意思決定における危険と不確実性

浜　崎　　　実

<はじめに>

選択という行為には，支払うべき費用とそこから得られる効果あるいは利益を秤りにかける段階を含んでいる。費用と効果を秤りにかけて比較することは，一般の企業の意思決定にとって不可決のものである。たとえば，ある種の製品を他のそれより二倍も多く，または二倍も早く生産するとすれば，そのいずれが有利であるかを決定するためには，性能を引き上げるに要する追加費用を比較してみなければならない。費用・効果調査の役割は，製品の数量を増減した場合の市場効果に及ぼす影響と，それに伴う費用上の増減を明らかに示すことによって，政策決定の仕事を助けることにある。

通常，最小の費用で最大の結果を達成するという表現が用いられるが，これは必ずしも正確ではなく，<所与の費用で最大の効果を，所与の効果を最小の費用で達成する>と分けて考えるべきであろう。費用・効果調査に対する疑問は，この方法によると，どうしても最も安い製品が選択されがちになるという常識的な信念に基づいている。しかし経験的にいって，どの戦略が与えられた費用で最大の市場効果を達成できるか，あるいは与えられた市場効果を最小の費用でいかに達成するかという問題を，我々は取り扱っているから，特定の情況下における質と量の相対的な市場価値にその重点をおいている。従って，費用と効果が同時に，しかも相互関連的に考慮されなければならない。

費用は，我々が望むほどには常に正確ではないが，一般的には量的測定が可能である。これに対して，効果や市場価値を測定することは非常に難しい。さらに信頼できるデータを利用できないことが多い。従って代替案の選択は公式をあてはめただけでは意思決定できない。結局は，分析の方法を開発し，比較すべき代替案を列挙し，評価の基準を設定する上で最も重要なものは，常に人間の判断であろう。

不確実性の概念は深遠な哲学的問題を提起してきた。それは，本質的にはより一般的な人間の知識の問題と関連しているのである。どの様にして物事を知るか，知ることによって何を意味するのかという様な基本的な議論が，不確実性の下でなされた色々な記述の妥当性に基づいてなされている。しかしその様な事実は，不確実で主観的な情報に基づいて意思決定しなければならない管理者を助けはしないのである。従って，これまでに管理者が有効であると考えた問題に対して，経験的ではあるが実際的である方法だけに局限して，意思決定における危険と不確実性の問題を考察する。

<危険と不確実性>

将来は不確実性に満ちているが，厳格な意味において大数法則によって，予見しうる不確実性には，保険しうる不確実性と保険しえない不確実性とがある。前者を危険，後者を狭義の不確実性として区別すれば，危険は保険料という費用として処理できるから，

利潤の構成要素ではなく，狭義の不確実性こそが利潤の源泉であるといわれる。換言すれば，確率分布を把握できる場合を危険，確率分布を把握できない場合を不確実性と呼んでいいだろう。しかし一般的には両者を含めて広義の不確実性を問題にしている。しかも色々な決定規準は確率に基準を置いているのである。

いずれにしても確率の計算は，不確実性の世界の測量に他ならない。我々は結果が明確に予測できない不確定な事象を取り扱っている。一回の実験（または測定）について予測不可能であるということは，多数回反復された同種の実験についても予測不可能であるということではない。この事実はある種の規則性すら生み出す。規則性の一つの結果は，確率概念と安定した相対頻度という現象の結合である。これと関連して，事前的確率と事後的確率を区別することができる。事前的な場合は，確率は結果の対称性，同値性という想定に基づく。事後的な場合は，相対頻度のとる値をまず観察し，その結果から確率を決定する。事前的確率が，結果的に事後的確率に一致することは明らかであるが，その場合，誤差や偏差の生じることは当然であるから，最良の確実性を求めるためには，原則として事後的確率を優先させなくてはならない。しかし，事前的確率は実験を大規模に反復することが困難であるか，事実上不可能な状況の下で事象の確率を予測することを可能にするという理由で重要である。

不確実性が，特定の確率（厳密には確率密度関数）によって示される限り，不確実性の程度は多少とも減少するのであって，完全な無知の状態に比較すれば明らかに前進であろう。

社会科学におけるあの種の場合，確率の概念は，ある人が事実を断定する時に抱いている確信の度合いであると見なされる。確率がこの意味で使われる場合，個人的確率を論じているわけで，これは，観察力と情報の相違によって，二人の人間が同じ事象に対して異なった二つの確率を事前的に与えうることを意味している。この個人的確率という概念は Savage[1)] によって導入された。合理的な行動に関する多くの前提によって基礎づけている。その前提に従って行動している個人に対する確率の測度を示す。不確実な状況の下で， Savage の定理の意味で合理的な行動をとる人は，あたかも彼自身にとって関心のある事象に数値をつけるかのごとく行動するから，これらの数値は確率計算の公式を満たしているのである。

<危険の下での決定規準>

危険の下での意思決定は，多くの状態が存在する条件と関連しており，決定者はそれら状態の起る確率をすでに知っている。ある種の企業問題では，過去の経験や客観的確率に基づいて，状態の確率が知られている。機械取替えの最適在庫を決定する問題は，取替え部品の歴史的データが，取替え期間について編集されているから，危険の下での意思決定の例である。保険率が寿命の期待要因に基づく生命保険もその例である。この種の問題の一般化は，次の支払行列によって示される。

1) L. J. Savage, The Foundations of Statistics, pp. 27～55, 1954

		状態			
		N_1	N_2	……	N_n
確率		p_1	p_2	……	p_n
	S_1	P_{11}	P_{12}	……	P_{1n}
戦略	S_2	P_{21}	P_{22}	……	P_{2n}
	⋮	…			
	S_m	P_{m1}	P_{m2}	……	P_{mn}

P_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m,\quad j=1, 2, \cdots,\ n)$ は i 行 j 列の支払を表わす。

合理的な意思決定者は，最大支払をもつ戦略 S_i^* を選択する様に行動する。戦略に対する期待支払を $E(S_i)$ とすれば，簡単に次式で示される。

$$E(S_i) = P_{i1}p_1 + P_{i2}p_2 + \cdots\cdots + P_{in}p_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_{ij}p_j \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

但し，　$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$　である。

我々は上式によって各状態 N_j の確率 p_j を用いれば m 種の戦略の期待支払を計算できる。状態の確率が変化すれば当然期待支払も変るから，この問題の決定的要因は，割当てられた確率である。支払行列を修正する場合，戦略に対する支払は，ある支払 P_{ij} が0になることを除けば問題はない。すなわち，企業がある戦略 S_i を選択し，利益が0である状態 N_j をもつなら，この条件に対するいかなる支払もしない。これは企業が他の戦略を選択すれば，0の利益をもつ危険がないことを意味している。収益をもたないような確率を避けるために，期待支払が最大でなくてもよいかという問題が提起される。表面上，最大期待支払が選択されるべきであるという規準からすれば根拠のある疑問ではないかも知れない。しかし金額に対する効用が金額の量によっては測定できないとすれば，その様な戦略を棄却してもよいと考えられる。このことは本質的には正しくない。たとえ支払が意思決定者の効用あるいは満足で測定されるとしても，最大期待支払をもつ戦略を選択するより他に合理的な決定規準をもたないからである。

いずれにしても，危険の下での意思決定は確率の変動によって，期待支払に幅がある。幅のあることが危険の原因となっている。危険の回避は保険によって可能であることは先述したが，戦略的意思決定の危険を保険にかけることはできない。その意味で上の問題は保険の不能な危険ということができる。

<不確実性の下での意思決定>

一般的な決定問題は三つのクラスすなわち，1)　状態の事前確率をもたない場合，2)　状態の事前確率をもつ場合，3)　状態の事後確率をもつ場合に分けて考えられるがここでは事前確率をもたないときの決定について考察する。

この種の意思決定問題は，状態についてのいかなる確率も無視することによって特徴づけられる。この様な状況は現実では稀であるけれども，これまで多くの決定規準が提案されてきた。

最大最小または最小最大規準

各々の行動に関する最小の利得を調べ，次に最小の利得を最大にする行動をとる，と

Wald は提案する。これは最悪の結果に注意を向け，その最悪の結果を出来るだけ望ましいようにする悲観的な規準である。これを最大最小規準という。もし行動の結果が損失で記述されていれば，最大の損失を最小にするような行動で，これは最小最大といわれる。

この規準の疑問は次の例によって示すことができる。

状態＼行動	a_1	a_2
N_1	5	10
N_2	8	2
最小利得	5	2
最大最小	5	

	a_1	a_2
N_1	5	10
N_2	13	7
最小利得	5	7
最大最小		7

この例では，最大最小行動は，5 が最小 (5, 2) の最大であるから，a_1 である。いま状態 N_2 に対する利得を計算する場合，誤りを犯したことに，決定者が気付いたとする。修正の結果，状態 N_2 の各行動に 5 単位の効用が付加されたとき，上の表は次の様に変更される。この場合の最大最小行動は a_2 である。この誤りは各行動に同じ効果を及ぼすから，意思決定者の行動を全く変えてしまうということは驚きである。各行動に誤った計算をすることが決定者の気持を変えてしまうことを我々は期待しなかったはずである。このことから最大最小規準は行の一次性という性質をもたないといえる。

最小最大リグレット

Savage は最大最小規準の修正として，利得表をリグレット（後悔）表に変換することを提示した。これには最小最大規準を適用する。いま決定者がある行動をとり，状態がこの行動の利得を最大にするなら，彼は後悔しないであろう。しかし，もし利得が最大でない行動をとり，それと同じ状態が起るなら，最大利得と受けとる利得との差のリグレットをもつ。最小最大リグレット規準の例として，次の利得表があるとする。

	a_1	a_2	a_3	a_4	最大利得
N_1	0	4	8	20	20
N_2	30	26	18	0	30

上の利得表からリグレット表が作られる。

	a_1	a_2	a_3	a_4
N_1	$20-0=20$	$20-4=16$	$20-8=12$	$20-20=0$
N_2	$30-30=0$	$30-26=4$	$30-18=12$	$30-0=30$
最　大	20	16	12	30
最小最大			12	

この規準も前の最大最小規準で起った行の一次性の性質をもたないばかりか，不適当

な代替案の独立性という性質を犯している。上の例から考えると，行動 a_3 が最小最大リグレット行動である。いま a_4 が意思決定者にとって不適当であるとしよう。（a_4 をあきらめると考えてもよい。）その場合，リグレット表を新しいものに作り変える（第1行第3列が0になる）。新しいリグレット表は次の様になる。

	a_1	a_2	a_3
N_1	8	4	0
N_2	0	4	12
最　大	8	4	12
最小最大		4	

この場合，行動 a_2 が最小最大リグレット行動であり，この規準を適用する場合，a_4 という行動は不適当な代替案ではないことが判るのである。すなわち行動 a_4 をあきらめた結果とるべき行動に変化をもたらしたということである。

さらに，効用の差を作るということは，りんごがみかんのおいしさの半分であるということと同じ位に無意味である。従って効用における差は，金額の利得における差と同じ意味で，リグレットを反映するとは思われないのである。

Hurwicz の指標

Hurwicz はある重みづけをした最大利得と最小利得の組み合わせを調べ，最も望ましい重みづけをした値をもつ行動をとるという提案をした。

この重みを α 指標といい，$0<\alpha<1$ の値をとる。各行動に対して，利得の最小値を m_a，最大値を M_a とする。各行動についての指標 $\alpha m_a+(1-\alpha)M_a$ を計算し，全ての行動の中で最高の指標をもつものが選好される。もし結果が損失で示されていれば，最小の指標をもつ行動が選好される。

次に示す利得表について α の値を求めることができたとする。

	a_1	a_2
N_1	0	x
N_2	1	x

x の値がどの様なとき，行動 a_1 と a_2 が無差別になるか。x が $\frac{1}{3}$ であるとすると，a_1 と a_2 とは無差別であるから，多分 α は，

$$\alpha(0)+(1-\alpha)1=\alpha(\tfrac{1}{3})+(1-\alpha)\tfrac{1}{3},\quad \alpha=\tfrac{2}{3}$$

から求められる。しかしこれまで厳密に上のことがらを示した例はない。Hurwicz の規準はある種の好運を得るという考えに基づいた楽観主義的なものである。

この規準の難点は，最大最小の場合と同様行の一次性の性質をもたない。$\alpha=\frac{3}{4}$ として次の利得表を考える。

	a_1	a_2
N_1	5	10
N_2	8	2
	$(\frac{3}{4})5+(\frac{1}{4})8$	$(\frac{3}{4})2+(\frac{1}{4})10$
α 指標	$5\frac{3}{4}$	4

	a_1	a_2
N_1	5	10
N_2	13	7
	$(\frac{3}{4})5+(\frac{1}{4})13$	$(\frac{3}{4})7+(\frac{1}{4})10$
α 指標	7	$7\frac{3}{4}$

この場合，明らかに行動 a_1 が選択される。いま N_2 の各行動に5を加えて同様の計算をする。
a_2 が選択され，行の一次性の性質が保持されない。さらに Hurwicz の規準は凸性という性質ももたない。凸性は，等しい行動の確率的な組合せによっては選択された行動を変えないということを意味する。

上の例では，α の指標が同じであるから，a_1 と a_2 は無差別である。ここで最適な行動を決定するために硬貨投げのルールをとり入れる。その場合，a_1 も a_2 も1/2で選択される。各状態に対する a_1 と a_2 の利得の平均と等しい利得をもつ新しい行動 a_3 を作ることになる。

	a_1	a_2
N_1	0	1
N_2	1	0
N_3	0	0

	a_1	a_2	a_3
N_1	0	1	$\frac{1}{2}$
N_2	1	0	$\frac{1}{2}$
N_3	0	0	0

$\alpha=\frac{3}{8}$とすると，α の指標は a_1 も a_2 も$\frac{5}{8}$であるのに対して，a_3 の指標は$\frac{1}{2}$となり，a_1, a_2 のどちらよりも小さい指標をもつことになる。これは無差別であるという事実に反するから，二つまたはそれ以上の最適行動の確率的な組合せによってできる新しい行動は最適ではない。従って，凸性という性質が犯されるのである。

Laplace の規準

我々が状態の生起について全く無知であれば，各状態が全て等しい確率で生起するものと考える。各行動に対する期待利得を計算し，最大の期待利得をもつ行動をとればよい。従って，状態に関して一様確率密度関数をもつ様な問題を取扱えばよいことになる。しかし，この規準は二つの点で困難さを伴う。一つは，状態が互いに排反であることと，状態の完全なリストを必要とする。他は，行の重複性をもたないことである。前者の意味は明らかである。後者は，二つまたはそれ以上の状態が同じ利得をもち，かつそれらを一つにまとめるなら，最適行動は初めの問題とは別のものになるということを意味する。

	a_1	a_2
N_1	6	0
N_2	2	5
N_3	2	5
N_4	2	5

状態の生起確率が全て等しいから，a_1 の期待利得は $(\frac{6}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=3)$，$a_2$ のそれは $(\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=3\frac{3}{4})$ になる。この例で，重複しているものをまとめると次表になる。

	a_1	a_2
N_1	6	0
N_2'	2	5

確率については N_1 の場合が$\frac{1}{4}$，N_2' が$\frac{3}{4}$であるから期待利得は，a_1 が$(\frac{6}{4}+\frac{6}{4}=3)$，$a_2$ が$(\frac{15}{4}=3\frac{3}{4})$ で前の場合と同じである。すなわち最適行動は a_2 である。しかし，この規準の定義からすれば，N_1 と N_2' は共に等確率であるべきで，従って，各状態は$\frac{1}{2}$の確率で生起するなら，期待利得は a_1 が 4，a_2 が$2\frac{1}{2}$となり a_1 が最適行動になる。二つの中のどちらが，最初の問題と同じであるかは明らかではない。前者は，状態について無知ではないことを意味し，無知であれば等確率を割当てるのであるから，後者が最初の問題と同一であるに違いない。この意味で行の

重複性が重要になってくる。Laplace の規準は，しかし，行の一次性，凸性，不適当な代替案の独立性などの性質を満している。

＜主観的確率との関連＞

不確実性の下での意思決定問題は，少なくとも主観的確率を含んだものとして考えられる。これは個人の経験や情報に基づく確率である。上で議論したそれぞれの規準は，主観的確率によって計算された期待値を最大にすることと等値である。従って，我々が主観的確率を認めれば，単に期待値を最大にする規準を考えればよいことになる。換言すると，決定問題は，行動の集合，状態の集合，主観的確率（または確率分布），効用関数の四つによって記述される。事前的確率をもたない場合でも結論的には主観的確率によって欠点のない規準を作り出すことができる。

参 考 文 献

1) R. D. Luce and H. Raiffa, Games and Decisions, 1958, John Wiley
2) J. T. S. Porterfield, Investment Decisions and Capital Costs, 1965, Prentice-Hall
3) L. J. Savage, The Foundations of Statistics, 1954, John Wiley
4) R. J. Thierauf and R. C. Klekamp, Decision Makig Through Operations Research, 1970, John Wiley

Risk and Uncertainty in the Decision Making

By MINORU HAMAZAKI

We are always confronted with the decision making problem under uncertainty. This paper presents mainly the decision criteria with no prior probability on the states, but in conclusion each of the criteria is shown to be equivalent to expressing a subjective probability over the states.