

## ピラニゲージの計算について

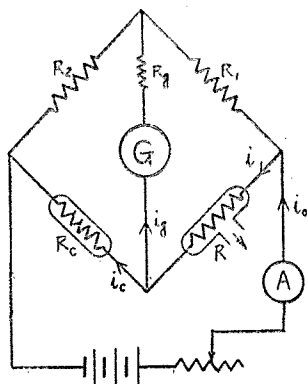
小山 恒 夫

### 1. 緒 言

ピラニゲージの特徴，感度及び安定度等に関しては既に論じられているが，(1)(2)(3)(4) 指示値の理論的数値計算は従来困難視されていたため，これに関する論文は少く実験値との比較についても殆ど発表されていない。そこで理論的指示値の計算方法について論じ，一例の数値計算によつて得た各部分の抵抗，電流，温度及び真空度等の関係を明らかにし，真空度に対する従来の理論式による計算値と実験値とを比較して，そこに現れた差の原因の二三について検討した結果，従来の理論式(3)(4)に更に補正係数を追加することによつて理論値が実験値に接近したのでこの係数について論ずる。

本研究結果が此種真空計の設計上及び短所補整に役立つならば幸である。

### 2. 計 算 法



第 1 図

第1図で  $R$ 、 $R_c$  は細い線で例えば同一形状の硝子管内に封入してあり、 $R_c$  は充分高真空に排気し封じてある。 $R_1$ 、 $R_2$  はブリッジ回路構成抵抗、 $R_g$  は指示計  $G$  の内部抵抗を含む抵抗、 $i$ 、 $i_c$ 、 $i_g$ 、 $i_o$  は各回路の電流で、真空度の変化により  $R$  及び  $i$  は変化し従つて  $R_c$ 、 $i_c$  及び  $i_g$  も変化する。但し  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_g$  及び  $i_o$  は一定とする。尚  $i_o$  の代りにブリッジの電圧を一定にしても全く同様に計算できる。

1. ブリッジ回路 第1図で、キルヒホッフの法則により  $R_c$ 、 $i_c$  及び  $i_g$  を次の如く変数としては  $i$  と  $R$  のみを含む式で表わすことができる。

$$R_c = f(i, R) \dots\dots\dots (1)$$

$$i_c = f(i, R) \dots\dots\dots (2)$$

$$i_g = f(i, R) \dots\dots\dots (3)$$

又  $R_c$  と  $i_c$  との関係については次の如き実験式が得られる。

$$R_c = f(i_c) \dots\dots\dots (4)$$

(4)式に(1)(2)両式を代入して変数  $i$  及び  $R$  の関係式を得る。即ち

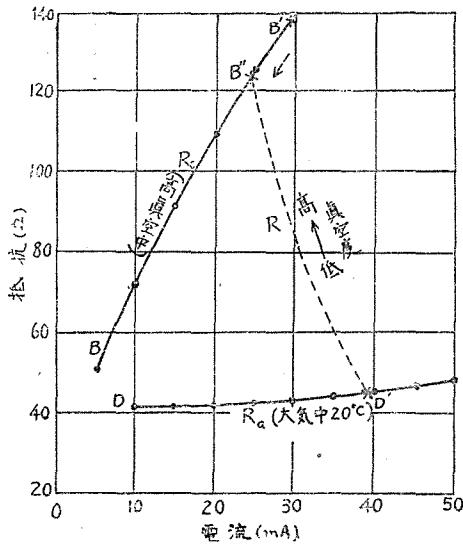
$$f(i, R) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(5)式に  $R$  の或真空度の時の値を與えれば  $i$  の値が計算でき従つてその値を(3)式に代入して  $i_g$  の値が計算できる。故に各真空度の時の  $R$  の値を與えればその時の指示値  $i_g$  が求められる。

2.  $R$  と真空度の関係 真空測定用容器内で抵抗  $R$  に或電流  $i$  を通じて加熱すると一般に次式が成立する。(3)(4)

$$\frac{1}{J} i_g R = A\sigma\epsilon(T^4 - T_0^4) + A\nu C_v (T - T_0) + \frac{r}{2}(T - T_0) \dots\dots\dots(6)$$

左辺は熱線Rに加えた熱量でJは熱の仕事当量である。右辺第1項は輻射による熱量でA, ε, Tは夫々熱線の表面積, 輻射能, 温度, σはステファン・ボルツマン定数, T<sub>0</sub>は容器及び気体の温度である。第2項は気体熱伝導によつて運び去る熱量でνは熱線の単位面積に毎秒衝突する気体の分子数で  $P/\sqrt{2\pi mkT_0}$  で與えられる。但しPは圧力, mは気体分子の質量, kはボルツマン定数である。C<sub>v</sub>, αは気体分子の熱容量, 適合係数である。第3項は熱線のRの両端からの伝導によつて失われる熱量でrは総熱抵抗である。



第 2 図

左辺は熱線Rに加えた熱量でJは熱の仕事当量である。右辺第1項は輻射による熱量でA, ε, Tは夫々熱線の表面積, 輻射能, 温度, σはステファン・ボルツマン定数, T<sub>0</sub>は容器及び気体の温度である。第2項は気体熱伝導によつて運び去る熱量でνは熱線の単位面積に毎秒衝突する気体の分子数で  $P/\sqrt{2\pi mkT_0}$  で與えられる。但しPは圧力, mは気体分子の質量, kはボルツマン定数である。C<sub>v</sub>, αは気体分子の熱容量, 適合係数である。第3項は熱線のRの両端からの伝導によつて失われる熱量でrは総熱抵抗である。

(6)式は気体分子の平均自由行程が熱線Rと器壁との距離より大なる時に大体当はまるのであつて他の場合は後述の如く補正しなければならない。この式に各真空度の時のRの値及びその値によつて定る*i*, T, ε, A, T<sub>0</sub>, C<sub>v</sub>, α, r等の値を代入すればν従つて圧力Pが算出でき, 又先に求めたRの各値に対する*i<sub>g</sub>*の値と比較すれば真空度と指示計の指示値との関係が得られる。Rの値については  $R_a \leq R \leq R_c$  の間で任意にいくつかを選ぶのである。但しR<sub>a</sub>は熱線Rの大気中に於いての抵抗値で第2図曲線DD'はこれである。R及びTの値については次に述べる。

(a) Rの決定法 R及びR<sub>c</sub>を一定大気圧中及び一定高真空中で電流を通じ定

常状態になつた時の電流抵抗特性を夫々測定すると例えば第2図の曲線BB'及びDD'が得られるから, 真空度が次第に増加するとDD'上の或点D'よりBB'上の或点B''に向つて曲線D'B''上を移動することがわかる。従つてRの変化範囲はBB'及びDD'両曲線間にある。即ち*i<sub>g</sub>*が0及び最大指示の時の夫々のRの値を標準抵抗器で求めれば, その間に真空度に応じたRの値がある。曲線D'B''は計算値である。

(b) Tの決定法 Tの値は本計器の特質上あまり高くなく又熱容量も小なるため, 測定は殆ど不可能であるから次式(7)によつてRの値を與えて計算する。

$$R/R_0 = (T/T_0)^n \dots\dots\dots(7)$$

例えばタングステンの場合は近似的に次式が成立する。(5)

$$R/R_0 = (T/T_0)^n \dots\dots\dots(7')$$

但しR<sub>0</sub>は熱線温度T<sub>0</sub>の時の抵抗値である。

こゝに得たTの値は熱線の全抵抗値から求めたものであつてその平均温度であるから, 部分的には温度と比抵抗は異なるため注意しなければならない。Tが決定すればそれに従つてA, ε等も定まる。

### 3. 計算値と実験結果との比較

1. 主要設計値 指示計Gは10mAの計器を使用し、又Tの最高値も比較的大(800°K)にしたので感度は良くないことを予め断つておく。R, R<sub>c</sub>は共に直径0.03mm, 長さ45cmのタングステンをピッチのこまかい螺旋係にしたもので特に表面処理はしない。抵抗値使用範囲は R ≐ 123~45Ω (i ≐ 24~40mA), R<sub>c</sub> ≐ 123~139Ω (i<sub>c</sub> ≐ 24~30mA) で R<sub>1</sub> = R<sub>2</sub> = 6.4Ω, R<sub>g</sub> = 110Ω, i<sub>0</sub> = 500mA一定とし、PがR<sub>c</sub>の圧力と一致した時 i<sub>g</sub> = 0 とする。

2. 計算式 (1), (2), (3)式はブリッジ回路より夫々(8), (9), (10)式で表わされる。

$$R_c = \frac{i_0 \{R_g(R_1 + R_2) + R_1 R_2\} - i \{R_g(R_1 + R_2 + R) + R_2(R_1 + R)\}}{i(R_g + R_1 + R) - i_0 R_1} \dots (8)$$

$$i_c = i \{ (R_g + R_1 + R) - i_0 R_1 \} / R_g \dots (9)$$

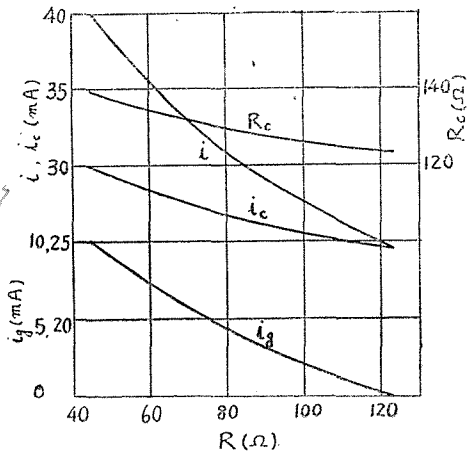
$$i_g = i \{ i_0 R_1 - i(R_1 + R) \} / R_g \dots (10)$$

実験式(4)は計算を容易にするため第2図の直線部を利用したので一次式となる。即ち

$$R_c = ai_c + b \quad (a, b \text{は常数}) \dots (11)$$

(11)式に(8), (9)式を代入して変数としてはi, Rのみの式を得る。即ち

$$a(R_g + R_1 + R)^2 i^2 + \{ (R_g + R_1 + R)(bR_g - 2aR_1 i_0) + R_g(R_1 + R)(R_2 + R_g) + R_2 R_g \} i + \{ aR_1^2 i_0 - bR_g R_1 - R_g^2 (R_1 + R_2) - R_g R_1 R_2 \} i_0 = 0 \dots (12)$$



第 3 図

Rの夫々の値に対して(12)式よりiを、(7')式よりTを夫々求め、又そのTの値によつてA, ε, α等を求めて(6)式に代入し、μ従つてPを算出するのである。

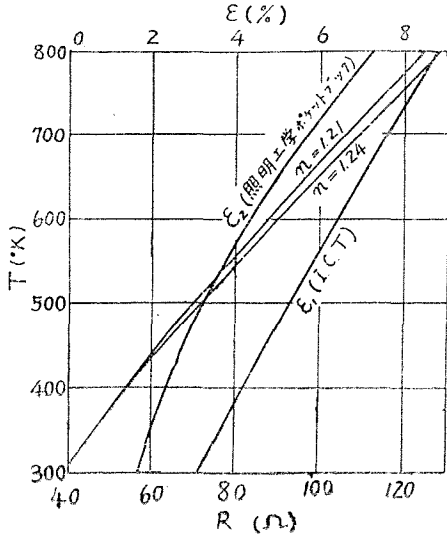
3. 数値計算結果と実験結果 第2図を実験で求めておけば真空度が大気圧から次第に高くなるとRはD'からD'B''曲線に沿つて増加し、もしR<sub>1</sub>=R<sub>2</sub>ならば真空度がR<sub>c</sub>の夫と一致した時DD'とBB'はかさなりR<sub>c</sub>の値はB''に達してR<sub>c</sub>=Rとなり、i<sub>g</sub>=0となる。従つてRの値は真空度によつてD'B''曲線上を変化

し、抵抗と電流の関係は真空度Pをパラメーターとする曲線となりDD'及びBB'両曲線間に存在する。

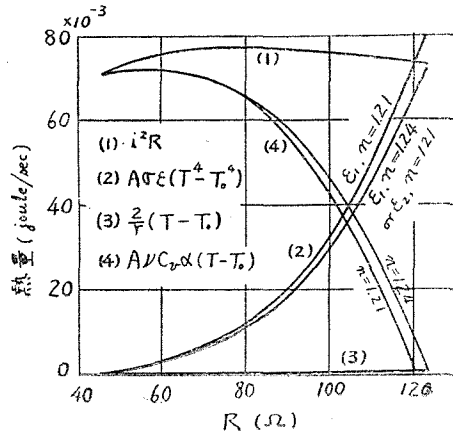
Rの値をD'及びB''両点の間で任意にとつて(12)式よりiを(10)式よりi<sub>g</sub>を求める。かくして得たRの値に対する各部分の値を第3図に示す。なおこれらの実験値は計算値と全く一致したので特に記入しない。

次は温度Tは平均値でR及びμの値によつて定まるが、それと共にεの値も考慮しなけれ

ばならない。即ち  $n=1.21^{(5)}$  ( $T_0 > 273^\circ, T < 1400^\circ$ ) とすると  $\epsilon = \epsilon_1^{(6)}$  とれば真空度約 6 dyne/cm<sup>2</sup> 以上では  $i^2 R / J < A \sigma \epsilon (T^4 - T_0^4)$  となつて矛盾を生ずるが、 $\epsilon = \epsilon_2^{(5)}$  とれば



第 4 図

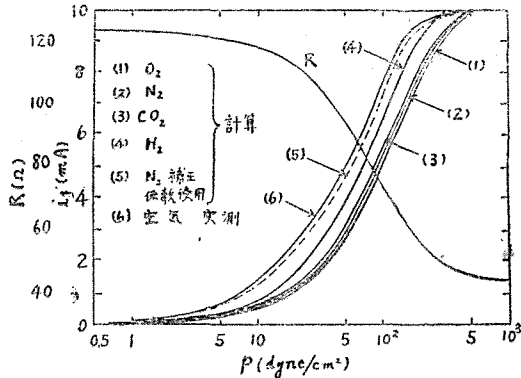


第 5 図

この矛盾は生じない。もし  $\epsilon = \epsilon_1$  が正しいとすれば、 $T$  の値が高すぎたためにかゝる矛盾を生じたものと考えられるから  $n=1.24$  ( $T_0 > 273^\circ, T < 800^\circ$ ) としなければならない。

第 4 図は抵抗温度特性の計算値及び温度と輻射能の関係を示す。

$T_0$  の値は  $P$  従つて  $T$  の変化に伴つて僅ながら変化し、又気体の温度も熱線からの距離によつて異なる筈であるが、計算の都合上一定とした。これについては考察のところ述べる。又  $C_v, \alpha^{(3)}$  の値も一定として計算した。  $A$  の値は  $T$  によつて変化するが、この場合最大変化は約 0.4% であつた。  $r$  は  $T$  の高いほど大であるが導入線への熱伝導量は真空度約 1 dyne/cm<sup>2</sup> のとき計算値は入力約 3% で、低真空度で  $T$  が  $T_0$  に近い時は  $r$  は小になるが熱量は微小となる。



第 6 図

以上求めた各値を(6)式の各項即ち左辺及び右辺第 1・3 項に夫々代入して第 2 項を求める。又別に第 2 項の中  $\nu$  を含まない  $AC_v \alpha (T - T_0)$  を計算して  $\nu$  従つて  $P$  を計算する。この各項の値を第 5 図に示す。第 3 項は熱線を充分長いものを用いれば無視できるが、長くないものを使用したため  $T$  に不均一を生じ輻射熱に影響を與えるから計算上一般には完全に無視することはできない。

第 6 図は空気中に含まれる各ガスに

ついで計算値及び実験値で  $R$  の変化も併せ示した。空気の場合は計算困難であるが大體  $N_2$  ガスに近づくであろう。

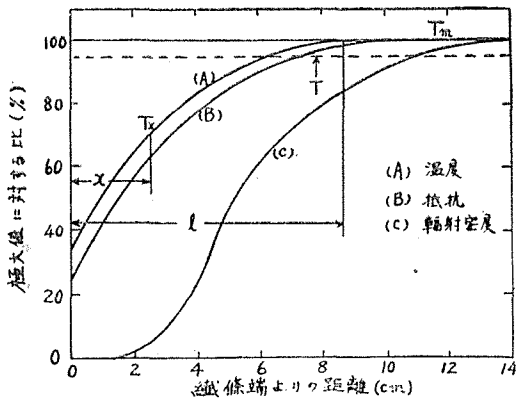
#### 4. 結果の考察

第6図の計算値と実験値の差の主要原因は温度  $T$  及び気体分子の衝突状態にあつて、前者の不均一による輻射熱量に対しては1~2、後者による熱伝導量に対しては1に近い夫々の補正係数を必要とするとして考察を進める。

##### 1. 輻射熱と導入線冷却効果

(a)  $n, \epsilon$  について  $n=1.21$  の場合は前述の如く  $\epsilon=\epsilon_1$  とすれば矛盾するから  $\epsilon=\epsilon_2$  とすればよいことになる。併し、 $\epsilon$  は表面の状態異なるから決定は容易でないが、特に表面が変化していない場合は大體  $\epsilon_1 \geq \epsilon \geq \epsilon_2$  として計算しても影響は少いと考えられる。もし  $\epsilon=\epsilon_1$  であるとすれば  $n \neq 1.21$  で、 $n=1.24$  でなければならない。又  $\epsilon > \epsilon_1$  の時は  $n > 1.24$  となる。これは別の値<sup>(7)</sup> に比較して更に吟味する価値があるだろうと思われる。更に  $\epsilon$  については  $T$  と関係するから次に併せて述べる。

(b)  $T$  について  $T$  の値は前述したように平均温度であるとして取扱つたが厳密には導入線の冷却によつて不均一になつており温度分布は第7図の如くなる。但し同図は或真空度で熱線の冷却によつて不均一になつており温度分布は第7図の如くなる。但し同図は或真空度で熱線の冷却によつて不均一になつており温度分布は第7図の如くなる。但し同図は或真空度で熱線の冷却によつて不均一になつており温度分布は第7図の如くなる。



第7図

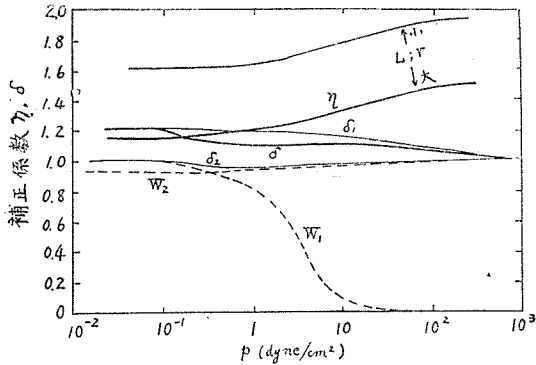
或真空度で熱線の中央部の極大温度を  $T_m$  とすれば両端附近で端より  $x$  なる距離に於ける温度は  $T_x = T_0' + (T_m - T_0')(1 - e^{-\beta x/l})$  で表わせる。但し  $T_0' = T_{(x=0)}$  で  $\beta$  は熱線及び導入線の材質による定数、 $l$  は端より  $T_m$  になるまでの距離で  $l = f(r)$  である。熱線の全長を  $L$  とすれば  $L-2l$  の部分は温度は  $T_m$  である。もし  $l$  が最大の時、 $L \gg l$ 、 $T_m - T \geq 0$  で更に  $(T_m^4 - T_0^4)/(T_m^4 - T_0^4) = 1$  であれば(6)式

右辺第1項はそのまゝ成立するが、この比は一般に1より大で輻射熱量は前記計算値より大になる筈で、その差が第6図に現われた計算値と実験値の差の原因の一つである。従つて平均温度  $T$  で計算する場合は補正係数を必要とする。これを  $\eta$  とすれば

$$\eta = \frac{A_m \epsilon_m (L-2l)(T_m^4 - T_0^4) + \int_0^l 2A_x \epsilon_x (T_x^4 - T_0^4) dx}{A \epsilon (T^4 - T_0^4)} \dots (13)$$

但し  $A_m$ 、 $A_x$ 、 $\epsilon_m$ 、 $\epsilon_x$  は夫々  $T_m$ 、 $T_x$  の部分の単位長さの表面積、輻射能、 $A$ 、 $\epsilon$  は平均温度  $T$  とした時の全表面積、平均輻射能とする。このように導入線の冷却効果の輻射に対する影響は大きい、 $L \gg l$  であれば影響は少い。一般に  $2 > \eta > 1$  で第8図に例示したが、 $L$ 、 $r$  をパラメーターとする曲線である。なお理想状態として  $r = \infty$  の時  $T_m = T_x = T$

≡ $T_0$ で $\eta=1$ となる。熱線と器壁との形態係数は1として取扱つた。



第 8 図

熱線がピッチの細い螺旋織條の場合には織條各部相互間で授受する輻射熱のため温度は上昇するが、安定状態でこの影響をも含めた抵抗値 $R$ を第2図の如く実測してあるから、この $R$ によつて計算した温度となり特に取り上げる必要はない。又 $(T_m - T_0)/(T - T_0)$ は1に近いから端損失によつて(6)式右辺第2・3項へ與える影響は無視出来る。

2. 氣體分子の衝突状態 氣體の

熱伝導量は充分高真空の時は微小であるから(6)式右辺第2項はそのまゝでも大体は成立するが、一般には次の理由によつて補正されなければならない。

(a)  $\nu$ について 前記計算は $T_0$ 一定とした場合であるが、詳細に考えるならば容器温度は一定としても器内氣體分子の温度は熱線の影響をうけて不均一であるから熱線と器壁との間には温度勾配がある。従つて $\nu$ は $T_0$ を均一とした場合とは異なる。即ち真空度大で熱線温度が高いほど温度勾配は大になり、 $T_0$ 均一とした場合に比して $\nu$ は大になる。従つて $T_0$ 均一とした時の衝突分子数を $\nu$ とすれば $\nu\delta_1$ として補正されなければならない。こゝに $\delta_1=1+\theta$ で $\theta$ は $P, T, T_0$ , 熱線の形状, 熱線と器壁との距離等の函数である。

(b) 分子の熱量輸送状態  $\nu$ の中で分子が吸収した熱量を保持したまゝ他の分子に衝突することなく器壁に達し得る分子数を $\nu_1$ とすれば氣體運動論より $\nu_1=\nu W_1$ である。こゝに $W_1=e^{-y/\lambda}$ で $\lambda$ は氣體の平均自由行程,  $y$ は熱線と器壁との距離である。残りの分子数 $\nu_2=\nu-\nu_1$ は全く別の分子に衝突してその熱量の一部或は大部分(衝突状態によつて異なる)を伝え、逐次分子相互の衝突を続けて器壁に達する。残りの熱量は分子が保持したまゝ(器壁温度 $T_0$ より高い温度で)再び熱線に衝突する。従つて $\nu_2$ 個の分子が熱線から吸収した熱量を他の分子に衝突し逐次に器壁に伝導する確率を $W_2$ とすると、結局 $\nu_2 W_2$ 個の分子が他の分子に衝突することなく器壁に達し得ると考えてよい。こゝに $W_2$ は分子衝突の状態及び圧力によつて定まると考えられるから $W_2=e^{-c/f(b)}$ で表わし得る。こゝに $c$ は氣體の種類, 熱線の形状による定数である。従つて分子の熱量輸送については $\nu$ の中 $\nu\delta_2$ だけが他の分子に衝突することなく器壁に達して熱伝導すると考えられる。こゝに

$$\delta_2=(\nu_1+\nu_2 W_2)/\nu=W_1+W_2-W_1 W_2, \quad 0<\delta_2<1$$

で1に近い値をもつ

(a) (b)で述べた係数については $\nu$ のみに関係する。これを一括して $\delta$ とすれば

$$\delta=\delta_1 \cdot \delta_2=(1+\theta)(W_1+W_2-W_1 W_2) \dots\dots\dots(14)$$

第8図にこれの一例を示す。

以上の考察によると従来の理論式はそのまゝでは不充分で次式(15)を使用すれば、計算値と実験値が接近する。

$$i^2 R=\eta A \sigma \epsilon(T^4-T_0^4)+\delta A \nu C_v \alpha(T-T_0)+2(T-T_0)/r \dots\dots\dots(15)$$

但し  $T$  は熱線の平均温度,  $T_0$  は容器及び気体平均温度とする。  $\eta$  及び  $\delta$  を用いた計算値を第(6)図(5)に示した。  $\alpha$ ,  $C_v$  については  $T_0$  の温度勾配による影響を無視して取扱った。

## 5. 結 言

以上従来の理論式及び実験式による指示値の計算法, その計算結果によつて得た指数  $n=1.24$  ( $\epsilon=\epsilon_1$ の時) 並びに輻射, 気体熱伝導に対する補正係数  $\eta$ ,  $\delta$  について述べた。

$\eta$ ,  $\delta$  は多くの函数によつて定まるので, その数値の決定は相当複雑で  $\delta$  のうち  $\theta$ ,  $W_2$  については大体の傾向がわかる位である。  $\lambda \gg \nu$  の場合は  $\delta_2=1$  となり又温度  $T$  を低く設計して  $T_0$  に近くすれば  $\delta_1 \rightarrow 1$  となり従つて  $\delta=1$  となるから, もし  $\nu$  を小に選べば  $\delta=1$  として計算することができる。併し  $\nu$  の決定は排気速度のこともあるから併せて考えなければならぬ。実用面として  $P$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $L$  及び熱線の直径等の数値関係がほぼ判然としたと思うが詳しい設計資料は別の機会に報告する予定である。

終りに, 結果の検討に当つて御指導を賜つた東京工大森田教授並びに御助言を賜つた尾本, 齊藤兩教授に謝意を表すると共に, 設計資料の一部は日立製作所在勤中のものであることを附記する。尙本研究の一部は文部省科学研究費の補助を得て行つたものであり, 工学部民生科学研究所の援助を受けた。

## 参 考 文 献

- (1) 電気学会 : 最近の真空技術とその応用, 59 (昭和23)
- (2) 太田 : 電気学会誌, 63, 877 (昭和18)
- (3) " : マツダ研報, 15, 377 (1940); 16, 42 (1942)
- (4) Farkas & Melville : Experimental Method in Gas Reaction, P 76.
- (5) 照明学会 : 照明工学ポケットブック, 2~18
- (6) International Critical Table
- (7) 照明学会 : 照明工学ポケットブック, 2~26