^{-al_1} &= \varphi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(20) より φ_A 及び δ を求めると

$$\varphi_A = \frac{P}{\tau} (al_2 \sinh al_1 + \cosh al_1 - 1) \dots\dots\dots (21)$$

$$\delta = \frac{P}{\tau} \left[\frac{-l_2(\sinh al_1)^2 + l_1(\cosh al_1)^2 + (al_1 l_2 - \frac{1}{a}) \sinh al_1 \cosh al_1 - l_2}{\cosh al_1} \right] \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{又 } l_1' = \delta / \varphi_A = \frac{-l_2(\sinh al_1)^2 + l_1(\cosh al_1)^2 + (al_1 l_2 - \frac{1}{a}) \sinh al_1 \cosh al_1 - l_2}{\cosh al_1 (al_2 \sinh al_1 + \cosh al_1 - 1)} \dots\dots\dots (23)$$

従つて振子は O 点を回転中心として振動すると考えられるから自由振動の方程式は

$$I \cdot \frac{d^2\varphi_A}{dt^2} + (l_1' + l_2) P = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり、或は $\frac{d^2\varphi_A}{dt^2} + \left\{ \frac{l_1' + l_2}{I} \left[\frac{\tau}{a l_2 \sinh a l_1 + \cosh a l_1 - 1} \right] \right\} \varphi_A = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$

依つて復原力係数 n^2 は (25) の左辺第2項の { } 内の値で示される。

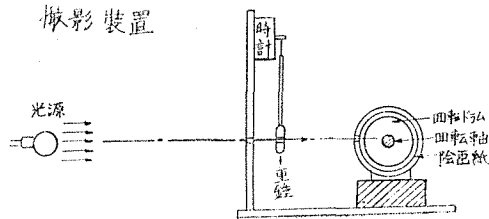
即ち $n^2 = \frac{(l_1' + l_2)\tau}{I(a l_2 \sinh a l_1 + \cosh a l_1 - 1)} \quad \dots\dots\dots (26)$

但し $n'^2 = n^2 / (l_1' + l_2) \quad \dots\dots\dots (26)'$

且つ l_1' は (23) より與えられる。

4. 実験装置並びに測定

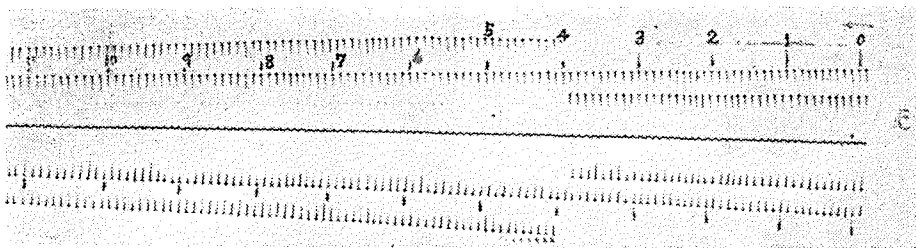
装置；図の如く平行光線を重錘中心（直径0.6mm程度）のpinhole を透し後面の定速ドラム（径75mm）に光点を当て、その運動を写像する。



測定；測定は三種行つた

即ち

a. 自由振動 振子の特性を調べるため脱進機をはずして、自由振動を測定し、周期 T_n 、復原力係数 n^2 、減衰係数 ϵ を見出した(ドラムの回転110sec/revolution)(第2図参照)



第 2 図

b. 強制振動・脱進機を装着して強制振動曲線を取り、これにより円振動数 ω を知り、調和解析を行つた、こゝで画面に写像された曲線は、それ自身の運動とドラムの回転運動の合成運動曲線であるためドラムを順逆の両回転を行い、両曲線を合成して回転の影響を除去した。

なおドラムの回転はともに3.25sec/revolutionで行つた。(第8図(a)(b)参照)

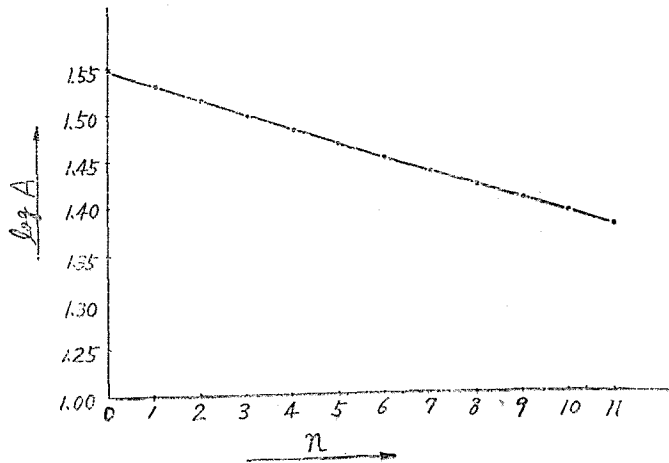
c. 強制振動 bと同様に脱進機を装着し、順回転のみを行い、強制振動の周期 T_F 及び振幅 A の変化状況を観察した。なおドラムの回転は a と同一の 110sec/revolution で

行つた。(第8図(C)参照)。

5. 実験曲線の解析

a. 自由振動曲線の解析 (第2図参照)

10往復毎に複振幅を有尺顕微鏡で読取りそれ等数値及びその常用対数を取れば次表の如くなり、往復回数 n , 対数 $\log A$ を横縦座標にとり置点すると第3図の如くなり、この直線の方角係数より所謂対数減衰率 A を求め得る。



第 3 図

即ち $A = \log_{10} v = 0.00152$

且つ自然振動の周期 T_n は $T_n = 0.872 \text{ sec}$ (実験より)

従つて減衰係数 ϵ は次の関係より算出され

$$\epsilon = 4.6052 \frac{A}{T_n} \\ \doteq 0.008$$

又復原力係数 n は

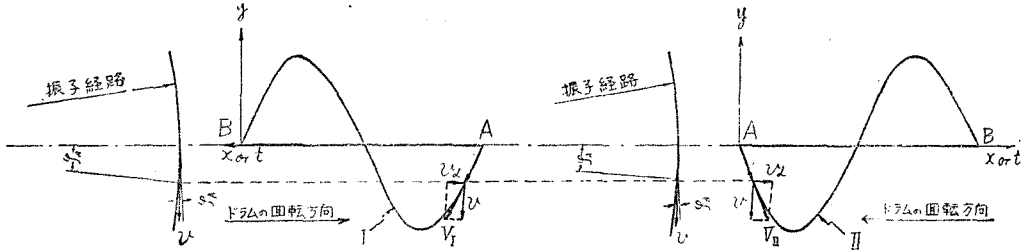
$$n = \frac{2\pi}{T_n} \sqrt{1 + 0.5372 A^2} \\ \doteq 7.206 \quad \text{となる}$$

数 値 表

No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
複振幅 A	35.389	34.136	32.987	31.816	30.724	29.724	28.651	27.704	26.659	25.804	24.897	24.067
log A	1.549	1.533	1.518	1.503	1.488	1.473	1.457	1.443	1.426	1.412	1.396	1.381

但し 横座標は10往復毎を取る。

b. 強制振動曲線の解析



第 4 図

第 5 図

今ドラムの速度を v_d (一定)

振子の偏れ φ_A に於ける速度を v とすれば第 4 図から

$$V_x = \frac{dx}{dt} = v_d + v \sin \varphi_A$$

従つて $x = v_d t + \int v \sin \varphi_A dt \dots \dots \dots (i)$

第 5 図より

$$V_x = \frac{dx}{dt} = v_d - v \sin \varphi_A$$

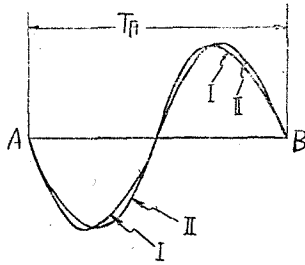
従つて

$$x = v_d t - \int v \sin \varphi_A dt \dots \dots \dots (ii)$$

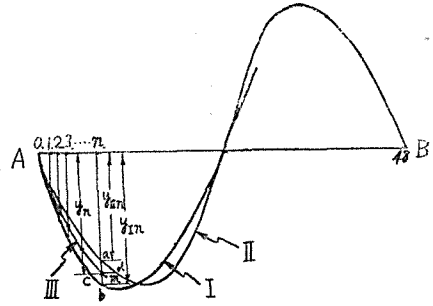
但し第 4 図及び第 5 図はドラムの順及び逆回転に対する振動曲線である。

依つて (i), (ii) を満足する III 曲線の座標を求むるには周期 $T_F (AB)$ をフーリエ解析するために *Runge's Method* により 48 等間隔に AB を分割し, 0. 1. 2. 3. …… 48 とし第 8 図の如く I. II. 曲線を重ね合し任意横座標 m に対する縦座標を $y_{In}, y_{II n}$ とすれば $\frac{n \cdot T_F}{48}$ に対する縦座標は nab 又はその延長上に m を採り m を通り AB に平行線を引き両曲線 I, II との交点を cd とすれば, $cm = md$ なる縦座標が所要の y_n である。これ等の点を結んだ曲線は III であつてこれはドラムの回転の影響を除去した振動曲線 ($t \sim y$) である。

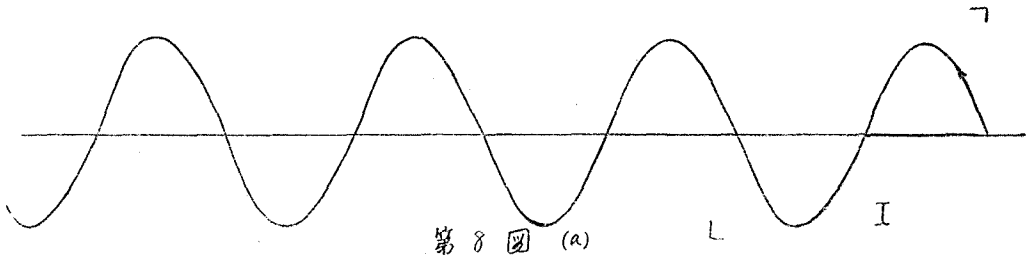
順, 逆両回転の振動曲線 I. II 曲線の座標はコンパレーターで読取り, 曲線 I. II 及び III の修正数値表は下記に示す。



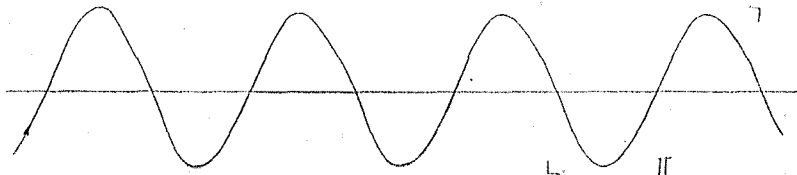
第 6 圖



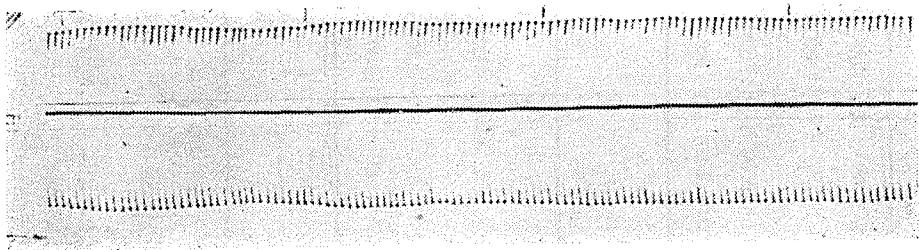
第 7 圖



第 8 圖 (a)



第 8 圖 (b)



第 8 圖 (c)

I ; 曲線の数値表

n	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
	(24)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)
y(mm)	0	3.04	6.00	8.96	11.98	14.67	17.13	19.19	20.81	21.98	22.70	23.02	22.88	22.40	21.58	20.46	19.06	17.49	15.61	13.60	11.33	9.13	6.54	3.74
	1.00	2.80	5.15	8.24	10.63	12.90	14.88	16.71	18.29	19.61	20.59	21.34	21.72	21.67	21.33	20.58	19.34	17.74	15.73	13.22	10.62	7.75	4.83	1.92

II ; 曲線の数値表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	(24)	(47)	(46)	(45)	(44)	(43)	(42)	(41)	(40)	(39)	(38)	(37)	(36)	(35)	(34)	(33)	(32)	(31)	(30)	(29)	(28)	(27)	(26)	(25)
y(mm)	0	2.71	2.81	3.39	4.18	4.46	4.82	5.78	6.19	6.18	6.17	6.13	6.58	6.96	7.05	7.33	7.47	7.75	8.36	8.76	9.52	6.95	4.30	1.57
	1.35	2.98	5.63	8.22	10.60	12.86	14.90	16.81	18.48	19.99	21.15	22.09	22.71	23.02	22.95	22.55	21.60	20.23	18.34	16.03	13.41	10.58	7.44	4.36

III ; 曲線の数値表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	(24)	(47)	(46)	(45)	(44)	(43)	(42)	(41)	(40)	(39)	(38)	(37)	(36)	(35)	(34)	(33)	(32)	(31)	(30)	(29)	(28)	(27)	(26)	(25)
y(mm)	0	2.78	5.51	8.58	11.20	13.60	15.82	17.72	19.30	20.45	21.25	21.72	21.80	21.47	20.82	19.71	18.42	16.76	14.82	12.40	10.00	7.20	4.63	1.68
	1.15	3.00	5.81	8.60	11.28	13.70	15.90	17.90	19.60	21.01	22.01	22.70	23.00	22.90	22.47	21.57	20.33	18.77	16.94	14.72	12.27	9.76	6.98	3.98

此のⅢ曲線の数値表に依りフーリエ解析を行い各係数を求めると次の如くなる。

$$b_0=0.598, \quad b_1=-0.639, \quad b_2=0.088, \\ a_1=-22.393,$$

以下の係数 $a_2, a_3, \dots, a_{23}, b_2, b_4, b_5, \dots, b_{24}$ は誤差範囲内の数値であるから無視した。これ等数値を前の(9), (10)に代入して A_m, B_m を求めると

$$B_0=31.05, \quad B_1=0.143, \quad B_3=-40.06, \\ A_1=99.24,$$

従つて(1)の右辺の外力の項 $F(t)$ は

$$F(t)=31.05+0.14 \cos \theta-40.06 \cos 3 \theta+99.24 \sin \theta \quad \dots \dots \dots (27)$$

但し $\theta=\omega t$

歩み $\theta=7.5^\circ$ について $F(\theta)$ を計算すると

θ°	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5	75
$F(\theta)$	-8.86	7.182	28.574	53.853	80.797	106.944	129.637	146.851	157.125	159.820	155.277

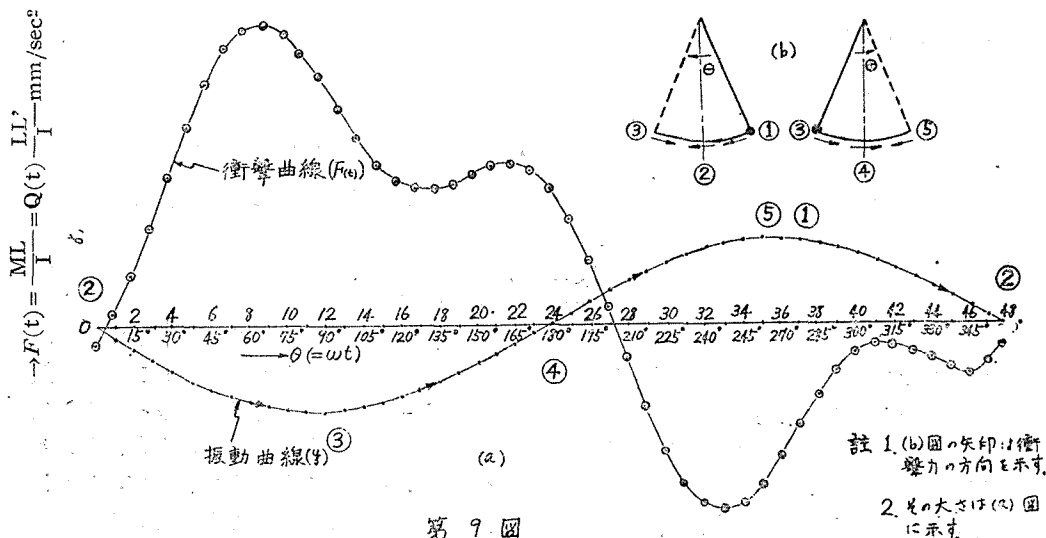
θ°	82.5	90	97.5	105	112.5	120	127.5	135	142.5	150	157.5
$F(\theta)$	144.761	130.294	114.041	98.563	85.684	76.867	72.651	72.795	76.036	80.549	84.271

θ°	165	172.5	180	187.5	195	202.5	210	217.5	225	232.5	240
$F(\theta)$	84.938	80.924	70.966	54.922	33.530	8.251	-18.693	-44.840	-67.533	-84.747	-95.021

θ°	247.5	255	262.5	270	277.5	285	292.5	300	307.5	315
$F(\theta)$	-97.716	-93.173	-82.657	-68.190	-51.937	-36.459	-23.580	-14.763	-10.547	-10.791

θ°	322.5	330	337.5	345	352.5	360
$F(\theta)$	-13.931	-18.445	-22.167	-22.834	-18.820	-8.862

上の表を置点すると第9図の如くなる。



第 9 圖

6. エネルギーの出入

(a) 脱進機より與えられる1周期間の有効エネルギー(W_E)は

$$W_E = \int_0^T M d\varphi = \int_0^T \frac{F \cdot I}{L} d\varphi \dots\dots\dots (28)$$

$$\varphi = \frac{y}{L} = \frac{I}{L} (0.598 - 0.639 \cos \theta + 0.088 \cos 3\theta - 22.393 \sin \theta) \dots\dots\dots (29)$$

(27), (29) に依り (28) は

$$W_E = \frac{I}{L^2} \int_0^{2\pi} F \times (0.64 \sin \theta - 0.27 \sin 3\theta - 22.39 \cos \theta) d\theta \dots\dots\dots (30)$$

本計算は函数の直交性により2乗の項のみが残る容易に求まる

$$\text{即ち } W_E = \frac{I}{L^2} [-3.14 \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta - 2.16 \int_0^{2\pi} (\cos 3\theta)^2 d\theta + 63.41 \int_0^{2\pi} (\sin \theta)^2 d\theta]$$

$$W_E = 58.11 \pi \frac{I}{L^2} [\text{g. mm/cycle}] \dots\dots\dots (31)$$

(b) 空気抵抗に依り失われるエネルギー (W_R) は

$$W_R = \int_0^T M_R d\varphi = - \int_0^T 2\varepsilon \frac{I}{L} \frac{dy}{dt} d\varphi \dots\dots\dots (32)$$

(32) も (28) と同様に直交性に依り計算は簡易化されて、

$$W_R = -60.31 \pi \frac{I}{L^2} [\text{g. mm/cycle}] \dots\dots\dots (33)$$

となる。(31) 式と (33) 式の値が殆んど数%の差で一致していることは振子の運動が定常であることより当然ではあるが又一方実験及び理論の合理的な証左でもある。

(c) 雁木車より供給するエネルギー (W_D) は、

$$W_D = M \cdot \omega \cdot T_F = 12.2 \times 1.792 \times \frac{2\pi}{28.7} \times 0.837 = 1.28 \pi [\text{g. mm/cycle}]$$

一方 $\frac{I}{L^2} = m_2 = \frac{35}{9800} \text{ g}$ であるから (31) は

$$\text{従つて } W_E = \frac{58.11 \times 35 \pi}{9800} = 0.204 \pi [\text{g. mm/cycle}]$$

故に能率 η は

$$\eta = \frac{W_E}{W_D} \times 100 = \frac{0.204 \times 100}{1.28} = 16\% \dots\dots\dots (34)$$

この低能率は脱進機機構全体に亘り音及び固体摩擦等の損失に依ることは充分了解される。

7. 実験結果及びその考察

撃力曲線を示す第9図(a)は定性的には脱進機の運動機構の考察と良く符合して居り、定量的には6.の(a)(b)の(31)及び(33)の一致よりみて実験及び理論には工学的に誤謬はないことが認められる。従つてこの研究で振子を一個の自由度をもつ物理振子と見なし、竿の弾性を無視したことは大局的見地より妥当であると結論される。然しながら第8図(a),(b),(c)の強制振動曲線より周期 T_F 及び振巾 A の変動は明らかであつて、これは竿の弾性棒としての自由及び強制振動と、撃力の位相差等により攪乱されるものと考察さ

れるが、かかる現象は全舞時計に就いて既に東大逄沼教授並びに東京計器の納富及び川崎両氏⁽¹⁾によつて指摘されて居るところであつて、これが等時性との関係については将来に残された問題である。

なお本研究は運動中の衝撃的未知力の解析特に衝突撃力並びに緩衝材性能の研究等の如き衝撃的現象に効果的に適用され、その応用分野は相当に広いことと信ずる。

終りに本研究に御懇篤な御注意を頂いた本学結城工学部長並びに実験整理に協力をされた市川教官及び南部嬢に感謝する。なおこの報告は昭和24年度文部省科学研究費並に本学附設民生科学研究所の御好意に依る事を附記し謝意を表する。

註 本論文中、 Z は Y と、 φ_A は φ と同じ意味に用いて居ることに注意されたい。

文 献

- (1) 精機学会誌, 15, 61頁(昭.24.)