

磁界中陽光柱の履歴現象

岩佐 昌征, 佐藤 弘
信州大学繊維学部一般電気工学講座

松本 道男
山梨大学工学部

1 まえがき

陽光柱プラズマの管軸方向に均一な磁界 B を加えると、軸方向の平均電界 E_{z0} は磁界の増加に伴って減少する¹⁾。このことは、管壁方向への荷電粒子の拡散が磁界の増加に伴って減少することを意味している²⁾。さらに磁界が増加してある臨界磁界 B_c に達すると、軸方向の平均電界すなわち荷電粒子の拡散は異常に増大し始める。この異常拡散現象は LEHNERT³⁾ によって発見され、以来その解明に多くの努力が注がれてきた^{4,5,6)}。

KADOMTSEV と NEDOSPASOV⁷⁾ は陽光柱プラズマに、密度変動によるらせん状 $m=1$ モード波動（以下、 $m=1$ 波動）が励起されたとき、その波動が成長するための条件を求めた。この解析は線形近似法によるものであるが、臨界磁界 B_c で電界 E_{z0} が増加することなど、 B_c 付近の現象をおおむね説明し得るものであった。

次いで、HOH⁸⁾ は $m=1$ 波動の励起による異常拡散現象の物理的機構を明らかにした。彼のモデルによれば、らせん状の密度変動がプラズマ中に生じると、磁界 B に対する右ネジの方向に変動電界 $E_{\theta 1}$ が生じる。この $E_{\theta 1}$ と B とは互いに垂直であるから、密度の高い内部の荷電粒子は $E_{\theta 1} \times B/B^2$ の速度で管壁に向かってドリフトする。この分、 $m=1$ 波動の励起によって、荷電粒子の拡散損失が増大することになる。

その後、 $m=1$ 波動に対し、より詳細な理論的、実験的な研究が続けられていくうちに、新たな問題が提起されてきた。たとえば、 $m=1$ 波動がある程度成長すると、それに伴って密度分布が線形近似による零次ベッセル関数 J_0 形と異なること⁶⁾、更に臨界磁界付近で、電界 E_{z0} と磁界 B との特性に履歴現象⁹⁾が観測されることなどである。

履歴現象に関する解析はこれまでも管壁付近にできる“イオンさや”に起因するとした¹⁰⁾、イオン温度にその原因を求めたもの¹¹⁾などの報告もなされているが、いずれも実験技術上の問題もあって検証はなされていない。

本報告では、変動密度が有限の振幅をもち、かつ、電子とイオン両らせん間に荷電分離が生じているものと仮定して、 $E_{z0}-B$ 特性を解析し、線形近似による結果と比較検討している。特に、履歴曲線と $m=1$ 波動の波長に与える密度変動の影響について検討する。

2 基礎方程式と非線形効果

十分に長い陽光柱プラズマが管軸方向に加えられた外部磁界 \mathbf{B} に平行に置かれている。この陽光柱プラズマは下記の条件を満たしているものとする。

- (1) 荷電粒子密度は中性粒子密度に比べて十分小さく、荷電粒子の平均自由行程は管半径 R に比べて十分小さい。
- (2) 荷電粒子の生成は電子密度 n_e に比例する。電離周波数 ξ は電子温度 T_e と中性粒子密度の関数である。
- (3) 累積電離および体積再結合は無視する。
- (4) 放電々流は十分弱く、従ってそれによる方位角方向磁界は外部磁界に比べて十分小さいものとする。
- (5) ゼラセン状 $m=1$ 波動の周波数 ω_r は荷電粒子と中性粒子との衝突周波数 ν_j に比べて十分小さい ($\omega_r \ll \nu_j$)。ここで、添字 j は荷電粒子の種類で、イオンは $j=i$ 、電子は $j=e$ と置く。
- (6) 巨視的速度は j 種粒子の熱速度に比べて小である。

このような条件のもとでは、圧力 P_j はスカラーで表され、また運動方程式の慣性項は無視し得るので、 j 種粒子に関する連続の式、運動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$-\frac{\partial}{\partial t} n_j + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_j = \xi n_e \quad (1)$$

$$\mathbf{\Gamma}_j + D_j \nabla n_j \pm \mu_j n_j \mathbf{E} \pm \mu_j \mathbf{\Gamma}_j \times \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

式中の符号“ \pm ”のうち上側は電子、下側はイオンに関するものである。 D_j は j 種粒子の拡散係数、 μ_j は移動度、 \mathbf{E} は電界 ($\mathbf{E} = -\nabla V$)。また、 n_j と $\mathbf{\Gamma}_j$ は j 種粒子の数密度と流れ密度でそれぞれ次式で定義される。

$$n_j(\mathbf{r}, t) = \int d^3v f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$\mathbf{\Gamma}_j(\mathbf{r}, t) = \int d^3v \mathbf{v} f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

ここで、 $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ は j 種粒子の分布関数である。解析にあたって、磁界 \mathbf{B} の方向を z 軸の正の方向とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いる。

いま、(2)式から流れ密度 $\mathbf{\Gamma}_j$ を求め、(1)式に代入すると、 j 種粒子に関する連続の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} n_j - \xi n_j + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left\{ \mp n_j \mu_{j\perp} (E_r \mp S_j E_\theta) - D_{j\perp} \frac{\partial}{\partial r} n_j \right\} \right] \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[D_{j\perp} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} n_j + \mu_{j\perp} n_j (S_j E_r \pm E_\theta) \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mp\mu_j n_j E_z - D_j \frac{\partial}{\partial z} n_j\right) = 0 \quad (3)$$

ここで,

$$\mu_{j\perp} = \frac{\mu_j}{1+S_j^2}, \quad D_{j\perp} = \frac{D_j}{1+S_j^2}, \quad S_j = \Omega_j \tau_j$$

Ω_j は j 種粒子のラーマー周波数, τ_j は j 種粒子と中性粒子との平均衝突時間である。

陽光柱内では, 定常状態のプラズマに $m=1$ 波動による変動量が重畳しているものと考え, 密度 n_j , 電位 V を次のように分離する。

$$\begin{aligned} n_j(r, t) &= n_{j0}(r) + n_{j1}(r, t) \\ V(r, t) &= V_0(r) + V_1(r, t) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, 添字 "0" は平均項を, 添字 "1" は変動項を, またベクトル r は座標 (r, θ, z) を示している。

変動密度 n_{j1} には, 次のようならせん形を仮定する。

$$n_{j1}(r, t) = \frac{1}{2} \left[N_{j1} J_1(\beta_1 r) \exp i(-\omega t + m\theta + k_z z) + C.C \right] \quad (5)$$

ここで, $C.C$ は共役複素数, $J_1(\beta_1 r)$ は一次ベッセル関数, ω は複素周波数 ($=\omega_r + i\omega_i$), k_z は z 方向の波数, i は虚数単位, m はモード数でこの場合 $m=1$ である。

また, $m=1$ 波動の振幅 N_{j1} は有限で, かつ電子, イオンのらせん間に荷電分離を仮定しているので, N_{j1} を次のように置く。

$$N_{j1} = |N_{j1}| \exp i\gamma_j \quad (6)$$

ここで, γ_j は電子およびイオン各らせんの適当な基準点からの位相を示している。変動電位 $V_1(r, t)$ は (5), (6) 式をもとにポアソンの式から導出した次式¹²⁾を用いる。

$$V_1(r, t) = \frac{1}{2} \left[4\pi e \frac{N_{j1} - N_{e1}}{\beta_1^2 + k_z^2} g(r) \exp i(-\omega t + m\theta + k_z z) + C.C \right] \quad (7)$$

ここで,

$$g(r) = J_1(\beta_1 r) - (\beta_1 R) J_0(\beta_1 R) K_1(k_z R) I_1(k_z r) \quad (8)$$

上式で, $I_1(k_z r)$ および $K_1(k_z R)$ は第一種および第二種の変形ベッセル関数, $(\beta_1 R)$ は J_1 関数の $r=0$ を除いた最小の零点, e は電子の電荷である。

次に, 履歴現象を解析する上で必要な密度, 電位の平均量と非線形項を求めておく。

陽光柱プラズマの平均量は軸対称でかつ z 軸方向に一様であるから, n_{j0} , E_{r0} などは θ および z 軸に対して独立である。従って, (3) 式に (5), (7) 式を代入し, その時間平均を求めると,

$$n_{j0}\xi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left\{ \pm \mu_{j\perp} (n_{j0} E_{r0} + \langle n_{j1} E_{r1} \rangle \mp S_j \langle n_{j1} E_{\theta 1} \rangle) + D_{j\perp} \frac{\partial}{\partial r} n_{j0} \right\} \right] = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\langle \# \rangle$ は時間平均を示す。

観測によれば、らせん状 $m=1$ モード波動の振幅は $m=2, 3, \dots$ モード波動に比べて十分大きいので、第一次近似として $m=1$ 波動のみが存在するものとすれば、非線形項 $\langle n_{j1} E_{r1} \rangle$ は (5), (7) 式より各成分ごとに次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle n_{j1} E_{r1} \rangle &= -\frac{2\pi e}{\beta_1^2 + k_z^2} \frac{\partial g(r)}{\partial r} J_1(\beta_1 r) R_e(N_{j1}^* \sigma) \\ \langle n_{j1} E_{\theta 1} \rangle &= \frac{2\pi e}{\beta_1^2 + k_z^2} \frac{g J_1}{r} I_m(N_{j1}^* \sigma) \\ \langle n_{j1} E_{z1} \rangle &= \frac{2\pi e}{\beta_1^2 + k_z^2} k_z g(r) J_1(\beta_1 r) I_m(N_{j1}^* \sigma) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\sigma = N_{i1} - N_{e1}$ 、 N_{j1}^* は N_{j1} の共役複素数、 $R_e(N_{j1}^* \sigma)$ 、 $I_m(N_{j1}^* \sigma)$ はそれぞれ $(N_{j1}^* \sigma)$ の実数部と虚数部である。

(10) 式は $m=1$ 波動が励起されたことによる非線形項である。

陽光柱プラズマの平均密度は中性状態にあるので、 $n_{e0} = n_{i0} \equiv n_0(r)$ とおき、(9) 式の電子、イオンに関する両式から $(n_0 E_{r0})$ を消去し、さらに (10) 式を用いると、密度分布 $h_0(r) = n_0(r)/n_0(r=0)$ に関する非斉次二階微分方程式が得られる。その詳細は文献 (13) にゆずり、履歴現象の解析に必要な結果のみを示すとどめる。すなわち、密度分布 $h_0(r)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h_0(r) &= J_0(\beta_0 r) + \frac{\pi}{2} \varphi \beta_0 Y_0(\beta_0 r) \int_0^r J_1^2(\beta_1 r) g(r) dr \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \varphi \beta_0 J_0(\beta_0 r) \int_0^r J_1(\beta_1 r) g(r) Y_1(\beta_1 r) dr \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $Y_0(\beta_0 r)$ 、 $Y_1(\beta_1 r)$ は第二種零次および一次のベッセル関数、 β_0 は次式で定義されている。

$$\beta_0^2 = \frac{1 + S_i S_e \xi}{D_a}, \quad D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \quad (12)$$

また、パラメータ φ は

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{S_e}{(\beta_1 R)^2} \left(\frac{R}{\lambda_D} \right)^2 \left(\frac{|N_{i1}|}{N_0} \right)^2 \sin \gamma \quad (13)$$

ここで、 λ_D はデバイ長である。

電界の径方向分布 $E_{ro}(r)$ は(9)式から ξ を消去することによって、次のようになる。

$$E_{ro}(r) = -\frac{D_{e\perp} - D_{i\perp}}{\mu_{e\perp} + \mu_{i\perp}} \frac{\partial \ln h_0}{\partial r} - \varphi \left[\frac{T_e}{1 + S_i S_e} \frac{1}{h_0} \frac{J_1 g}{r} + \frac{T_e}{S_e} \tan^{-1} \frac{\gamma}{2} \frac{J_1}{h_0} \frac{\partial g}{\partial r} \right] \quad (13)$$

(11), (13)式で、 $\varphi = 0$ のときは古典拡散領域における $h_0(r)$, $E_{ro}(r)$ を示す。また、 $\varphi > 0$ のときは $m=1$ 波動の励起領域における、 $h_0(r)$, $E_{ro}(r)$ を示し、非線形効果のため管中心より密度および電位の高い部分が現れることになる。

3 $m=1$ 波動の励起条件

$m=1$ 波動の励起条件を求めるために必要な変動成分に関する運動方程式と連続の式は(2), (1)式から次のように表される。

$$\mathbf{\Gamma}_{j1} + D_j \nabla n_{j1} \pm \mu_j (n_0 \mathbf{E}_1 + n_{j1} \mathbf{E}_0) \pm \mu_j \mathbf{\Gamma}_{j1} \times \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{j1} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_{j1} - \xi n_{e1} = 0 \quad (15)$$

また、電子、イオンに関する(15)式から、

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{i1} - n_{e1}) + \nabla \cdot (\mathbf{\Gamma}_{i1} - \mathbf{\Gamma}_{e1}) = 0 \quad (16)$$

前述と同様、(14)式から $\mathbf{\Gamma}_{j1}$ を求め(15)式に代入すると、 j 種粒子に関する連続の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left\{ -D_{j\perp} \frac{\partial}{\partial r} n_{j1} \mp \mu_{j\perp} (n_{j1} E_{ro} + n_0 E_{r1} \pm S_j n_0 E_{\theta 1}) \right\} \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-D_{j\perp} \frac{\partial}{\partial \theta} n_{j1} + \mu_{j\perp} (\mp n_0 E_{\theta 1} - S_j n_{j1} E_{ro} - S_j n_0 E_{r1}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[-D_j \frac{\partial}{\partial z} n_{j1} \mp \mu_j (n_{j1} E_{z0} + n_0 E_{z1}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial t} n_{j1} - \xi n_{e1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

さて、(17)式にらせん状変動(5), (7)式を、また両極性電界 E_{ro} に(13)式をそれぞれ代入すると、電子 ($j=e$) に関する連続の式は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\left\{ X^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) - iS_e v^* X \right\} J_1 - \frac{1}{1+y} \left\{ \frac{1}{h_0^2} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2 J_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial J_1}{\partial x} - i \frac{S_e J_1}{x h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right\} \right] N_{e1} + \varphi \left[\frac{1}{1+y} \left(\frac{\partial}{\partial x} g J_1 \right) \frac{J_1}{x h_0} \right. \\
& - \frac{1}{1+y} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{g}{x} \frac{J_1}{h_0} \right) - \frac{H}{S_e} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{J_1^2}{h_0} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\
& \left. - i \left\{ \frac{H J_0^2}{x h_0} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{S_e}{1+y} \left(\frac{g J_1}{x^2 h_0} \right) + \frac{R^2}{D_{e\perp}} \omega J_1 \right\} \right] N_{e1} \\
& - \frac{(R/\lambda_D)^2}{\lambda_1^2} g h_0 \left\{ X^2 - \frac{J_1}{g} \lambda_1^2 - \frac{1}{g h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{S_e}{x h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right\} \sigma \quad (18)
\end{aligned}$$

ここで、 $r/R=x$ 、 $v^*=eRE_{z0}/kT_e$ 、 $X=(k_z R)S_e$ 、 $y=S_i S_e$ 、 $H=\tan^{-1}\gamma/2$ 、 $\sigma=N_{i1}-N_{e1}$ で、 N_{j1} および φ はそれぞれ(6)、(13)式で定義されている。また、 $\lambda_1=3.832$ は J_1 関数の最初の零点、 $\lambda_0=(\beta_0 R)$ は密度分布(11)式の $h_0(x=1)=0$ を満足する根、 $k=1.38 \times 10^{-16} \text{erg}/^\circ K$ はボルツマン定数である。

同様に、(16)式は(17)式の電子およびイオンの式から次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{1+y} \left[\left\{ (1+y\delta)X^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) - iS_e(1+y\delta)v^*X \right\} J_1 \right. \\
& \left. - \left\{ \frac{J_1}{h_0^2} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial J_1}{\partial x} - \frac{S_e}{1+y} \frac{J_1}{x h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right\} \right] N_{e1} \\
& - \frac{\varphi}{1+y\delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (g J_1) \frac{J_1}{x h_0} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g J_1^2}{h_0} \right) - \frac{H}{S_e} (1+y) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial g}{\partial x} \frac{J_1^2}{h_0} \right) \right. \\
& \left. + i \left\{ H \frac{J_1^2}{x h_0} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{S_e}{1+y} \frac{g J_1}{x^2 h_0} \right\} \right] N_{e1} \\
& - \frac{(R/\lambda_D)^2}{\lambda_1^2} \left[\frac{1+y}{1+y\delta} \left(\lambda_1^2 h_0 J_1 - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) - g h_0 X^2 + i \frac{S_e}{1+y\delta} \frac{g}{x} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right] \sigma \quad (19)
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta=\mu_i/\mu_e$ である。

(18)、(19)両式に $xJ_1(\lambda_1 x)$ を乗じ $x=0$ から $x=1$ まで積分する⁷⁾。その結果は N_{e1} と σ に関する同次方程式であるから、その係数からなる行列式は零でなければならない。故に行列式の計算結果を実数部と虚数部に分離するとそれぞれ次のようになる。すなわち、

実数部は

$$\omega_i' \left(X^2 + \frac{1+y}{1+y\delta} a_7 \right) + \frac{S_e}{1+y\delta} a_8 \omega_r'$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1+y\delta} \left[\varepsilon(\lambda_1^2 - \lambda_0^2) + \frac{a_1}{1+y} + a_7 - \varphi \frac{a_3 - a_4}{1+y} \right] X^2 \\
& - \frac{1+y}{1+y\delta} y a_8 v^* X + \frac{y}{1+y\delta} (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) a_7 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

また、虚数部は

$$\begin{aligned}
& S_e \delta v^* X^3 - \left(X^2 - \frac{1+y}{1+y\delta} a_7 \right) \omega_r' + \frac{S_e}{1+y\delta} a_8 \omega_i' \\
& + \frac{y\delta}{1+y\delta} S_e \left(\frac{a_2}{1+y} - a_8 - \frac{a_5}{1+y} \varphi \right) X^2 - \frac{y S_e}{1+y\delta} a_7 v^* X \\
& + \frac{y S_e}{1+y\delta} (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) a_8 + \frac{y S_e}{(1+y)(1+y\delta)} (a_1 a_8 + a_2 a_7) \\
& + \frac{y}{1+y\delta} \varphi \left\{ \frac{S_e}{1+y} a_5 a_7 + \frac{S_e}{1+y} (a_3 - a_4) a_8 \right\} = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、

$$\varepsilon = \frac{T_i}{T_e}, \quad \omega_r' = \frac{R^2}{D_{e\perp}} \omega_r, \quad \omega_i' = \frac{R^2}{D_{e\perp}} \omega_i$$

また、 $a_1 \sim a_8$ はパラメータ φ によって決まる積分値でそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{W} \int_0^1 \left\{ \frac{x J_1}{h_0^2} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{x J_1}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial J_1}{\partial x} \right\} dx \\
a_2 &= \frac{1}{W} \int_0^1 \frac{J_1^2}{h_0^2} \frac{\partial h_0}{\partial x} dx \\
a_3 &= \frac{1}{W} \int_0^1 \frac{J_1^2}{h_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} g J_1 \right) dx \\
a_4 &= \frac{1}{W} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g J_1^2}{h_0} \right) dx \\
a_5 &= \frac{1}{W} \int_0^1 \frac{g}{x} \frac{J_1^3}{h_0} dx \\
a_6 &= \frac{1}{W} \int_0^1 g J_1 h_0 x dx \\
a_7 &= \frac{1}{W} \frac{1}{a_6} \int_0^1 \left(\lambda_1^2 J_1 h_0 - \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \right) x J_1 dx \\
a_8 &= \frac{1}{W} \frac{1}{a_7} \int_0^1 \frac{\partial h_0}{\partial x} g J_1 dx
\end{aligned}$$

$$W = \int_0^1 J_1^2 x dx$$

さて、 $m=1$ 波動は $I_m(\omega) > 0$ のとき成長する (5) 式参照)。この条件は (20), (21) 式から ω_r' を消去することによって次のようになる。

$$y a_8 v^* \left(\frac{1}{\delta} a_7 + X^2 \right) X \geq EX^4 + FX^2 + G \quad (22)$$

ただし、

$$E = (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) \varepsilon + a_7 + \frac{1}{1+y} (a_1 + a_3 - a_4)$$

$$F = \left(1 + \frac{1+y}{1+y\delta} \right) (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) a_7$$

$$+ \frac{1}{1+y\delta} \left\{ a_1 a_7 + (1+y) a_7^2 - \varphi a_7 (a_3 - a_4) \right\}$$

$$+ \frac{1}{1+y\delta} \left(\frac{1}{1+y} a_2 a_8 - a_8^2 - \frac{1}{1+y} a_8 a_7 \varphi \right)$$

$$G = \frac{1+y}{1+y\delta} (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) a_7^2 + \frac{y}{\delta} \frac{a_1 a_7 + a_2 a_7}{(1+y)(1+y\delta)} a_8$$

$$- \frac{a_8 S_e}{1+y\delta} \left\{ \frac{S_e}{1+y} a_8 a_7 + \frac{a_1 a_8}{1+y} (a_3 - a_4) \right\} \varphi$$

(22) 式の等号は $m=1$ 波動の励起条件の臨界値を示しているが、同式中には φ , v^* および波数に關与する X が含まれている。そこで、(22) 式を X で微分し、その結果を (22) 式に代入して v^* を消去すると、

$$\left(\frac{a_7}{\delta} + 3X^2 \right) (EX^4 + FX^2 + G) - 2X^2 (2EX^2 + G) \left(\frac{a_7}{\delta} + X^2 \right) = 0 \quad (23)$$

を得る。

上式から、 φ を指定したとき、 y の関数として波数 $X = X_0$ を求めることができる。これは励起条件を満す $m=1$ 波動の波数 k_z を示している。この X_0 を (22) 式に代入することによって、 v^* が y と φ の関数として与えられる。従って、軸方向平均電界 E_z と磁界 B との関係を特定するためには別の $v^*(y, \varphi)$ が必要となる。そこで、LEHN-ERT による古典拡散理論を $m=1$ 波動領域に拡張する。

4 $E_{z0} - B$ 特性と履歴現象

電子が単位時間当り軸方向電界 E_{z0} から得るエネルギー利得は

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_e = -ev_{ez0}E_{z0} \quad (24)$$

ここで、 Q は電子1個当りのエネルギー利得、 v_{ez0} は電子の軸方向平均速度である。 v_{ez0} を求めるため、軸方向の流れ密度 $\Gamma_{ez0}(x)$ を次のように定義する。

$$\Gamma_{ez0}(x) = -\mu_e(n_0E_{z0} + \langle n_1E_{z1} \rangle) \equiv n_0v_{ez0} \quad (25)$$

上式の非線形項 $\langle n_1E_{z1} \rangle$ に(10)式を代入すると、 v_{ez0} は次式で表される。

$$v_{ez0} = -\mu_e \left(1 + \frac{\varphi}{v^*} \frac{X_0}{S_e^2} \frac{gJ_1}{h_0}\right) E_{z0} \quad (26)$$

ここで、 v^* は負であるから、上式は $m=1$ 波動の励起によって、電子の移動度が小さくなることを示している。これらの結果から、電子のエネルギー利得(24)式は次のようになる。

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_e = -\mu_e \left(1 + \frac{\varphi}{v^*} \frac{X_0}{S_e^2} C_b\right) E_{z0}^2 \quad (27)$$

ここで、

$$C_b = 2 \int_0^1 \frac{g(x) J_1(\lambda_1 x)}{h_0(x)} x dx \quad (28)$$

他方、電子と中性粒子との衝突によって、電子が失うエネルギー $-(dQ/dt)_{coll.}$ は次式で与えられている¹⁾。

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{coll.} = \frac{2m_e K_e}{\sqrt{\pi} \lambda_e} \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

ここで、 K_e は電子が中性粒子との衝突によって失うエネルギーの割合、 λ_e は電子の平均自由行程、 m_e は電子の質量である。

陽光柱プラズマの定常状態では、拡散による管壁への粒子エネルギー損失は電離によって補われていると考えられるから、 $(dQ/dt)_e$ と $(dQ/dt)_{coll.}$ とを等しいと置くことができる。従って、軸方向電界 E_{z0} は(27)式と(29)式から、

$$E_{z0} = \left(\frac{64}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{273}{T_n} P\right) V_d \left(\frac{k_e^{1/2}}{A_{eo} x_e}\right) \left(1 + \frac{\varphi}{v^*} \frac{X_0}{S_e^2} C_b\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

となる。ここで、 T_n は中性粒子の温度、 $x_e = eV_d/kT_e$ 、 $V_d = 24.54(V)$ は H_e の電離電圧、 $A_{e0} = (273/T_n)\lambda_e P$ 。

(30)式で $\varphi = 0$ と置くと、LEHNERT によって導びかれた古典拡散領域における軸方向電界を示す。

ところで、(30)式には λ_e 、 k_e および x_e が含まれ、これらはいずれも電子温度の関数であるから、 T_e を φ と $y = S_i S_e$ の関数として求めなければならない。

ENGEL と STEENBECK は電離周波数 ξ の一般式として次式を与えている。

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{e} \right)^{\frac{1}{2}} a \frac{273}{T_n} P(eV_d)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{x_e} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{2x_e} \right) e^{-x_e} \quad (31)$$

ここで、 a は電離能率曲線の初期勾配で、 H_e の場合 $a = 3.47 \times 10^{-12}$ Amp·sec⁵/g²cm² である。

他方、 $m = 1$ 波動が励起されたときの電離周波数 ξ は (12) 式から

$$\xi = \frac{\beta_0^2 D_a}{1 + S_i S_e} \quad (32)$$

で与えられるから、(31)式と(32)式を等置し、 $x_i = \text{一定}$ とすると、 x_e と y との関係が得られる。

$$G(x_e) = A \frac{x_i^{\frac{1}{2}}}{\lambda_i P(1 + x_i/x_e)} \left\{ 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{x_i}{x_e} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} (RP)^2 (1 + y) \quad (33)$$

ここで、

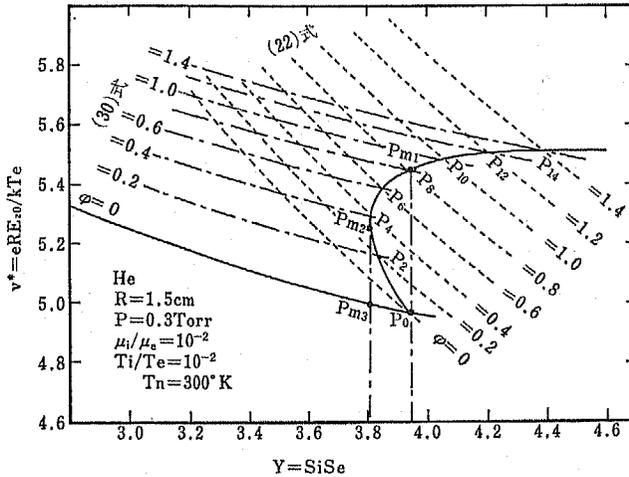
$$G(x_e) = \frac{x_e^{\frac{3}{2}} e^{x_e}}{2 + x_e} (\beta_0 R)^2 \quad (34)$$

$$A = 2 \left(\frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} a \frac{273}{T_n} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} V_d$$

λ_j は j 種粒子の平均自由行程、 $x_j = eV_d/kT_j$ 、 m_j は j 種粒子の質量である。

以上の結果をもとに $v^* - y$ すなわち $E_{z0} - B$ 曲線を求めるには次の手続きによる。

- (1) パラメータ φ を与えると(23)式から、 $X = X_0$ と y との関係が得られる。
- (2) その X_0 を(22)式に代入すると、 φ に対する $v^* - y$ 曲線が得られる。その結果を第1図に点線 (……) で示した。
- (3) φ すなわち $(\beta_0 R)$ をパラメータとして(34)式から $G_e(x_e) - x_e$ 曲線を描く。一方、(33)式から y をパラメータとして $G_e(x_e) - x_e$ 曲線を描く。従って、両式の交点は φ をパラメータとしたときの x_e と y すなわち、電子温度 T_e と磁界 B との関係を示すことになる。
- (4) 電子エネルギー損失の割合 k_e は x_e の関数であるから、(30)式から得られる $v^* = eRE_{z0}/kT_e$ は y と φ の関数として与えられることになる。その結果を第1



第1図 $v^*-S_i S_e$ 特性と履歴曲線

図に鎖線で示した。

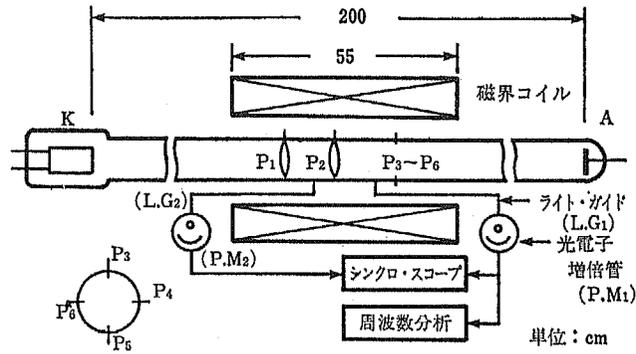
上記(2), (4)で得られた v^*-y 曲線の交点 (P_0, P_2, P_4, \dots) が $m=1$ 波動領域における $E_{z0}-B$ 特性曲線 (履歴曲線) に対応する。すなわち, $m=1$ 波動の振幅が有限であることによって生じる履歴現象は主要次のように説明される。磁界 B を増すと, v^* は古典拡散 ($\phi=0$) の曲線に従って小さくなり, P_0 点で $m=1$ 波動が励起され, その波動を維持するために v^* は P_{m1} 点まで増大しなければならない。他方, 磁界を減じると, v^* は P_3, P_5, P_4 点を通し, P_{m2} 点で $m=1$ 波動の励起条件がくずれ, v^* は P_{m3} まで降下して $m=1$ 波動は消滅する。従って, P_0, P_{m1}, P_{m2} および P_{m3} によって囲まれた部分が $E_{z0}-B$ 特性の履歴曲線に対応することになる。

5 実験結果と検討

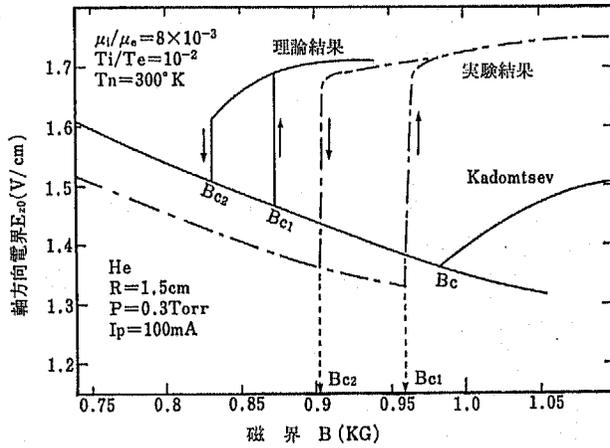
実験装置の概要を第2図に示す。放電管は管半径 $R=1.5\text{cm}$, 長さ $L=200\text{cm}$ の熱陰極形である。放電管は軸方向磁界 B と平行に置かれている。各測定探針は大略第2図のように配置されている。図中, P_1, P_2 は軸方向平均電界 E_{z0} の測定用リング状電極で, 浮動状態に置かれた $X-Y$ レコーダに接続されている。 $P_3 \sim P_6$ は波形観測用の壁探針で, これらは放電管の同一断面にそれぞれ $\pi/2$ (rad) 間隔で壁面に垂直に挿入されている。 $L.G_1, L.G_2$ は軸方向に可動なライトガイドで, プラズマからの光変動を検出するために用いられる。 $m=1$ 波動の波長は $L.G_1$ と $L.G_2$ 間の位相差を測定することによって得られる。

使用気体はヘリウム (He) で, 実験は封入気圧 $P = (0.2 \sim 1.0)$ Torr, 放電々流 $I_p = (50 \sim 200)$ mA の範囲で行われた。

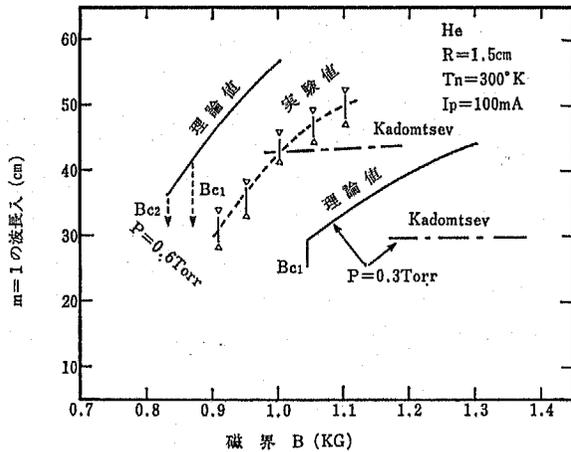
次に, 実験結果を示し, 解析結果との比較について述べる。



第2図 実験装置



第3図 $E_{z0}-B$ 特性の履歴現象



第4図 $m=1$ モード波長の波長

軸方向電界 E_{z0} と磁界 B との特性を $P=0.3\text{Torr}$ の場合について第3図に示す。解析曲線は4節の方法に基づいて求めた。参考のため KADMTSEV の線形近似理論の結果をも示した。図中、 B_{c1} は $m=1$ 波動が励起される臨界磁界、 B_{c2} は $m=1$ 波動が維持され得る限界の磁界で、 $B_{c1} > B_{c2}$ である。解析結果からみると、履歴曲線がみられる封入気圧は $P=0.6\text{Torr}$ 以下で、封入気圧が高くなると、 B_{c1} における E_{z0} の立ち上りは緩やかになり線形近似理論の結果と類似してくる。

これらの傾向は実験結果と一致する。

第4図に、 $m=1$ 波動の波長 λ と磁界 B との関係を示す。図示されたように、本解析結果は参考に掲げた線形近似理論と明らかに異なり、実験結果の傾向とかなりよく一致する。しかし、封入気圧が高くなると、本解析結果は線形近似によるそれに近い値になる。たとえば、 $P=1.0\text{Torr}$ の場合、本解析結果では $B_c=1.44\text{KG}$ と $B=1.53\text{KG}$ における波長はそれぞれ $\lambda_c=23.4\text{cm}$ 、 $\lambda=30\text{cm}$ となる。ここでは λ_c は B_c における $m=1$ 波動の波長である。一方、KADMTSEV 理論では $B_c=1.57\text{KG}$ の場合 $\lambda_c=26\text{cm}$ で磁界依存性はみられないものの本解析結果とおおむね同じ値になる。

このように、気圧の高い領域で両解析結果が比較的近い値を示すのは大要次の理由によるものと考えられる。すなわち、 $m=1$ 波動が密度の局所的な歪みに起因すると考えるならば、封入気圧が高く、衝突周波数が高くなると、密度の歪みもできにくくなり、 $m=1$ 波動の成長は妨げられる。従って、非線形効果は小さく、密度分布も線形近似による J_0 関数形に近いものと考えられる。履歴現象が気圧の高い領域で観測されないのも同様の理由であらう。

以上のように、らせん状 $m=1$ モード不安定性に有限振幅の密度変動と荷電分離による非線形効果を考慮した解析結果は実験的な特徴をかなりよくとらえているものの、第3図、第4図にみられるようになお大きな差異が認められる。解析的にみれば、イオン温度¹⁴⁾、管壁付近に生ずる“イオンさや”の影響をも考慮する必要がある。また、実験的には、磁界コイルが短かいために臨界磁界 B_c をある程度越えると、 $m=1$ 波動のほか、 $m=2, 3, \dots$ モードおよび低周波波動が励起されやすく、それらの相互作用^{15,16)}に関する観測も必要と考える。

参 考 文 献

- (1) BICKERTON, R. J. & von ENGEL, A.: Proc. Phys. Soc. B., **69**, 468 (1956)
- (2) 八田吉典: 気体放電, 137 (1979) 近代科学社
- (3) LEHNERT, B.: Proc. of the 2nd Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy., **32**, 349 (1958) United Nation, Geneva.
- (4) BERNSTEIN, I. B., FRIEMAN, E. A., KULSRUD, R. M. & ROSENBLUTH, M. N.: Phys. Fluids, **3**, 136 (1960)
- (5) HOH, F. C.: Phys. Rev. Letter, **4**, 559 (1960)
- (6) PAULIKAS, G. C. & PYLE, R. V.: Phys. Fluids, **3**, 348 (1962)
- (7) KADOMTSEV, B. B. & NEDOSPASOV, A. V.: J. Nucl. Energy, Part C, **1**, 230

(1960)

- (8) HOH, F.C. : Phys. Fluids, 5, 22 (1962)
- (9) 上坂, 今津, 中野 : 電気学会論文誌, 84, 1811 (1964).
- (10) 今津, 矢野, 中野 : 電気学会論文誌, 85, 1439 (1965)
- (11) MARUYAMA, G., MATSUMOTO, M. & SATO, H. : Rep. of the Faculty of Engineering Yamanashi Univ., 28, 147 (1977)
- (12) MATSUMOTO, M. : J. Phys. Soc. Japan, 18, 572 (1963)
- (13) SATO, H., NAKANO, Y., IMAZU, S. & MARUYAMA, T. : Electrical Engineering in Japan, 90, 156 (1970)
- (14) FURUTANI, Y., ODA, Y., DEUTSCH, C. & GOMBERT, M.M. : Physical Review A 26, 2913 (1982).
- (15) ISHIKAWA, I, MATSUMOTO, M, & SUGANOMATA, S. : J. Phys. D: Appl. Phys. 17, 85 (1984)
- (16) SATO, H, IWASA, M & MATSUMOTO, M. : I. C. P. I. G-XVII (Budapest) 1-B49, 193 (1985)

Summary

Hysteresys Phenomena in a Magnetized Positive Columu.

Masayuki IWASA, Hiroshi SATO, Michio MATSUMOTO*

A long positive column lies in magnetic fields B parallel to its axis. The axial electric field E_{zo} shows some difference in magnitude between as increasing and then decreasing the fields B . This E_{zo} - B hysteresis is due to a degree of plasma turburence in the positive column.

The effect of turbulence is analyzed, under the assumptions that the densities of electrons and ions are perturbed independently and that the perturbed densities have finite amplitudes.

The present calculation gives a curve of the E_{zo} - B hysteresis in relatively good agreement with experimental results. The experiments are made by using the helium gas, of which pressure is less than 1.0 torr.

General electrical engineering, Fuculty of textile science and technology, Shinshu University.

* Faculty of engineering, Yamanashi University, Kofu.