

インボリュート歯車用ホブの解析

立 川 駿 兒

1. 緒 言

現在、インボリュート歯車製作方法の中で、その加工能率及び精度の点よりして、インボリュート歯を持つねぢ面状の工具ホブに依りての創生法が最も一般的に行われて居る。この場合ホブ歯面の形状に依りて、作られる歯車の歯の精度が左右せられる。歯車とホブは互に軸の傾いたねぢ歯車の噛合いと考えられ、ホブは歯数の非常に少い斜歯歯車と考えられる。然してホブの歯面をホブ軸と傾いた歯車面に投影した投影図が作らんとする歯車のラックに相当する。インボリュート歯のラックの歯型は直線よりなることより、ホブの歯面は、その投影図が直線であるところの可展ねぢ面⁽¹⁾であることがわかる。このことからインボリュート歯車の圧力角、モジュールが與えられた時、其の歯車を創生するに用うるホブの歯面の方程式を、設計に便なる形にて示し、更にこれより誘導して、軸断面、歯に直角なる面の断面図、投影図の方程式を求めた。なおそれらの式よりホブに依る切削法の諸種の関係式が得られる。而してここに於てはホブは切刃の無い連続せる可展ねぢ面よりなるとして考察を進める。

2. 可展ねぢ面の解析

先ず可展ねぢ面の方程式⁽²⁾⁽³⁾を求める。第1図の如くXYZ座標、 $X_1Y_1Z_1$ 座標をとる。

r_0 = ホブ基円筒半径 β_0 = 基円筒上のねぢ線の蔓巻角

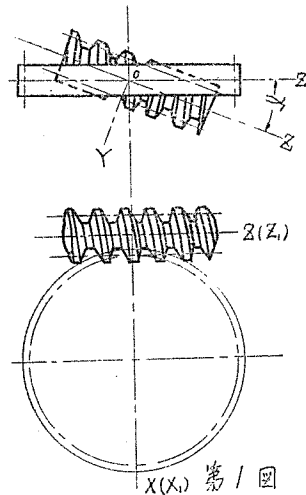
l = ねぢ線のリード p_t = ホブの軸方向ピッチ

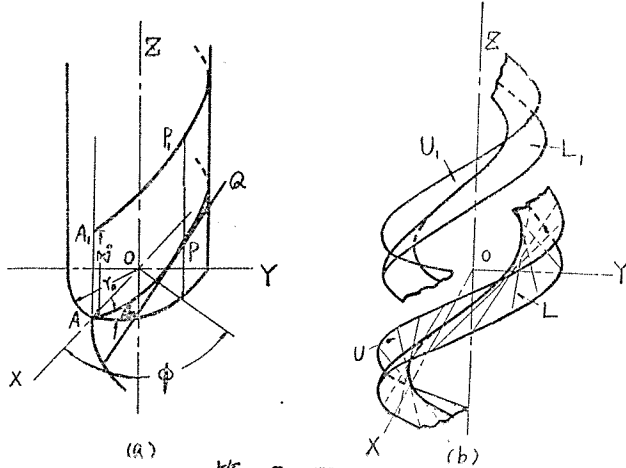
$h = l/2\pi$ = 準ピッチ n = ねぢ條数

然らば

$$l = np_t$$

$$\tan\beta_0 = l/2\pi r_0 = h/r_0$$





第 2 図

第2図(a)にて、半径 r_0 なる基円筒上のリード l なるねぢ線の各点に於ける切線に依つてできる面は可展ねぢ面である。これは (b) 図に示す如くねぢ線より上側の面と下側の面とになつて居る。

先ずねぢ線の方程式は

$$x = r_0 \cos \phi, \quad y = r_0 \sin \phi, \quad z = h \phi,$$

又ねぢ線上の 1 点 P の切線の方角餘弦は

$$l = -\cos \beta_0 \sin \phi, \quad m = \cos \beta_0 \cos \phi, \quad n = \sin \beta_0$$

従つてこの切線に依りて画かれる切線曲面部即ち可展ねぢ面の式は、 $PQ = \mu$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos \phi - \mu \cos \beta_0 \sin \phi \\ y &= r_0 \sin \phi + \mu \cos \beta_0 \cos \phi \\ z &= h \phi + \mu \sin \beta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

従つて、天軸に垂直な XY 面では、 $z = 0$ として、 $\mu = -\frac{h \phi}{\sin \beta_0}$ 、これから

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y &= r_0 (\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

又 Z 軸を含む XZ 面では、 $y = 0$ として、 $\mu = -r_0 \tan \phi / \cos \beta_0$ 、これから

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \sec \phi \\ z &= h (\phi - \tan \phi) = -h \operatorname{inv} \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

次に可展ねぢ面の XZ 面への投影図を求めるに、それは (1) に於て次の条件を満足するものである。

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos \phi - \mu \cos \beta_0 \sin \phi \\ z &= h \phi + \mu \sin \beta_0 \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(\phi, \mu)} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

最後の式より、 $\mu \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \phi = 0$,

$\mu \neq 0$ とすれば, $\cos\phi = 0$, 従つて, $\phi = \pm\pi/2, \pm(2\pi + \pi/2), \dots \dots \dots \pm(2.m\pi + \pi/2)$, 但し m は 0 又は正の整数とす。然して, この中で, $\phi = -\pi/2$ より, $\phi = +\pi/2$ 間の投影図は, $\phi = \pm\pi/2$ を取れば良く, 今これを考えれば, $\mu \neq 0$ として,

$$\left. \begin{aligned} x &= \mp \mu \cos\beta_0 \\ z &= \mu \sin\beta_0 \pm \pi h/2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

但し複号の上側は $\mu < 0$, 下側は $\mu > 0$ の部分とする。

この式より, 面の投影は \overline{PQ} の $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ に於ける投影で表わされる事がわかる。

$\mu = 0$ のときは, $x = r_0 \cos\phi, z = h\phi$ となり, ねじ線の投影図を示し, 特異点の軌跡である。

(4) よりわかる如く投影図の傾斜は次式の如くなる。

$$\frac{dx}{dz} = \mp \cot\beta_0 \dots \dots \dots (5)$$

但し $-$ は $\mu < 0$, $+$ は $\mu > 0$ の部分である。

次に座標軸を X 軸を中心に γ (第3図) 傾けたときの可展ねぢ面の式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos\phi - \mu \cos\beta_0 \sin\phi \\ y_1 &= (r_0 \sin\phi + \mu \cos\beta_0 \cos\phi) \cos\gamma + (r_0 \phi + \mu \cos\beta_0) \tan\beta_0 \sin\gamma \\ z_1 &= (r_0 \sin\phi + \mu \cos\beta_0 \cos\phi) (-\sin\gamma) + (r_0 \phi + \mu \cos\beta_0) \tan\beta_0 \cos\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

可展ねぢ面の $X_1 Z_1$ 面への投影図は, (5) の x_1, z_1 及び $\partial(x_1, z_1)/\partial(\phi, \mu) = 0$ を満足するということから, 次の如くなる。

$$\frac{\partial(x_1, z_1)}{\partial(\phi, \mu)} = \mu \cos\beta_0 (\sin\beta_0 \cos\gamma \cos\phi - \cos\beta_0 \sin\gamma) = 0$$

$\therefore \mu \neq 0$ として

$$\cos\phi = \tan\gamma \cot\beta_0, \quad \therefore \sin\phi = \pm \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0}$$

従つて, $\phi = \sin^{-1}(-, \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0}) \sim \sin^{-1} \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0}$ 間の $x_1 z_1$ 面への投影図は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \tan\gamma \cot\beta_0 \mu \mp \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0} \cdot \cos\beta_0 \\ z_1 &= (\pm r_0 \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0} + \mu \cos\beta_0 \tan\gamma \cot\beta_0) (-\sin\gamma) \\ &\quad + [\mu \cos\beta_0 + r_0 \cos^{-1}(\tan\gamma \cot\beta_0)] \tan\beta_0 \cos\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

而して, 複号中上側は $\mu < 0$, 下側は $\mu > 0$ とす

又投影図の傾斜は

$$\frac{dx_1}{dz_1} = \pm \frac{\cot\beta_0}{\cos\gamma \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_0}} \dots \dots \dots (8)$$

又(1)なる可展ねぢ面より z_0 離れた位置に於ける同様な可展ねぢ面の式は

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos\phi - \mu \cos\beta_0 \sin\phi \\ y &= r_0 \sin\phi + \mu \cos\beta_0 \cos\phi \\ z &= h\phi + \mu \sin\beta_0 + z_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

従つて Z 軸を含む XZ 面での断面図は, $y = 0$ として, (3) と同様に, $\mu = -r_0 \tan\phi / \cos\beta_0$, を用いて,

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \sec \phi \\ z &= h(\phi - \tan \phi) + z_0 = -h \operatorname{inv} \phi + z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3')$$

$X_1 Y_1 Z_1$ 座標では、この可展ねぢ面は

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos \phi - \mu \cos \beta_0 \sin \phi \\ y_1 &= (r_0 \sin \phi + \mu \cos \beta_0 \cos \phi) \cos \gamma + (r_0 \phi + \mu \cos \beta_0 + z_0 \cot \beta_0) \tan \beta_0 \sin \gamma \\ z_1 &= (r_0 \sin \phi + \mu \cos \beta_0 \cos \phi) (-\sin \gamma) + (r_0 \phi + \mu \cos \beta_0 + z_0 \cot \beta_0) \tan \beta_0 \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots (6')$$

又 $X_1 Z_1$ 面へのこの可展ねぢ面の投影図は、 $\phi = \sin^{-1}(-\sqrt{1 - \tan^2 \gamma \cot^2 \beta_0} \sim \sin^{-1} \sqrt{1 - \tan^2 \gamma \cot^2 \beta_0}$ にて

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \tan \gamma \cot \beta_0 \pm \mu \sqrt{1 - \tan^2 \gamma \cot^2 \beta_0} \cdot \cos \beta_0 \\ z_1 &= (\pm r_0 \sqrt{1 - \tan^2 \gamma \cot^2 \beta_0} + \mu \cos \beta_0 \tan \gamma \cot \beta_0) (-\sin \gamma) \\ &\quad + [\mu \cos \beta_0 + r_0 \cos^{-1}(\tan \gamma \cot \beta_0) + z_0 \cot \beta_0] \tan \beta_0 \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7')$$

但し、上側の符号は $\mu < 0$ 、下側は $\mu > 0$ 、とす。

又 $X_1 Z_1$ 面への投影図の傾斜は

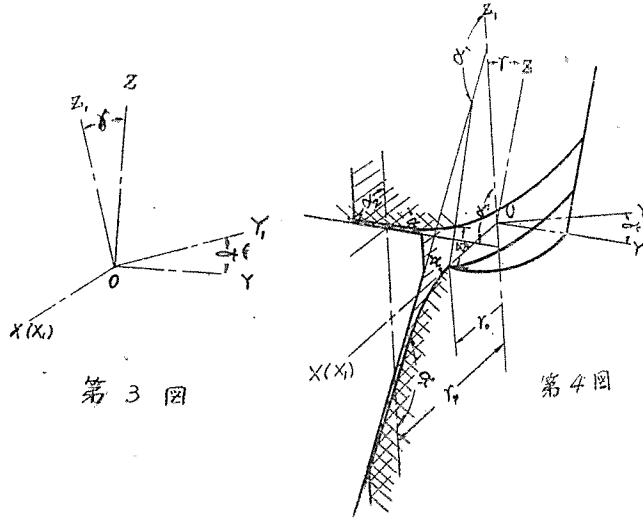
$$\left. \frac{dx_1}{dz_1} = \pm \frac{\cot \beta_0}{\cos \gamma \sqrt{1 - \tan^2 \gamma \cot^2 \beta_0}} \right\} \dots\dots\dots (8')$$

上述の式中にて $\mu < 0$ は L_1 面を、 $\mu > 0$ は U_1 面を示すものである。又(8')は(8)と同一の結果になる。

3. インボリュート歯車用ホブ歯面の方程式

創生せんとする圧力角 a なるインボリュート歯車と噛合うラックの歯はそのピッチ線に夫々 $\pi/2 + a$ 、 $\pi/2 - a$ なる角度をなす直線になる。このラックを形成するような、換言すると、歯面の投影図が直線になる如きホブ歯面は、第2節に説明せるところにより、可展ねぢ面なることがわかる。而して、ホブの歯面は一つの可展ねぢ面の L 側と他の可展ねぢ面の U_1 側とよりなる(第2図)から、一つの歯型には二つの異なるねぢ面の方程式が必要になる。ホブ軸は歯車面と一般に γ なる傾きをなして居るが、設計の基準として $\gamma = \beta_b$ とする。切削の場合は γ を β_b より変化さす事に依りて、創生せられる歯車に圧力角、歯厚、歯底の丸み等の変化が生ずる。

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| M = 歯車のモジュール(mm) | M_n = ホブの歯直角モジュール(mm) |
| a = 歯車の圧力角 | a_1, a_2 = ラック歯のピッチ線との角 |
| $a_1 = \frac{\pi}{2} + a$ | $a_2 = \frac{\pi}{2} - a$ (第4図) |
| a_n = ホブの歯直角圧力角 | a_s = ホブの軸直角圧力角 |
| p = 歯車のピッチ | p_l = ホブの軸方向ピッチ |
| p_n = 歯直角ピッチ | |
| β_b = ホブのピッチ円筒に於ける萇巻角 | |
| r_a = ホブの歯末円筒半径 | r_b = ホブピッチ円筒半径 |
| r_d = ホブの歯本円筒半径 | |
| h_a = 歯車歯末の高さ = $k_a M$ | h_d = 歯車歯本の高さ = $k_d M$ |
| h_{ha} = ホブ歯末高さ | h_{hd} = ホブ歯本高さ = h_{ha} |



しかるときは次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \tan\beta_0 &= \tan\beta_p \sec\alpha_s & \tan\alpha_s &= \tan\alpha_n \operatorname{cosec}\beta_p \\ \tan\beta_p &= \frac{l}{2\pi r_p} = \frac{n p l}{2\pi r_p} = \frac{n p \sec\beta_p}{2\pi r_p} \\ h_{ha} &= h_d = k_d M & h_{hd} &= h_{na} = k_d M \\ r_a &= r_p + h_{hd} = r_p + k_d M, & r_d &= r_p - h_{hd} = r_p - k_d M \\ r_p &= \frac{1}{2} M_n \cdot n \cdot \operatorname{cosec}\beta_p \end{aligned}$$

$\delta = \beta_p$ のときは, $M = M_n$, 即ち $p = p_n$ となる。

今(8)及(8')に $\tan\beta_0 = \tan\beta_p \sec\alpha_s$, $\tan\alpha_s = \tan\alpha_n \operatorname{cosec}\beta_p$ なる関係を代入すれば, X_1Z_1 面でのホブ断面の式は次の如くなる。

$$\frac{dx_1}{dz_1} = \mp \cot\alpha_n \dots\dots\dots(9)$$

但し負号は $\mu < 0$, 正号は $\mu > 0$

第4図に於て, L 及 U_1 面では夫々 $dx_1/dz_1 = \tan\alpha_1$, $dx_1/dz_1 = \tan\alpha_2$, これを(9)に代入せば, 何れも次の結果となる。

$$\alpha = \alpha_n \dots\dots\dots(9')$$

この関係は, $\gamma = \beta_p$ なる時は歯車の圧力角はホブの齒直角圧力角に等しい事を示す。又(9')及び(8), (8')より

$$\begin{aligned} \tan\beta_0 &= \tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p} \\ \therefore \beta_0 &= \tan^{-1}(\tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p}) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\therefore r_0 = \frac{n p l}{2\pi \tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p}} = \frac{n p \sec\beta_p}{2\pi \tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p}} \dots\dots(11)$$

次いで U_1 面の式(1')の Z_0 の値を求める。 X_1Z_1 面では, $x_1 = r_p$ に於て $\overline{A_1B_1} = p/2 = p_n/2$ なるゆえ, (6)及び(6')より, L 面では $\mu < 0$, U_1 では $\mu > 0$ なることを考慮すれば

$$p/2 = (-2r_0\sqrt{1-\tan^2\beta_p \cot^2\beta_0} + 2\mu\cos\beta_0 \tan\beta_p \cot\beta_0)(-\sin\beta_p) \\ + [2\mu\cos\beta_0 + 2r_0\cos^{-1}(\tan\beta_p \cot\beta_0)]\tan\beta_0 \cos\beta_p + z_0 \cos\gamma$$

しかし、B点では、 $x_1 = r_p = r_0 \tan\beta_p \cot\beta_0 + \mu\sqrt{1-\tan^2\beta_p \cdot \cot^2\beta_0}$
従つて

$$\mu = \frac{-r_0 \tan\beta_p \cot\beta_0 + r_p}{\sqrt{1-\tan^2\beta_p \cot^2\beta_0} \cdot \cos\beta_0}$$

両式より

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \sec\beta_p \left[-\frac{p}{2} + 2r_0\sqrt{1-\tan^2\beta_p \cot^2\beta_0} (-\sin\beta_p) \right. \\ &+ \frac{2(-r_0 \tan\beta_p \cot\beta_0 + r_p)(\tan\beta_p \cot\beta_0 \sin\beta_p - \tan\beta_0 \cos\beta_p)}{\sqrt{1-\tan^2\beta_p \cot^2\beta_0}} \\ &\left. - 2r_0 \cos^{-1}(\tan\beta_p \cot\beta_0) \tan\beta_0 \cos\beta_p \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned} \right\}$$

次に歯面の限界を考える。ホブの歯面は歯末円筒面と歯本円筒面の間にあるから、 μ にも一定の限界がある。即ち

$$(r_p - h_{hd})^2 \leq x^2 + y^2 \leq (r_p + h_{hd})^2, \quad \therefore (r_p - h_{hd})^2 \leq r_0^2 + \mu^2 \cos^2\beta_0 \leq (r_p + h_{hd})^2$$

従つて、 r_0 を代入すれば、L面及びU₁面では夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} &-\sec\beta_0 \sqrt{(r_p - k_d M)^2 - \left(\frac{n \cdot p \cdot \sec\beta_p}{2\pi \sqrt{\tan^2\beta_p + \tan^2\alpha \sec^2\beta_p}} \right)^2} \\ &\geq \mu \geq -\sec\beta_0 \sqrt{(r_p + k_d M)^2 + \left(\frac{n \cdot p \cdot \sec\beta_p}{2\pi \sqrt{\tan^2\beta_p + \tan^2\alpha \sec^2\beta_p}} \right)^2} \\ &\sec\beta_0 \sqrt{(r_p + k_d M)^2 + \left(\frac{n \cdot p \cdot \sec\beta_p}{2\pi \sqrt{\tan^2\beta_p + \tan^2\alpha \sec^2\beta_p}} \right)^2} \\ &\geq \mu \geq \sec\beta_0 \sqrt{(r_p - k_d M)^2 + \left(\frac{n \cdot p \cdot \sec\beta_p}{2\pi \sqrt{\tan^2\beta_p + \tan^2\alpha \sec^2\beta_p}} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

但し上式はL面の、下式はU₁面の μ の範囲とする。

上式にてL面の式の左邊を $-\mu_d$ 、右邊を $-\mu_a$ とすれば(13)式は次の如く表わされる。

$$\left. \begin{aligned} -\mu_d &\geq \mu \geq -\mu_a \\ \mu_a &\geq \mu \geq \mu_d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13')$$

但し、上式はL面、下式はU₁面のものとす。

歯車のM及び α が與えられ、ホブの r_p 、 β_p 、 n 、の何れか二つが與えられた場合には、 $r = \beta_p$ を設計の基準として、 α_n 、 β_0 、 r_0 、 z_0 、及び μ の範囲が夫々(9')、(10)、(11)、(12)、(13)の諸式で表わされる。

従つてホブの方程式は

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos\phi - \mu \cos\beta_0 \sin\phi \\ y &= r_0 \sin\phi + \mu \cos\beta_0 \cos\phi \\ z &= h\phi + \mu \sin\beta_0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos\phi - \mu \cos\beta_0 \sin\phi \\ y &= r_0 \sin\phi + \mu \cos\beta_0 \cos\phi \\ z &= h\phi + \mu \sin\beta_0 + z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

但し、左は $-\mu_d \geq \mu \geq -\mu_a$ 、右は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_d$ 、且つ式中 r_0 、 β_0 、 z_0 、及び μ の値は(10)、(11)、(12)、(13)に依る。

又Z軸を含むXZ面では、(14)又は(3) (3')より

$$\left. \begin{aligned} \mu &= -r_o \tan\phi / \cos\beta_o \\ x &= r_o \sec\phi \\ z &= h(\phi - \tan\phi) = -h \operatorname{inv}\phi \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \mu &= -r_o \tan\phi / \cos\beta_o \\ x &= r_o \sec\phi \\ z &= h(\phi - \tan\phi) + z_o = -h \operatorname{inv}\phi + z_o \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

但し、左は $-\mu_a \geq \mu \geq -\mu_a$ 、右は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_a$ 、且つ式中 r_o 、 β_o 、 z_o 、及び μ の値は (10)、(11)、(12)、(13) に依る。

XZ 面への求むるホブ面の投影図は、(14) 及び (4) より、 $\phi = \pm\pi/2$ について考えれば

$$\left. \begin{aligned} x &= -\mu \cos\beta_o \\ z &= \mu \sin\beta_o + \frac{\pi}{2} h \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &= \mu \cos\beta_o \\ z &= \mu \sin\beta_o - \frac{\pi}{2} h + z_o \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

但し、左は $-\mu_a \geq \mu \geq -\mu_a$ 、右は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_a$ 、にして $x \geq r_d$ なる範囲とする。且つ r_a 、 β_o 、 z_o 、及び μ は夫々 (10)、(11)、(12)、(13) に依る。

従つて、傾斜は (16) の範囲に於ては、直線であり、次式にて示さる。

$$\frac{dx}{dz} = \pm \cot\beta_o \dots\dots\dots (17)$$

但し β_o は (11) に依る。

而して、(16) にては μ が一定の範囲内の値ゆえ、投影図は直線部分は (16) にて良いが、歯先の端部は (16) にては表わされない。端部は歯先の陵線の投影となり、一端は断面の角に一致し、他端は投影図 (16) の $\mu = \pm\mu_a$ なる点に一致して居る。即ち端末部の投影図は、(14) より

$$\left. \begin{aligned} x &= r_o \cos\phi - (-\mu_a) \cos\beta_o \sin\phi \\ z &= h\phi + (-\mu_a) \sin\beta_o \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &= r_o \cos\phi - (\mu_a) \cos\beta_o \sin\phi \\ z &= h\phi + (\mu_a) \sin\beta_o + z_o \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

但し、左は $\tan^{-1}\left(\frac{\mu_a \cos\beta_o}{r_o}\right) \geq \phi \geq \pi/2$ 、右は $-\pi/2 \geq \phi \geq -\tan^{-1}\left(\frac{\mu_a \cos\beta_o}{r_o}\right)$ なる範囲にて、 r_o 、 β_o 、 z_o は (10)、(11)、(12) 式に依る。

次に、ホブの X 軸を中心に、ホブ軸 Z と任意の角 γ 傾いた面への投影図は、(14) 及び (7) より次の如くなる。但し γ は左廻りを正とす。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_o \tan\gamma \cot\beta_o - \mu \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_o} \cdot \cos\beta_o \\ z_1 &= (r_o \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_o} + \mu \cos\beta_o \tan\gamma \cot\beta_o)(-\sin\gamma) \\ &\quad + [\mu \cos\beta_o + r_o \cos^{-1}(\tan\gamma \cot\beta_o)] \tan\beta_o \cos\gamma \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 &= r_o \tan\gamma^2 \cot\beta_o + \mu \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_o} \cdot \cos\beta_o \\ z_1 &= (-r_o \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_o} + \mu \cos\beta_o \tan\gamma \cot\beta_o)(-\sin\gamma) + \\ &\quad [\mu \cos\beta_o + r_o \cos^{-1}(\tan\gamma \cot\beta_o) + z_o \cot\beta_o] \tan\beta_o \cos\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

但し、上式は $-\mu_a \geq \mu \geq -\mu_a$ 下式は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_a$ 、且つ何れも $x_1 \geq r_d$ なる範囲にて、 r_o 、 β_o 、 z_o 、及び μ は (10)、(11)、(12)、(13) に依る。

而して、この場合も XZ 面に於けると同様に端末曲線は表わされない。端末曲線の投影図は歯先陵線の一部となり、且つ $x_1 = r_a$ なる歯先円筒の投影線に依りて限界を與えられて居る。即ち

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_o \cos\phi - (-\mu_a) \cos\beta_o \sin\phi \\ z_1 &= [r_o \sin\phi + (-\mu_a) \cos\beta_o \cos\phi](\sin\gamma) + [r_o \phi + (-\mu_a) \cos\beta_o] \tan\beta_o \cos\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_o \cos\phi - \mu_a \cos\beta_o \sin\phi \\ z_1 &= (r_o \sin\phi + \mu_a \cos\beta_o \cos\phi)(-\sin\gamma) + (r_o \phi + \mu_a \cos\beta_o + \\ &\quad z_o \cot\beta_o) \tan\beta_o \cos\gamma \end{aligned} \right\}$$

但し、上式は $0 < \phi \leq \cos^{-1}(\tan\beta_p \cot\beta_o)$ 、下式は $\cos^{-1}(\tan\beta_p \cot\beta_o) \leq \phi < O$ 、にして、且つ何れも $x_1 \leq r_a$ なる範囲である、又 r_o 、 β_o 、 z_o 、は夫々、(11)、(12)、に依る。直線部分の傾斜は(19)より

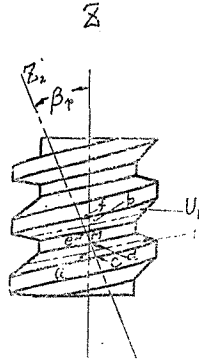
$$\frac{dx_1}{dz_1} = \mp \frac{\cot\beta_o}{\cos\gamma \sqrt{1 - \tan^2\gamma \cot^2\beta_o}} \dots\dots\dots(21)$$

但し負号は $-\mu_d \geq \mu \geq -\mu_a$ 、正号は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_d$ 、にして β_o は(11)に依る。

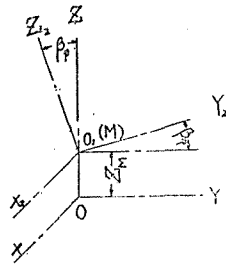
以上の式にて、 $\mu < O$ は L 面に、 $\mu > O$ は U_1 面に関係せる諸式にて何れの式も媒介変数 μ 又は ϕ 、又はその何れか、又はその何れも含まぬ式で、 μ 、 ϕ の範囲を適当に取りて決定せられる。

4. ホブの歯に直角な断面に於ける歯型曲線

ホブの歯型はピッチ円筒に於けるねぢ山への垂直断面に於て規定せられて居るが、このホブに依つて作られる歯車は、一般に規定せられて居るものでは、理論的に正しいインボリュートでない。第3節にて得た、正しいインボリュートを得るホブ歯面の方程式を用いて理想的なホブの歯型は如何なる方程式を持つ断面かを求める。



第5図



第6図

第5図に於て a 点、 b 点は、ピッチ円筒上にて、 L 面及 U_1 面と XZ 面との交点とする。 M 点は \overline{ab} の中点とす。且つ a 、 b 、 M 、点の Z 座標を夫々 z_a 、 z_b 、 z_M 、とすれば(15)より

$$z_a = r_o \tan\beta_o (\phi_a - \tan\phi_a), \quad \text{こゝに } \phi_a = \cos^{-1}\left(\frac{r_o}{r_p}\right) \text{ とす。}$$

$$z_b = r_o \tan\beta_o (\phi_b - \tan\phi_b) + z_o, \quad \text{こゝに } \phi_b = \cos^{-1}\left(\frac{r_o}{r_p}\right) \text{ とす。}$$

而して b 点は(15)より、 $\mu \geq O$ 、従つて、 $\phi_b = -\phi_a$ となる。

$$\therefore z_b = -r_o \tan\beta_o (\phi_a - \tan\phi_a) + z_o$$

しかるに、 $z_M = \frac{z_a + z_b}{2}$ なるに依り、上の z_a 、 z_b を代入すれば

$$z_M = z_o / 2 \dots\dots\dots(22)$$

但し z_o は(12)に依る。

第6図に於て、XYZ座標の原点を z_M だけ移動し、且つZ軸より $\gamma = \beta_p$ 、傾いた座標を $X_2Y_2Z_2$ 座標とすれば、(14)より誘導して、ホブの方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_o \cos\phi - \mu \cos\beta_o \sin\phi \\ y_2 &= (r_o \sin\phi + \mu \cos\beta_o \cos\phi) \cos\beta_p + (h\phi + \mu \sin\beta_o \mp \frac{z_o}{2}) \sin\beta_p \\ z_2 &= (r_o \sin\phi + \mu \cos\beta_o \cos\phi) (-\sin\beta_p) + (h\phi + \mu \sin\beta_o \mp z_o / 2) \cos\beta_p \end{aligned} \right\}$$

複号中、負号は $-\mu_d \geq \mu \geq -\mu_a$ 、正号は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_d$ とす。 r_o, β_o, z_o, μ は(10), (11), (12), (13)に依る。

従つて X_2Z_2 面に於けるホブの断面の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \mu &= - \frac{r_o \sin\phi \cos\beta_p + (h\phi \mp z_o / 2) \sin\beta_p}{\cos\beta_o \cos\phi \cos\beta_p + \sin\beta_o \sin\beta_p} \\ x_2 &= r_o \cos\phi - \mu \cos\beta_o \sin\phi \\ z_2 &= (r_o \sin\phi + \mu \cos\beta_o \cos\phi) \sin\beta_p + (h\phi + \mu \sin\beta_o \mp z_o / 2) \cos\beta_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

但し、複号中、負号は $-\mu_d \geq \mu \geq -\mu_a$ 、正号は $\mu_a \geq \mu \geq \mu_d$ 、且つ r_o, β_o, z_o, μ は、(10), (11), (12), (13)に依る。

(22)にて、ホブの歯に直角な断面の方程式が決定される。これより直線でない事がわかる、限界点は(22)にて表わしてないが、歯先及び歯本円筒断面との交点であり、簡単なる式にては表示できない。

5. 実例計算

$M = 10\text{mm}$, $\alpha = 14.5^\circ$ の標準インボリュート歯型を創生すべき、 $n = 1$, $r_p = 60\text{mm}$ 、にして、 $\gamma = \beta_p$ なるとき正確な歯を創生するホブに関する上述の事項を考察する。 x, y, z, μ の単位はmmとする。 $\gamma = \beta_p$ なるゆえ、(9')より

$$\alpha_n = \alpha = 14.5^\circ \dots\dots\dots(a)$$

$$M_n = M = 10\text{mm} \quad \therefore p_n = p = \pi M = \pi M_n = 31.416\text{mm} \dots\dots\dots(b)$$

$$\begin{aligned} \tan\beta_p &= - \frac{p_l}{2\pi r_p} = \frac{p_n \sec\beta_p}{2\pi r_p} \quad \therefore \sin\beta_p = \frac{p_n}{2\pi r_p} = \frac{1}{12} = 0.083333 \\ \therefore \beta_p &= 4^\circ 46' 48'' = 0.08341 \text{ ラディア } \dots\dots\dots(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \text{ より } \tan\beta_o &= \tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p} = 0.2726 \\ \therefore \beta_o &= 15^\circ 15' \dots\dots\dots(d) \end{aligned}$$

(11)より

$$r_o = \frac{n \cdot p \cdot \sec\beta_p}{2\pi \tan\beta_p \sqrt{1 + \tan^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta_p}} = 18.404\text{mm} \dots\dots\dots(e)$$

$$(12) \text{ より, } z_o = -2.765\text{mm} \dots\dots\dots(f)$$

(13)より、L面及び U_1 面では夫々

$$-46.433 \geq \mu \geq -71.689, \quad 71.689 \geq \mu \geq 46.433, \dots\dots\dots(g)$$

従つて、(14)よりホブ面の方程式は、

$$\left. \begin{aligned} x &= 18.404\cos\phi - 0.9648\mu\sin\phi \\ y &= 18.404\sin\phi + 0.9648\mu\cos\phi \\ z &= 5.017\phi + 0.2630\mu \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} x &= 18.404\cos\phi - 0.9648\mu\sin\phi \\ y &= 18.404\sin\phi + 0.9648\mu\cos\phi \\ z &= 5.017\phi + 0.2630\mu - 2.765 \end{aligned} \right\} \dots (h)$$

但し、左は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$ 、右は $71.689 \geq \mu \geq +46.433$

XZ面での断面図は(15)より

$$\left. \begin{aligned} \mu &= -19.076\tan\phi \\ x &= 18.404\sec\phi \\ z &= 5.017(\phi - \tan\phi) \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} \mu &= -19.076\tan\phi \\ x &= 18.404\sec\phi \\ z &= 5.017(\phi - \tan\phi) - 2.765 \end{aligned} \right\} \dots (i)$$

但し、左は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$ 、右は $71.689 \geq \mu \geq 46.433$

XZ面へのホブ面の投影図は(16)より

$$\left. \begin{aligned} x &= -0.96479\mu \\ z &= 0.2630\mu + \frac{\pi}{2} \cdot 5.017 \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} x &= 0.96479\mu \\ z &= 0.2630\mu - \frac{\pi}{2} \cdot 5.017 - 2.765 \end{aligned} \right\} \dots (j_1)$$

但し左は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$ 、右は $71.689 \geq \mu \geq 46.433$ にして且つ、両者とも $x \geq 48.43$ なる範囲とす。

又歯先端部投影図は(18)より

$$\left. \begin{aligned} x &= 18.404\cos\phi + 69.165\sin\phi \\ z &= 5.017\phi - 18.856 \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} x &= 18.404\cos\phi - 69.165\sin\phi \\ z &= 5.017\phi + 16.091 \end{aligned} \right\} \dots (j_2)$$

但し、左は $\tan^{-1}3.758 \leq \phi \leq \pi/2$ 、右は $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq -\tan^{-1}3.758$ 、

又直線部の傾斜は(17)より

$$\frac{dx}{dz} = \mp 3.6679 \dots (k)$$

但し、負号はL面、正号はU₁面のものを示す。

又X₁Z₁面への投影図は、 $r = \beta_p$ なるときは、(19)より

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5.645 - 0.9183\mu \\ z_1 &= 4.835 + 0.2374\mu \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} x_1 &= 5.645 + 0.9183\mu \\ z_1 &= 7.590 + 0.2375\mu \end{aligned} \right\} \dots (l)$$

但し、左は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$ 、右は $71.689 \geq \mu \geq 46.433$ 、にして且つ、 $x_1 \geq 48.43$ なる範囲とする。

歯先端部曲線は、(20)より

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 18.404\cos\phi + 69.165\sin\phi \\ z_1 &= -1.534\sin\phi + 5.764\cos\phi \\ &+ 5\phi - 18.791 \end{aligned} \right\} \text{及び} \left. \begin{aligned} x_1 &= 18.404\cos\phi + 69.165\sin\phi \\ z_1 &= 1.534\sin\phi - 5.764\cos\phi - 5\phi \\ &+ 16.036 \end{aligned} \right\} \dots (m)$$

但し、左は $O < \phi \leq \cos^{-1}0.30671$ 、右は $O > \phi \geq -\cos^{-1}0.30671$ 、且つ $x_1 \leq 71.57$ なる範囲とする。

又直線部分の傾斜は、(21)より

$$dx_1/dz_1 = \mp 3.867 \dots (n)$$

但し、負号は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$ 、正号は $71.689 \geq \mu \geq 46.433$ 、

次にX₂Z₂面での断面の方程式は、(23)より

$$\left. \begin{aligned} \mu &= -\frac{18.340\sin\phi + 0.418\phi \mp (-0.115)}{0.9614\cos\phi + 0.0219} \\ x_2 &= 18.404\cos\phi - 0.96479\sin\phi \\ z_2 &= -1.5340\sin\phi - 0.08040\mu\cos\phi + 5.000\phi + 0.2621\mu \mp (-1.578) \end{aligned} \right\} \dots (o)$$

但し、複号中上側の符号は $-46.433 \geq \mu \geq -71.689$,

下側の符号は $71.689 \geq \mu \geq 46.433$,とする。

(O)式よりわかる如く、 dx_2/dz_2 は媒介変数 ϕ 又は μ に従つて変化することがわかり、直線ではない。而して其の限界点は明瞭なる式にて表わしにくく、歯先及び歯本円筒の断面の方程式は次式(p)にて表わされるが、(O)と(p)との交点が限界点になる。

歯先円筒断面は

$$\frac{x_2^2}{(r_p + h_{ha})^2} + \frac{\sin^2 \beta_p z_2^2}{(r_p + h_{ha})^2} = 1 \quad \therefore \frac{x_2^2}{51.2226} + \frac{0.69439 z_2^2}{51.2226} = 1$$

歯本円筒の断面は

$$\frac{x_2^2}{(r_p - h_{hd})^2} + \frac{\sin^2 \beta_p z_2^2}{(r_p - h_{hd})^2} = 1 \quad \therefore \frac{x_2^2}{23.4546} + \frac{0.69439 z_2^2}{23.4546} = 1$$

.....(p)

次に上式の計算結果を示す

- (i)式の計算結果 : 第1表, 第7図
- (j₁), (j₂)式の計算結果 : 第2表, 第7図
- (l), (m)式の計算結果 : 第3表, 第8図
- (O)式の計算結果 : 第4表, 第9図
- (p)式の計算結果 : 第5表, 第9図

6. 結 言

以上、 α , 及びMが與えられたインボリュート歯車用ホブの歯面の方程式を求め、測定の際、投影機を使用するとき必要な投影図の方程式を導き、又工作、設計等の場合に必要なホブ断面の方程式を求めたものである。

第1表 (i)式の計算結果

L 面 の 断 面 図				U ₁ 面 の 断 面 図			
μ mm	ϕ°	χ mm	z mm	μ mm	ϕ°	χ mm	z mm
-46.433	67.667	48.430	- 6.287	46.433	-67.667	48.430	3.522
-49.694	69.000	51.355	- 7.028	49.694	-69.000	51.355	4.263
-52.411	70.000	53.810	- 7.655	52.411	-70.000	53.810	4.890
-58.710	72.000	59.557	- 9.137	58.710	-72.000	59.557	6.372
-62.394	73.000	62.947	-10.018	62.394	-73.000	62.947	7.253
-71.689	75.100	71.570	-12.278	71.689	-75.100	71.570	9.514

第2表 (j₁), (j₂)式の計算結果

L 面 の 投 影 図			U ₁ 面 の 投 影 図		
μ mm	χ mm	z mm	μ mm	χ mm	z mm
-46.433	44.798	- 4.331	46.433	44.798	1.566
-62.190	60.000	- 8.475	62.190	60.000	5.710
-71.679	69.165	-10.973	71.689	69.165	8.208

歯先端部投影図, $\mu = -71.689$			歯先端部投影図, $\mu = 71.689$		
ϕ°	χ mm	z mm	ϕ°	χ mm	z mm
90.000	69.165	-10.973	-90.000	69.165	8.208
85.000	70.505	-11.394	-85.000	70.505	8.649
80.000	71.310	-11.851	-80.000	71.310	9.086
75.100	71.570	-12.279	-75.100	71.570	9.514

第3表 (l), (m)式の計算結果

L 面の投影図			U ₁ 面の投影図		
μ mm	χ_1 mm	z_1 mm	μ mm	χ_1 mm	z_1 mm
-46.433	48.284	-6.186	46.433	48.284	3.436
-46.591	48.430	-6.228	46.591	48.430	3.473
-60.000	60.742	-9.407	60.000	60.742	6.657
-71.689	71.477	-12.186	71.689	71.477	9.433

歯先端部投影図, $\mu = -71.689$			歯先端部投影図, $\mu = 71.689$		
ϕ°	χ_1 mm	z_1 mm	ϕ°	χ_1 mm	z_1 mm
72.139	71.477	-12.186	-72.139	71.477	9.433
73.500	71.544	-12.212	-73.500	71.544	9.357
75.100	71.570	-12.234	-75.100	71.570	9.579

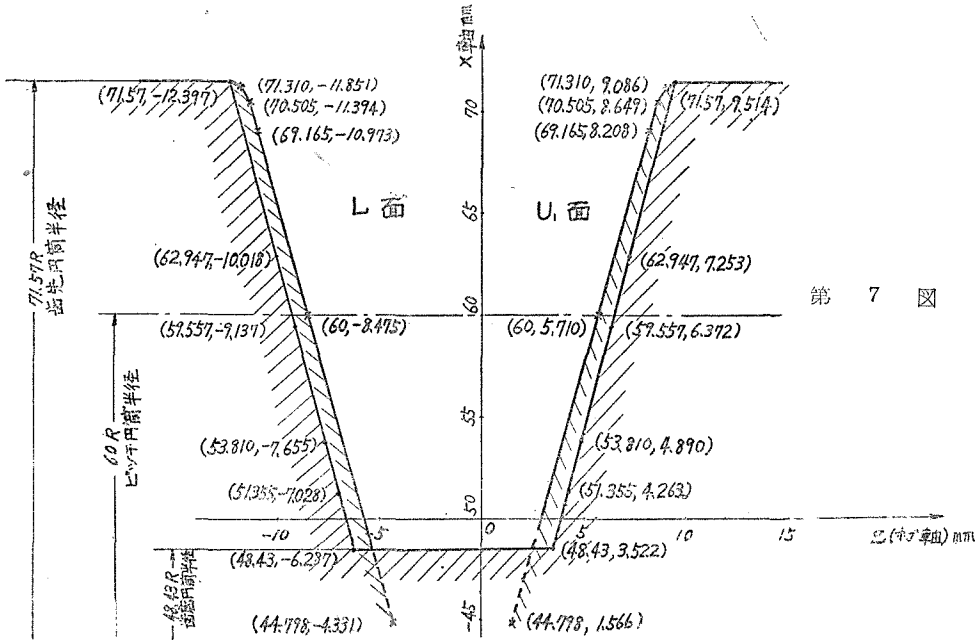
第4表 (O)式の計算結果

L 面の断面図				U ₁ 面の断面図			
ϕ°	μ mm	χ_2 mm	z_2 mm	ϕ°	μ mm	χ_2 mm	z_2 mm
65.000	-40.213	42.934	-3.514	-65.000	40.213	42.934	3.514
67.667	-45.408	47.497	-4.650	-67.667	45.408	47.497	4.650
69.000	-48.337	50.147	-5.309	-69.000	48.337	50.147	5.309
70.000	-50.883	52.446	-5.893	-70.000	50.883	52.446	5.893
72.000	-56.683	57.722	-7.247	-72.000	56.683	57.722	7.247
73.000	-60.023	60.782	-8.040	-73.000	60.023	60.782	8.040
74.000	-63.711	64.133	-8.929	-74.000	63.711	64.133	8.929
75.100	-68.349	68.433	-10.049	-75.100	68.349	68.433	10.049
75.500	-70.042	70.027	-10.470	-75.500	70.042	70.027	10.470
76.000	-72.408	72.226	-11.050	-76.000	72.408	72.226	11.050

第5表 (p)式の計算結果

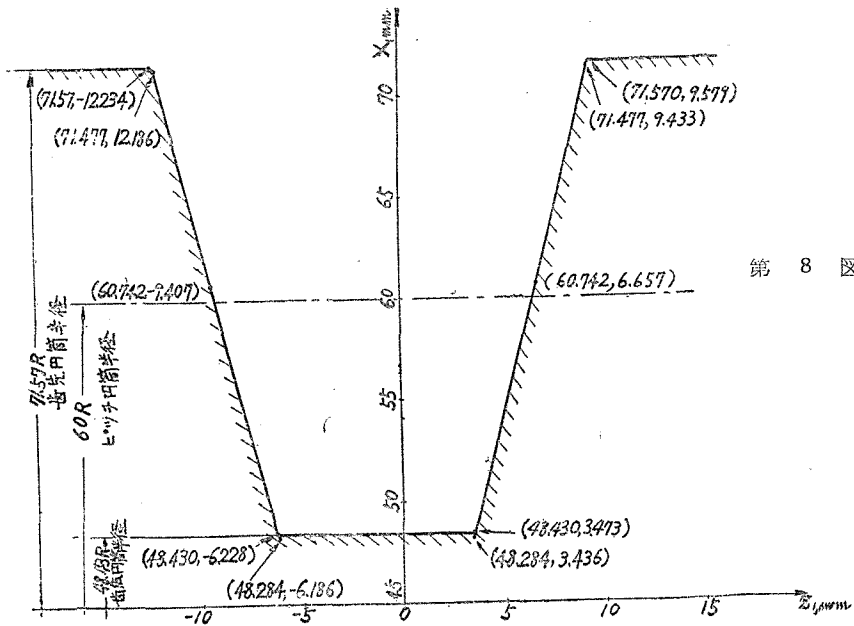
歯先円筒断面		歯本円筒断面	
χ_2 mm	z_2 mm	χ_2 mm	z_2 mm
71.570	0	48.430	0
71.569	± 3.514	48.429	± 3.514
71.568	± 5.893	48.428	± 5.893
71.567	± 8.040	48.425	± 8.040
71.565	± 10.470	48.422	± 10.470
71.564	± 11.050	48.420	± 11.050

X, Z 面に於けるホブ歯型の断面図及投影図

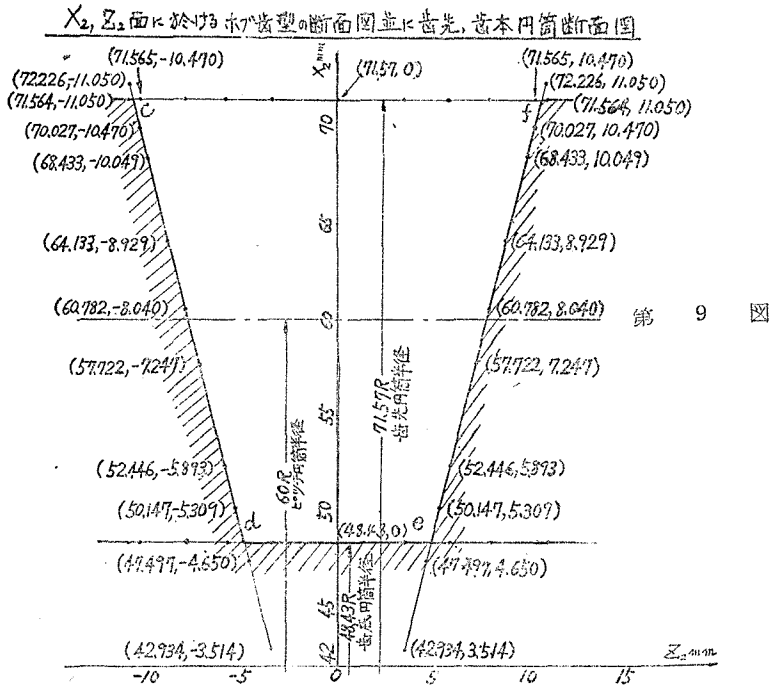


第 7 図

X, Z 面に於けるホブ歯型の投影図



第 8 図



尚発表に際して、民生科学研究所より便宜を與えられたことを感謝致します。

引用文献

- (1) BUCKINGHAM-OLA : STIRNRÄDER MIT GERÄDEN ÄHNEN,
S. 378, (1932)
- (2) 佐藤 申一 : 歯車の歯形とねじ面, 158頁 (1949)
- (3) 窪田 忠彦 : 初等微分幾何学, 188頁
- (4) 両角 宗晴 : 日本機械学会論文集 13, 43, (1947)