不完全競争市場と価格

— feedback の立場から —

宮　坂　正　治*

Masaji MIYASAKA: Price under an Imperfectly Competitive Market; from the Point of View of Feedback

(1960年9月1日受理)

1 もんだい

われわれの経済生活が以前に比すれば，極めて複雑多岐であることは，日常経験するところである。従つて経営者が生産性向上，あるいは利潤の極大を目指してヨリ合理的な経営政策をとるべく種々の問題を考えるにしても，その解決には中々困難を感ずるであろうことは，容易に推察される。

ところが，他方，幸いにして科学の進歩も著しく，一般人が単に漠然と知つていることを，科学者は正確な観察によつて，正確に記述し，実際の困難な問題の解決に大きな曙光を与えてくれつつある。

しかしながら，科学の力も，いまの段階では限界があり，すべての事柄について確実な知識をもつことはできないと言えよう。さればこそ，理想と現実，目標と結果，あるいは予想と実際とは応々にして齟齬する場合の起るのをみるのである。

とくに，経済活動の場合には，経済現象の構造の複雑さ，それらが変動し易いこと，あるいはまた実験が不可能なことなどからして，経済科学あるいは経営科学は他の科学よりおくれ，不完全な知識で以てしか行わざるをえないことが多いように思われる。他の拙稿(1)で述べたように，こうした不完全な知識の存在を前提条件の一つとして考える経済の「場」を，現実の市場あるいは不完全競争市場 (imperfectly competitive market) と呼んできた。

かかる「場」でのわれわれの経済行動は，他の一般的行動と同じように，意識すると意識しないとにかかわらず，希望する目標と，実現された結果との間に生じた誤差をみて，その誤差の生じた原因を手にしうる，それに関連したすべての科学の力で以て修正し，同一のことを試み直し，次の場合には少しでもその誤差を少くし，そこにこうした誤差が存在する限り，何回も何回もその行為を繰り返して最後の目標に向つているように見受けられる。いわゆる「試行錯誤」(trial and error) の方法をとつてすべての経済活動をなしていると言えよう。

こうしたわれわれの経済行動は，電気工学における beedback の性質にきわめて類似しているように思われる。

そこで，本稿では，不完全競争市場を一つの feedback system として考え，この市場での企業者間の価格変化やその適応の仕方を明らかにしたり，この市場内での最適販売価格の予想をなす試みを述べてみたいと思う。

既に，feedback という用語は，経営学や経済学の分野に導入され，周知のように H. A. Simon, R. M. Goodwin や下村治氏(2)などの業績がものされている。それ故，殊更，電気工学

* 信州大学繊維学部工業経営学研究室

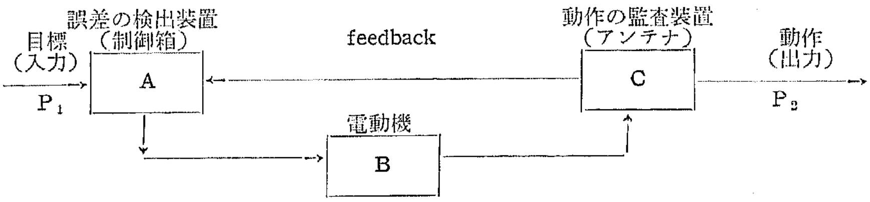

Fig. 1

上の feedback の性質を述べる必要はあるまいと思われるが，本稿を進めてゆく便宜から，ここで簡単に述べておきたいと思う。[3]

feedback の装置をもつた自動制御の機構を一般に servomechanism と呼んでおり，その一つの例をあげよう。

Fig. 1 に示されるように，ある制御箱Aに，ある目標が設定されると，それが電動機Bを動かしてアンテナCを回す。アンテナの実際の位置は，何かの抵抗のため，設定された目標とは違つているかもしれない。しかしその位置が，CからAに送りかえされて（=feedback されて)，アンテナの位置と，設定された目標の位置との間の誤差が，Aで検出される。そうすると一つの信号が電動機Bに送られて，その誤差を減少させる。この運動が振動的にくりかえされる度毎に，誤差は逓減され，最後には，アンテナの位置と，設定された目標の位置とが殆んど一致するようになるメカニズムである。ここに feedback 回路が，このメカニズムにおいて主演的な役割を演ずることが理解されよう。

数学的に，この feedback 回路の働きは，普通，次のように考えられている。

いま，装置の入力，出力，機械的変換係数をP_1，P_2，Kとし，また装置の出力のうち，誤差の修正のために送りかえされるもの（負の feedback）として使用される部分の割合を$-\lambda$とする。そうすると，電動機の入力をYとすれば，このYは，もとの入力P_1と，アンテナCの出力との差である。このCの出力は，電動機Bの電力出力KYのλ倍である。

したがつて

$$Y=P_1-(-\lambda)KY \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot1)$$

すなわち

$$Y=\frac{P_1}{1-(-\lambda)K} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot2)$$

故に，電動機の出力は

$$KY=\frac{KP_1}{1-(-\lambda)K} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3)$$

換言すれば，

$$P_2=P_1\left(\frac{K}{1-(-\lambda)K}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot4)$$

となる。

一般に，(1・4)式の負の feedback $(-\lambda)$ の値が大きければ大きい程，装置の誤差の減少，すなわち安定化が大きいと言われている。

以上のような電気工学における feedback の考え方は，寡聞のためか，いまだ不完全競争市

場の種々の問題の分野には導入されていないように見受けられる。そこで，以下貧しい考察ながら，まず，feedback の立場より市場構造の本質究明から述べてゆきたいと思う。

註(1) 拙稿「不完全競争市場と経営政策」(信州大学繊維学部研究報告．No. 5．1955年12月．PP. 167—177. ほか一連の不完全競争論を指す。

(2) H. A. Simon : On the Application of Servomechanism Theory in the Study of Production Control. (Econometrica. Vol. 20. No. 2. Apr.. 1952. PP.. 247—268.)

R. M. Goodwin : Econometrics in Business Cycle Analysis (A. H. Hansen ed.. Business Cycle and National Income. 1951. PP. 436—442.)

下村治「経済変動の乗数分析」1952. PP. 3—18.

(3) 電気工学上の feedback の以下の解説は次のものによる。

N. Wiener 著，池原止戈夫・弥永昌吉・室賀三郎共訳「サイバネティックス」1957. PP. 115—138.

C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff 著，森口繁一監訳「オペレーション・リサーチ入門(上)」1960. PP. 94—97.

2　価格変化と feedback

不完全競争市場の構造の形式的な内容とか類型については，既に他の稿[1]で種々論じてきた。この節では，これまでの論より更に一歩突込んで，各企業者間の価格変化によつて市場全体の仕組みとか動きがどのようになるかを，feedback の立場から，明らかにしてみたいと思う。

現実の社会は複雑である。「純粋経済学」で言う如く，経済現象のなかから，秩序とか法則を見出すのに，社会を構成している種々な要素から最も重要な経済的エレメントを抽出して考察するということも一つの方法であろう。しかしながら経済構造を組立ている種々の経済的エレメントのうち，どんなエレメントが現在の経済現象を動かしているのに重要なものかを規定するのに，非常な困難を感じ，大きな壁に突当るであろう。まして，将来の経済現象とか，他人の虚々実々な経済行動とかを予測することは，到底人智のなしうるところではないであろう。

しかしながら，資本主義社会の現段階の特徴の一つとして，個々の企業者は独占的位置に多かれ少かれ置かれながらも，絶えず激しい競争場裡に曝されている。そのため，人智では，将来のこととか，他の人の行動とかは到底予想できないと言つて安穏と拱手してはおられない。常に自らのあらん限りの力を駆使して，現在のみならず，将来あるいは他の人の様相を見守つたり，自分なりきに予測して，それに対処しなければならない。それには，前の節で述べたように，試行錯誤の方法とかここで述べんとする feedback の働きのような思考方法によることも，一つの方法であろう。いま，この方法に則つて，各企業者が行動したと想定して，特にどのような価格変化やその波及あるいは適応過程が形成されるかを論じてみよう。

ある企業 i が極大利潤の獲得を目指して，価格 P_i を引上げたとしよう。そうすると，不完全競争市場では，各需要者に他の稿[2]で述べた如き種々の理由から選好 (preference) があるからある一定の需要者数だけは，企業 i に依然として買手として存在しようが，他面各商品間の代替関係が不完全であるため，換言すれば価格の引上げによつて他の企業の生産物によつて代替せられた需要部分と価格の変分との比，すなわち代替率 (rate of substitution) σ が

$$+\infty > \sigma > 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1)$$

であるから，企業 i 以外の企業に移動する顧客も若干ある。

周知のように，この市場で，企業者間の価格変化によつて流動するのは，価格の事情や企業者の販売方法如何によつて浮動する，P. Sraffa の所謂限界購買者（marginal consumer or marginal buyer）[3] である。もつとも，この限界購買者が企業 i から減退する仕方には二つある。これは，つぎのことから明らかである。

いま，一般市場価格を P，企業 i の価格を p_i，その他の企業1, 2, …… $i-1$, $i+1$, ……… n の価格を p_1, p_2, ……… p_{i-1}, p_{i+1}, …… p_n とし

$$\left.\begin{array}{l} p_1=p_2=p_3=\cdots\cdots\cdots=p_{i-1}=p_{i+1}=\cdots\cdots\cdots=p_n=P \\ p_i>P,\ \ p_i=p_i+\varDelta p_i \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot2)$$

という関係があるとすれば，企業 i の需要量の変化は次のようになる。すなわち，企業 i の需要量を x_i とすれば，

$$\begin{aligned} & x_i(p_i+\varDelta p_i\,;P,n)-x_i(p_i\,;P,n) \\ & =[x_i(p_i+\varDelta p_i;P+\varDelta p_i,n)-x_i(p_i;P,n)] \\ & \quad -[x_i(p_i+\varDelta p_i\,;P+\varDelta p_i,n)-x_i(p_i+\varDelta p_i;P,n)] \\ & =[\frac{1}{n}F(P+\varDelta p_i)-\frac{1}{n}F(P)]-[\frac{1}{n}F(P+\varDelta p_i)-\frac{1}{n}F(p_i+\varDelta p_i)] \\ & \fallingdotseq \frac{1}{n}F'(P)\varDelta p_i-\frac{\partial}{2P}x_i(p_i+\varDelta p_i;P,n)\varDelta p_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot3) \end{aligned}$$

となる。[4] この(2・3)式の第１項，第２項は夫々減退する二つの仕方を示す。すなわち，

一つは $\frac{1}{n}F'(P)\varDelta p_i$ で，これは，企業 i の価格引上げによつて限界購買者がもはや代用品群を買うことを断念して全然異なつた産業に向うものである。もう一つは $\frac{\partial}{2p}x_i(p_i+\varDelta p_i;P,n)\varDelta p_i$ で，これは限界購買者のうち価格引上げによつて，いままで企業 i の需要者だつたものが，他の競争相手に移動する需要者数である。従つて，これは，他の企業が同じように価格引上げをすれば，企業 i にもどる需要者の数である。前述の代替率 σ は後者のものである。

価格切下げを企業 i が行えば，前の逆の現象が生ずることは自明であろう。

かくて，この市場では，価格に対する需要の直接弾力性 η_i もかなり大きく，

$$+\infty > \eta_i > 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4)$$

であり，またその間接弾力性 θ_i も，

$$+\infty > \theta_i > 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot5)$$

の値で存在するものと推察される。もつとも η_i と θ_i との関係は，もし総需要量，企業 i 以外の需要量を夫々 X, x_{n-i} とすれば，次のような式で示される。すなわち

$$x_{n-i}=X-x_i$$

$$\therefore x_i=X-x_{n-i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot6)$$

$$x_i=f_i(p_1,p_2,\cdots\cdots\cdots p_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot7)$$

$$\eta_i=\frac{dx_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{x_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot8)$$

(2・6)，(2・7)および(2・8)の三式から

$$\eta_i=\frac{dx_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{x_i}=\left(\frac{\partial X}{\partial p_i}-\frac{\partial x_{n-i}}{\partial p_i}\right)\frac{p_i}{x_i}=\left(\frac{\partial X}{\partial p_i}-\sum_{h=1}^{i=1}\frac{\partial f_n}{\partial p_i}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)\frac{p_i}{x_i} \quad \cdots\cdots(2\cdot9)$$

(2・9)式で，第2項および第3項と$\frac{p_i}{x_i}$との積は，間接弾力性である。

したがつて，不完全競争市場の個別需要函数は

$$\frac{dx_i}{x_i} \div \frac{dp_i}{p_i} = \eta_i$$

$$\therefore \frac{dx_i}{x_i} = \eta_i \frac{dp_i}{p_i}$$

これを積分すれば，

$$\log x_i = \eta_i \log p_i + \log B \quad （但しBは積分常数）$$

$$\therefore x_i = B \cdot p_i^{\eta_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 10)$$

(2・9)式から

$$x_i = B \cdot p_i^{\left(\frac{\partial X}{\partial p_i} - \sum_{h=1}^{i=1} \frac{\partial f_n}{\partial p_i} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)\frac{p_i}{x_i}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 11)$$

となる。

したがつて，企業iが価格を引上げれば，その個別需要量の減退の大いさは，具体的な直接弾力性係数あるいは間接弾力性係数に応じて規定される筈である。このとき，企業i以外の企業$n-i$が，どのような態度に出るかは，P. Sweezy などが既に指摘したように，恐らく静観するか，あるいは企業iにならつて価格を引上げるにしても，それほど大きくはないであろう。蓋し企業$n-i$は，企業iの価格引上げによつて，限界購買者の多くを獲得して超過利潤を増加した筈だからである。

ところが，企業iが，前のケースとは逆に価格を切下げた場合は，どのようになるであろうか。(2・10) 式あるいは (2・11) 式から類推されるように，価格に対する需要の弾力性係数の値に応じて，企業$n-i$の各々は企業iに需要者を奪われる筈である。すなわち，t および $t+1$ で時間要素を示すとすれば，

$$\left.\begin{array}{l} p_{i,t} \rightarrow p_{i,t+1} \\ p_{i,t} > p_{i,t+1} > p_{n-i,t} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 12)$$

となると，

$$\left.\begin{array}{l} x_{i,t} \rightarrow x_{i,t+1} \\ x_{i,t} < x_{i,t+1} > x_{n-i,t} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 13)$$

となる。こうなると企業$n-i$の各々は，前の場合と異なり拱手傍観はしていない。直ちに

$$\left.\begin{array}{l} p_{n-i,t} \rightarrow p_{n-i,t+1} \\ p_{n-i,t} > p_{n-i,t+1} \geqq p_{i,t+1} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 14)$$

なる如く価格を操作するであろう。その結果，

$$\left.\begin{array}{l} x_{n-i,t} \rightarrow x_{n-i,t+1} \\ x_{n-i,t} < x_{n-i,t+1} \geqq x_{i,t+1} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 15)$$

となる筈である。もつとも，企業iと企業$n-i$の各々との価格競争の勢力が，直ちにその作用を発揮するとは限らない。競争の勢力が作用するまでにはかなりの時間的経過を必要とする筈である。その時間的経過の長短は結局夫々の企業のもつ独占的商圏の強さに依存すると思われることはことわつておきたい。

かくして，価格切下げを通して，企業iと他の企業$n-i$の各々の個別需要量との差が存在

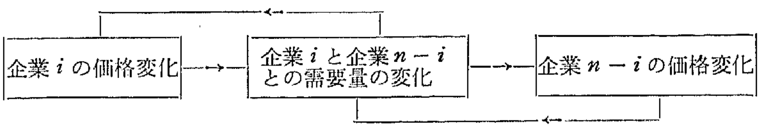

Fig. 2

する限り，こうした相互の活動は，作用反作用の過程を繰返しつつ，かつまた各企業間に連鎖的に反応しつつ，

$$p_{i,t+n} \times x_{i,t+n} \fallingdotseq p_{n-i,t+n-x} \times x_{n-i,t+n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot16)$$

となるまで継続せられるであろう。

換言すれば，(2・16) 式から理解されるように

$$p_{i,t+n} = p_{n-i,\ t+n-1}\frac{x_{n-i,t+n-1}}{x_{i,t+n}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot17)$$

に於て，$x_{n-i,t+n-1}$ と $x_{i,t+n}$ の不均衡が是正されるまで，競争者同士の価格切下げ闘争は繰返されると思われる。したがつて，価格変化と需要量変化との競争者同士の関係は

企業 i と競争相手 $n-i$ の価格の不均衡$\rightleftarrows$企業 i と競争相手 $n-i$ との需要量の変化

という形で表現し得る。これを図で以て示せば Fig. 2 の如くである。矢印は力の作用する方向を示す。

この図の意味するところは，企業 i の価格と競争相手たる企業 $n-i$ のそれとは相互に反対の方向に作用している。両者の価格の大いさが不均衡ならば，その差に対応して，企業 i と企業 $n-i$ との需要量は変化する。この需要量の変化は，企業 i と企業 $n-i$ をして価格をそのままの位置にしてはおかない。直ちに企業 i と企業 $n-i$ とが夫々価格を変化し，不均衡となる。これがまた新たな需要量の変化をもたらすというのである。

以上でわかる如く，企業 i と他の競争相手との経済関係の適応過程は，価格を通しての企業 i と企業 $n-i$ との力の不均衡が，両者の需要量変化をもたらすという一方的な流れではなく，これがまた逆な流れに作用して，両者の価格を変化させるという連続的振動的な相互作用的な過程として把握され，前節で述べた feedback system ときわめて類似していると言えよう。それではこの両企業の価格の作用反作用の適応過程は，何時まで継続されるものであろうかということは，feedback の仕方如何によつて決定されると言えよう[5]。

いままでの論は，夫々の企業が動かす価格についての情報が，限界購買者に直ちに伝達されるという仮定で，その適応のプロセスを説いてきた。ところが不完全競争たる現実の市場では知識が不完全であつたり，不確実要素が存在していたりする限り，かく簡単に情報が伝達されるものではない。さらに，現実の市場では情報伝達手段としての広告が限界購買者の移動に極めて大きな役割を演ずるのである。蓋し，もし完全市場であれば，買手に選好がないため，限界購買者を動かすに価格が主演を演じ，価格を切下げるだけで，需要量の大きな変化をもたらすが，不完全競争市場では，買手は価格のみならず，製品または用役そのものの質に強く心をひかれるため，購買者選好の誘導には広告が主役を演ずるからである。

かかる理由から，つぎにこの情報の要素を考慮に入れての feedback system を考えてみよう。その前に情報そのものの考察をしておいた方が便宜と思われるので，簡単に触れておこう。

周知のように，情報 (information) は社会的接触 (social contact) のみならず，種々のマス・コミの手段によつて伝播せられる。しかし，こうした情報すべてが有効とは限らない。一般に，企業者は買手が必要とするかどうかとは無関係に，あらゆる人に無差別に情報を流すのである。従つて，情報がもし既にその情報を受けておる人に与えられるとか，全然無関心な人に向けられるならば，その情報は無効であつて，情報とは言えない。以前情報を受けなかつたり，あるいはその企業に関心をもつていたりする買手に，その情報が伝わつてはじめて，その情報は有効となり，情報と言い得るのである。

さて，いま或る期間 t の限界購買者の数を B_t，既に企業 i とその競争相手たる $n-i$ から情報を受けた人々の数を，夫々，$b_{i,t}$，$b_{n-i,t}$ とすれば，その比率は $(b_{i,t}+b_{n-i,t})/B_t$ で，これをかりに情報率と呼んでおこう。そうすると，新しい情報が浪費とならない比率は $1-(b_{i,t}+b_{n-i,t})/B_t$ となる。なお，社会における相互の接触係数 (contact coefficient) を c，企業 i，$n-i$ それぞれによつて，マス・コミの種々の広告手段により情報を受ける係数をかりに広告係数 (advertising coefficient) と呼び，これを a_i，a_{n-i} とし，限界購買者の成長率 (rate of growth) を g，限界購買者のうち夫々他の企業者への移動率 (rate of removal) を γ とする。ここに，企業 i と他の競争相手 $n-i$ の或る時期 t の価格の関係を

$$P_{i,t} < P_{n-i,t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot18)$$

とする。企業 i に固有な需要者との接触や企業 i の広告を見たことによつて，時間 dt の間に増加する需要者の数は

$$(c+a_i)b_{i,t}[1-(b_{i,t}+b_{n-i,t})/B_t]dt$$

であり，価格関係でなく，何かの衝撃で気変りして企業 i の買手から脱落してゆく数は少数ではあろうが，$\gamma b_{i,t}dt$ とする。また，企業 $n-i$ の広告をみたか，或は企業 $n-i$ の固有需要者と接触したかによつて，価格は高くとも，義理人情その他の選好によつて，新たに企業 $n-i$ から購買する買手の数を

$$(c+a_{n-i})b_{n-i,t}(b_{i,t}/Bt)dt$$

とすれば，企業 i の期間 dt に増加する需要者数は

$$db_{i,t}=(c+a_i)b_{i,t}dt\left(1-\frac{b_{i,t}+b_{n-i,t}}{B_t}\right)-\gamma dt\, b_{i,t}-(c+a_{n-i})b_{n-i,t}dt\frac{b_{i,t}}{B_t}$$

これを微分方程式にて示せば，

$$\frac{db_{i,t}}{dt}=(c+a_i)b_{i,t}dt\left(1-\frac{b_{i,t}+b_{n-i,t}}{B_t}\right)-\gamma b_{i,t}-(c+a_{n-i})b_{n-i,t}\frac{b_{i,t}}{B_t} \qquad \cdots\cdots\cdots(2\cdot19)$$

これに均衡条件 $1-(g+r/c+a_{n-i}=b_{n-i,t}/B_t$ を代入して，解けば

$$\frac{b_{i,t}}{B_t}=\frac{\dfrac{g+\gamma}{c+a_{n-i}}-\dfrac{c+a_{n-i}}{c+a_i}}{1-\left[1-\dfrac{B_0}{b_{i,t}}\left(\dfrac{g+\gamma}{c+a_i}-\dfrac{c+a_{n-i}}{c+a_i}\right)\right]e^{-(c+a_i)\left(\frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}}-\frac{c+a_{n-i}}{c+a_i}\right)t}} \qquad \cdots\cdots(2\cdot20)$$

(2・20)式にて

$$\frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}}<\frac{c+a_{n-i}}{c+a_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot21)$$

ならば

$$e^{-(c+a_i)\left(\frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}}-\frac{c+a_{n-i}}{c+a_i}\right)t}\to+\infty$$

$$\therefore \frac{b_{i,t}}{B_t} \to 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 22)$$

となる。この経済的意味は，企業 i が価格 p_i を切下げても，情報は有効でなく，企業 i の需要量は増加しないことを示す。

逆に，

$$\frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}} > \frac{c+a_{n-i}}{c+a_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 23)$$

ならば，

$$e^{-(c+a_i)\left(\frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}}-\frac{c+a_{n-i}}{c+a_i}\right)t} \to 0$$

$$\therefore \frac{b_{i,t}}{B_t} = \frac{g+\gamma}{c+a_{n-i}} - \frac{b+a_{n-i}}{c+a_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2 \cdot 24)$$

(2・24) 式は，情報率が，社会接触係数や広告係数の大いさに依存することを意味し，またこれらの係数によつて限界購買者の企業 i や他の競争相手に流れる数にも大きく影響をもたらすことも推察される。[6]

かくて，情報率を考慮した不完全競争市場の feedback system を図示すれば，Fig. 3 のようになる。

最後に，企業 i が極大利潤を獲得すべく，価格を上下させる行動心理を，もう少し深く立ち入つて考え，不完全競争市場の feedback 的構造をみつめてみよう。

確かに，企業 i とその競争相手 $n-i$ との feedback 的過程における価格変化の動機は，価格変化に応じて各々の需要量が変化したときであろう。しかし，各々の企業者は，その現在の情勢に対応するのみならず，将来，お互がどのように反作用して価格がどの位置におさまるだろうかと予測し，その予測に基いて行動すると思われる。

簡単に言えば，企業が，自らの変化させんとする価格の大きさを決定するに際し，競争相手の価格の現在の大いさと，その将来の価格の変化の予想との二つを基準としてどのように需要量が変化するであろうかをみる。そこで，われわれは，競争相手の価格の現在の大いさに即して反応する度合を「比例反作用係数」，競争相手の価格の変化の予想に応じて感応する度合を「予想反作用係数」と仮に呼んでおこう。そして実際に企業 i が「手」を打つ価格の大いさはこの「比例反作用係数」と「予想反作用係数」との和によつて規制されるものとしよう。[7]

かくすると，価格は過度の大きさとして決定されず，程よく調整されると考えられる。蓋し予想反作用係数は競争相手 $n-i$ の価格が切下げられつつあるときでも，その切下げ速度が鈍れば，直ちにその影響を受けるであろうし，またその競争相手の価格の切下げの度合が大きくても，それが減少傾向をたどりはじめれば，予想反作用係数はただちにマイナスに転ずるであ

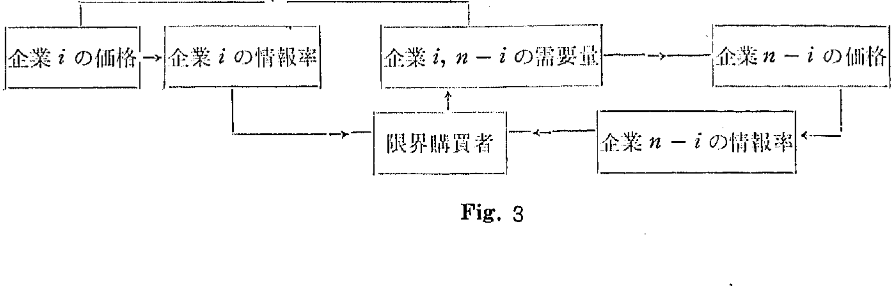

Fig. 3

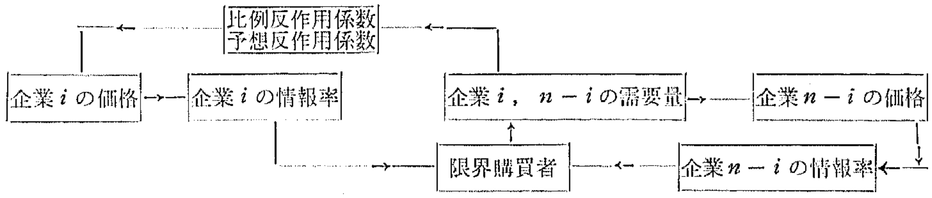

Fig. 4

ろうからである。換言すれば，予想反作用係数は，もし比例反作用係数ならば，価格切下げの大きさがゆきすぎてしまうような場合にも，よくコントロールし，それ以前に既に反対方向への調整作用が生じて，そのゆきすぎを制御する役割を果してくれるものと言える。この関係を企業 i を中心として図示すれば Fig. 4 の如くなる。

Fig. 4 から理解されるように，企業 i は競争相手 $n-i$ の価格に対して比例的（proportional）あるいは予想（anticipation）的反応によつて行動するとは言え，競争相手 $n-i$ の価格によつて，どのように企業 i 自らと競争相手との需要領域の構造が変化したかを通して，反応することは注意しなければならぬ。なぜなら，企業 i は，もし競争相手が価格を変化しても自分の独占的領域構造が強固であつて需要者が移動しなければ，何等企業 i としては価格を変化するには及ばないからである。しかし企業 i が価格を動かすには，競争相手の価格如何を直接的動機とはみてよいであろう。蓋し価格変化と需要量変化とのつながりは前から述べてきたように，断り書きがない限り自明のことであるためである。ただ図に示す場合には需要量変化のプロセスを見落してはならぬと言うに過ぎない。

さて比例的反作用係数および予想反作用係数によつて，企業 i の価格が変化するさい発生する振動がどのようになるか，たとえば，その振動が拡散的であるか，収斂的であるか，あるいはまた発散も収斂もしないで循環的であるかを考察してみよう。

いま，企業 i の価格や他の競争相手の価格を前と同様 p_i，p_{n-i} とし，その変化を夫々 $\dot{p}_i\left(=\dfrac{dp_i}{dt}\right)$，$\dot{p}_{n-i}\left(=\dfrac{dp_{n-i}}{dt}\right)$，企業 i の比例的反作用係数を α，予想反作用係数を β，競争相手 $n-i$ の夫々の係数を η，θ とすれば，以上述べたようなことから，次のように表現しうる。

$$p_i=\alpha p_{n-i}+\beta\dot{p}_{n-i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 25)$$

$$p_{n-i}=\eta p_i+\theta\dot{p}_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 26)$$

(2・26)式を時間 t にて微分すれば，

$$\dot{p}_{n-i}=\eta\dot{p}_i+\theta\ddot{p}_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 27)$$

（但し $\ddot{p}_i=\dfrac{d^2p_i}{dt^2}$）

(2・25)式と(2・26)式と(2・27)式とを代入すれば，

$$p_i=\alpha(\eta p_i+\theta\dot{p}_i)+\beta(\eta\dot{p}_i+\theta\ddot{p}_i)$$

これを整理すれば，次のような企業 i の価格 p_i に関する2階の微分方程式となる。

$$\beta\theta\ddot{p}_i+(\alpha\theta+\beta\eta)\dot{p}_i+(\alpha\eta-1)p_i=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 28)$$

この (2・28) 式を解けば，企業 i の価格 p_i がどのような振動のかたちをとつて変化するか

がわかる。ここで

$$A=\beta\theta,\ B=(\alpha\theta+\beta\eta),\ C=\alpha\gamma-1$$

とすれば，(2・28)式は，

$$B^2-4Ac<0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot29)$$

のとき振動解をもつことは一般に知られている。すなわち，それは，

$$p_i=e^{\frac{1}{2}Bt}(b_1\cos\omega t+b_i\sin\omega t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot30)$$

（但し，$\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4Ac-B^2}$，$b_1$，$b_2$ は初期条件によつて決定せられる常数）

この条件が成立するとき，企業 i の価格は，ある出発点の価格水準を中心として上下に増減することになる[8]。

(2・29)式に(2・28)式の各々を代入すると，

$$(\alpha\theta+\beta\eta)^2-4\alpha\beta\eta\theta+4<0$$

$$(\alpha\theta-\beta\eta)^2<-4$$

$$\therefore\ \alpha\theta-\beta\eta<\pm2i$$

すなわち，

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\eta\pm2i}{\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot31)$$

$\pm2i$ を無視しうるものとすれば，(2・31)式は

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\eta}{\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot32)$$

となる。これは，企業 i の価格変化が，企業 i の比例的反作用係数と予想反作用係数との比が競争相手 $n-i$ の夫々の係数との比より小なるとき，生ずることを示すものである。しかして(2・30)式によつて示される企業 i の価格の変動が減衰型か，拡散型かあるいはまた単振動型かは時間の経過とともに

$$e^{\frac{1}{2}Bt}\to0,\quad e^{\frac{1}{2}Bt}\to\infty,\quad e^{\frac{1}{2}Bt}=1$$

なるかによつて決定されよう。換言すれば，

$$B<0,\quad B<0,\quad B=0$$

ということである。故に，夫々の振動のタイプと条件の関係は次の如くなる。

（i）　減衰型　$\alpha\theta+\beta\eta<0$　　$\therefore\frac{\alpha}{\beta}<-\frac{\eta}{\theta}$

（ii）　拡散型　$\alpha\theta+\beta\eta<0$　　$\therefore\frac{\alpha}{\beta}<-\frac{\eta}{\theta}$

（iii）　単振動型　$\alpha\theta+\beta\eta=0$　　$\therefore\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\eta}{\theta}$

すなわち，これらは企業 i の比例反作用係数と予想反作用係数との比率が競争相手 $n-i$ のそれらの比率のマイナスの値との大小あるいは等しいかどうかによつて，企業 i の価格変化の振動のタイプが決定されるということを物語つていると言えよう[9]。

註(1)　拙稿「不完全競争企業の均衡」（松商論叢，1954. No. 1. PP. 1—42）ほか一連の不完全競争論について屡々述べてきた。

(2)　拙稿「不完全競争市場と販売費用」（松商論叢，1955. No. 2 . PP. 85—88）を特にみられたい。

(3) P. Sraffa : The Laws of Returns under Competitive Conditions. (Readings in Price Theory. 1953. PP. 190—191.)
(4) 青山秀夫「独占の経済理論」1949. PP. 342—343. およびA. C. Pigou : Economics of Stationary States. 1935. Chap. XLIV. Appendix XIV. 参照。
(5) 下村治「経済成長実現のために」1958. PP. 59—60参照。
(6) S. A. Ozga : Imperfect Markets through Lack of Knowledge. (Quarterly Journal of Economics. February, 1960. No. 1. PP. 4—48) 参照。
(7) 下村治氏と同様，この用語や考え方は次の著書の proportional control, anticipation control という用語例にならつた。
H. M. James, N. B. Nichols and R. S. Phillips : Theory of Servomechanisms. 1947. P. 3.
(8) 下村治「経済変動の乗数分析」1952. PP. 135—138. 参照。
(9) この節の考え方は，下村治氏の前掲書２つに負うところが大きいことを断つておきたい。

3 価格予測と feedback

最近，予測の方法は，種々の経済現象を対象にして，極めて熱心に論ぜられてきている。然しながら，一体に経済現象の構造の複雑さ，それの変動の激しさ，余りにも多くの不確実要素が存在しているなどから，その推定が非常に困難で，不完全さを免れないというのが通説といえよう。

われわれが，ここで feedback の原則を応用して，不完全競争市場における，将来の最適販売価格を予測するのだといつても，遺憾ながら完全なものではない。所詮は，いかなる予測も確実性をもつて主張することはできないと言わざるを得ないのではなかろうか。ただ，現在種種の予測の方法が展開されてはいるが，それらと比較し，本稿での方法が結果として発生した将来の事実と，その予測値との誤差が，ヨリ少くあれば望ましいと言うほかない。そこで，われわれはこの問題に関連あるすべての知識と feedback 原測とをとり入れるようにして，価格予測の解明の一つを考えてみたいと思う。

周知のように feedback system は error-sensitive system とも言われているように，目標の状態と発生した状態とのあいだに生じた誤差がたえず測定され，もしそこに誤差があればその誤差をできるならば，適当な行動によつて小さくしようとする働きをもつ。こうした system の特徴を利用し，企業経営においてある目標値を設定し，それと実際値とを比較して，その目標値に近づけるように，そのシステムを仕組もうとする管理方式が種々考えられている。かの H. A. Simon による在庫管理方式へのそのシステムの適用[(1)]はその一つと言えよう。

ここでは，不完全競争市場であるから，生産費用のみならず，前節でもみたようにこの市場特有の広告費用を重視しての，将来の最適価格の予測をしてみたい。何故，広告費用を特に取上げて考えるかは前節の情報について述べたことによつても理解できるとは思われるが，簡単に触れておく。

普通，不完全競争市場では，生産物は異質化し市場の見通し，その他の市場情勢の知識は，各企業者や需要者にとつて極めて乏しい。しかもこの生産物の異質化を契機として二つのことが言いうる。一つは，生産物分化の利益によつて，各企業者間の勢力関係は絶えず変化している。他の一つは，需要者に選好の働く余地がつくられるということである。従つて，各企業者が生産物分化の利益を自分に帰属せしめるべく，需要者の選好を誘導する手段をとらねばなら

ぬ。この手段として最も有力なものは，市場への普遍性と浸透性とをもつ広告といえよう。しかも，これは生産物分化による利益によつて償われれば，広告費用はたえず続けられ，価格競争以上に活潑化するものと思われる。従つて，ここでは広告費用，生産費用および販売価格の要素を以つて将来の販売価格に対する予想誤差のバラツキをなるべく少くするためには如何にするかを考えてみよう。最初の試みであるので，以下ごく簡単な想定のもとに，継続的に，それぞれ異つた時点でデータをとつた，離散的な場合のみ考察し，連続的な場合は他の機会に譲りたいと思う。

さて，次のような想定のもとで，考察を進めよう。

(i) ある月の初めに仕掛けられた生産物は，t' カ月後，すなわち $(t'+1)$ カ月目の初めに販売せられるとする。したがつて，或る t 月に販売する生産物の生産費用は，$(t'+1)$ カ月前の生産期の生産費用と考えねばならぬ。

(ii) 或る月 t の月末における広告費用の増分は，不完全競争であるから，常に広告費用は支出している故 $(t'+1)$ カ月の広告費用と，その月の価格との和から，$(t'+1)$ カ月前の生産費用を差引いたものに等しい。

(iii) 生産費用は，一般に，過去の販売価格や広告費用如何を考慮して決定される。

(iv) t 期の期間の期末の広告費用，生産費用，価格をそれぞれ A_t, C_t, P_t, $(t-1)$ カ月前の広告費用を A_{t-1}, $(t'+1)$ カ月前の生産費用を $C_{t-(t'+1)}$ とする。

以上の仮定から，次のような関係式が成立する。すなわち，仮定(ii)から

$$A_t=A_{t-1}+P_t-C_{t-(t'+1)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot1)$$

仮定(iii)から

$$C_t=\sum_{j=0}^{t}K_jP_{t-j}-\sum_{j=0}^{t}L_jA_{t-j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot2)$$

〔但し K_j および L_j は線型作用素 (linear operater)〕

問題は，価格に関して現在得られる最適予想を具えるように K を選んだり，予想誤差から生ずる広告費用の変動を最小にするように L を合理的に選択することである。このため次のような簡単な数学的操作を行う。[3]

いま(3・1)式および(3・2)式の両辺に Z^t を乗じて $t=0$ より∞まで加え合せて，巾級数変換を行うと次のようになる。

$$\sum_{t=0}^{\infty}Z^tA_t=\sum_{t=0}^{\infty}Z^tA_{t-1}+\sum_{t=0}^{\infty}Z_tP_t-\sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_{t-(t'+1)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_t=\sum_{t=0}^{\infty}Z^t\sum_{j=0}^{t}K_jP_{t-j}-\sum_{t=0}^{\infty}Z^t\sum_{j=0}^{t}L_jA_{t-j}$$

ここで

$$\sum_{t=0}^{\infty}Z^tA_t=A(Z),\ \sum_{t=0}^{\infty}Z^tP_t=P(Z),\ \sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_t=C(Z),$$

$$\sum_{j=0}^{t}Z^jK_j=K(Z),\ \sum_{j=0}^{t}Z^jL_j=L(Z)$$

とすると，

$$A(Z)=ZA(Z)+P(Z)-Z^{t'+1}C(Z)$$

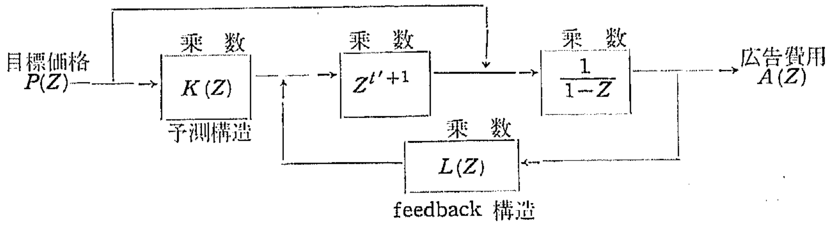

Fig. 5

$$\therefore A(Z)(1-Z)=P(Z)-Z^{t'+1}C(Z) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot3)$$

$$C(Z)=K(Z)P(Z)-Z(Z)A(Z) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot4)$$

この関係を図にて示せば，Fig. 5のようになる。

Fig. 5において，→は力の働く方向を示し，同一方向に二つの線がかこんでいる部分は同一の影響を表わし，$Z^{t'+1}$は時間的ズレに対応する。したがつて，この間は予測の構造を示し，→が逆に向いている二つの線でかこまれた間は，feedback構造を表示するものである。

いま，(3・3)式に(3・4)式を代入すると，

$$A(Z)(1-Z)=P(Z)-Z^{t'+1}[K(Z)P(Z)-L(Z)A(Z)]$$

$$[1-Z-Z^{t'+1}L(Z)]A(Z)=P(Z)[1-Z^{t'+1}K(Z)]$$

$$\therefore A(Z)=P(Z)\left[\frac{1-Z^{t'+1}K(Z)}{1-Z-Z^{t'+1}L(Z)}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot5)$$

$A(Z)$が常にゼロになることは，広告費用の変動が完全になくなり，安定した不完全競争状態になつたことを意味する。このための条件を検討すると，

$$P(Z)[1-Z^{t'+1}K(Z)]=0$$

$$P(Z)-Z^{t'+1}K(Z)P(Z)=0$$

$$\therefore K(Z)P(Z)=Z^{-(t'+1)}P(Z)$$

となる。これを(3・4)式に代入すると，

$$C(Z)=K(Z)P(Z)-L(Z)A(Z)=Z^{-(t'+1)}P(Z)-L(Z)A(Z)$$

となる。これを変換前にもどすと，

$$\sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_t=\sum_{t=0}^{\infty}Z^{t-(t'+1)}P_t-\sum_{j=0}^{t}Z^jL_{t-j}\sum_{t=0}^{\infty}Z^{t-j}A_{t-j}$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}Z^tP_{t+(t'+1)}-\sum_{l=0}^{\infty}Z^l\sum_{j=0}^{t}L_jA_{l-j}$$

ここで両辺のZ^tの係数を比較すると，

$$C_t=P_{t+(t'+1)}-\sum_{j=0}^{t}L_jA_{t-j}$$

となる。このことは，$(t'+1)$カ月先の販売価格を正確に予知し，それに基いて生産費用を費して生産を行うべきことを意味する。したがつて，最良の価格を予測しうるよう操作しなければならぬ。前にも述べたように，完全な価格予測はできないが，予測の誤差の影響を最小限にとどめるよう操作しよう。

そこで，$(t'+1)$カ月先の販売価格の予測値を$P^*_{t+(t'+1)}$とすると，前式は

$$C_t = P^*_{t+(t'+1)} - \sum_{j=0}^{t} L_j A_{t-j}$$

となる。この関係式の変換を行うと，

$$C(Z) = Z^{-(t'+1)} P^*(Z) - L(Z)A(Z)$$

となる。これを(3・3)式に代入すると，

$$A(Z)(1-Z) = P(Z) - Z^{t'+1}[Z^{-(t'+1)}P^*(Z) - L(Z)A(Z)]$$
$$= P(Z) - P^*(Z) + Z^{t'+1}L(Z)A(Z)$$
$$[1 - Z - Z^{t'+1}L(Z)]A(Z) = P(Z) - P^*(Z)$$
$$\therefore A(Z) = \frac{P(Z) - P^*(Z)}{1 - Z - Z^{t'+1}L(Z)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3 \cdot 6)$$

となる。ところで，不完全競争市場を「場」とする限り，$A(Z)$を常にゼロにすることはできない。そこで A_t をできるだけ少くするように考えよう。すなわち

$$\lim_{t\to\infty} A_t = 0$$

のように $L(Z)$ を選ぶこととなる。このための条件を考えてみよう。

数学の定理に，「巾級数 $\Sigma a_n x^n$ の収斂半径をRとし，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

ならば，$l \fallingdotseq 0$ のとき，

$$R = \frac{1}{e}$$

である。」[3]とある。従つてこのことよりa_nがゼロに収斂するための条件は

$$R > 1$$

である。

こうしたことは，本稿に於て，(3・6)式の右辺が∞になるのは

$$|Z| > 1$$

のみであることを意味する。ここでは問題をリニアーに考えているので，$L(Z)$ はZの有理函数になる。そこで問題は

$$1 - Z - Z^{t'+1}L(Z) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3 \cdot 7)$$

にて，(3・7)式の根の絶対値がすべて１より大きいような有理函数$L(Z)$を選ぶことになる。[4]

(3・6)式の右辺が∞においてのみ極をもつようにしてみるために，

$$L(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z + \cdots\cdots + b_n Z^n}{a_0 + a_1 Z + \cdots\cdots + a_m Z^m} \quad (\text{但し}\ \ t' + n = m)$$

を(3・6)式の右辺に代入すると，

$$A(Z) = \frac{P(Z) - P^*(Z)}{1 - Z - Z^{t'+1} \times \left(\dfrac{b_0 + b_1 Z + \cdots\cdots + b_n Z^n}{a_0 + a_1 Z + \cdots + a_m Z^m}\right)}$$

となる。この右辺がZの整式になるための条件を求めて見よう。

右辺の分母のみをみると，

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 \cdots\cdots + a_{t'} Z^{t'} + a_{t'+1} Z^{t'+1} + a_{t'+2} Z^{t'+2}$$
$$+ a_{t'+n} Z^{t'+n} (= a_m Z^m) - a_0 Z - a_1 Z^2 - \cdots\cdots - a_{t'-1} Z^{t'} - a_{t'} Z^{t'+1}$$
$$- a_{t'+2} Z^{t'+3} - \cdots\cdots - a_{t'+n-1} Z^{t'+n} (= a_{m-1} Z^m) - a_{t'+n} Z^{t'+n-1} (= a_m Z^{m+1})$$

$$-b_0Z^{t'+1}-b_1Z^{t'+2}-b_2Z^{t'+3}-\cdots\cdots-b_{n-1}Z^{t'+n}-b_nZ^{t'+n+1}$$

となる。これを整理すると，

$$a_0+(a_1-a_0)Z+(a_2-a_1)Z^2+\cdots\cdots+(a_{t'}-a_{t'-1})Z^{t'}$$
$$+(a_{t'+1}-a_t-b_0)Z^{t'+1}+(a_{t'+2}-a_{t'+1}-b_1)Z^{t'+2}\cdots\cdots$$
$$+(a_{t'+n}-a_{t'+n-1}-b_{n-1})Z^{t'+n}+(-a_{t'+n}-b_n)Z^{t'+n+1}$$

となる。右辺がZの整式となるためには，Zの係数がゼロとなればよい。したがつて，

$$a\fallingdotseq 0,$$
$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots\cdots=a_{t'}$$
$$a_{t'+1}=a_{t'}+b_0 \qquad \therefore a_{t'+1}=a_0+b_0$$
$$a_{t'+2}=a_{t'+1}+b_1 \qquad \therefore a_{t'+2}=a_0+b_0+b_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{t'+n}=a_{t'+n-1}+b_{n-1} \qquad \therefore a_{t'+n}=a_0+b_0+b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{n-1}$$
$$a_{t'+n}=-b_n \qquad \therefore a_{t'+n}=a_0+b_0+b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{n-1}=-b_n$$

なる条件が得られる。これを$L(Z)$に代入してみると，

$$L(z)=\frac{b_0+b_1Z+b_2Z^2+\cdots\cdots+b_nZ^n}{a_0+a_1Z+a_2Z^2+\cdots\cdots+a_mZ^m}$$
$$=\frac{b_0+(-a_0-b_0)z+(-a_0-b_0-b_1)z^2+\cdots\cdots+(-a_0-b_0-b_1-\cdots\cdots-b_n)z^n}{a_0+a_0Z+a_0Z^2+\cdots+a_{t'}Z^{t'}+(a_0+b_0)Z^{t'+1}+(a_0+b_0+b_1)Z^{t'+2}+\cdots+(a_0+b_0+\cdots+b_{n-1})Z^{t'+n}}$$
$$=\frac{b_0-(a_0+b_0)Z}{a_0(1+Z+\cdots\cdots+Z^{t'})+(a_0+b_0)Z^{t'+1}}=\frac{b_0-(a_0+b_0)Z}{a_0\left(\frac{1-Z^{t'+1}}{1-Z}\right)+(a_0+b_0)Z^{t'+1}}$$
$$=\frac{[b_0-(a_0+b_0)Z](1-Z)}{a_0(1-Z^{t'+1})+(a_0+b_0)Z^{t'+1}(1-Z)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot 8)$$

さて，予測の誤差の影響を最小にすべく$L(Z)$を定めよう。いまt月の予測値をP_t,*その予測の誤差をω_tとすると，

$$\omega_t=P_t-P_t{}^*$$

この変換を作ると，

$$\omega(Z)=P(Z)-P^*(Z)$$

となる。広告費用の変動式は

$$A(Z)=\frac{P(Z)-P^*(Z)}{1-Z-Z^{t'+1}L(Z)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot 9)$$

となる。(3・9)式に，右辺が∞において極をもつ条件を代入すると，

$$A(Z)=\omega(Z)\frac{a_0(1+Z+\cdots\cdots+Z^{t'})+(a_0+b_0)Z^{t'+1}+\cdots\vdots+(a_0+b_0+\cdots+b_{n-1})Z^{t'+n}}{a_0}$$

となる。この逆変換を作ると，

$$A_t=\omega_t+\omega_{t-1}+\cdots\cdots\omega_{t-t'}+\sum_{j=t'+1}^{t'+n}M_j\omega_{t-j}$$

$$(\text{但し}\quad M_j=a_0+b_0+b_1+\cdots\cdots+b_{j-(t'+1)}/a_0,\ \ j=t'+1,\cdots\cdots,t'+n)$$

となる。ここで，販売価格に対する予測の誤差は，時間経過において独立であるとすれば，

$$\sum_{j=t'+1}^{t'+n}M_j\omega_{t-j}=0$$

のとき，広告費用の誤差の分散が最小となることがわかる。そのための条件は，

$$M_j=0 \quad (但し \quad j=t'+1, \cdots\cdots t'+n)$$

すなわち，

$$a \neq 0,$$

$$a_0+b_0+b_1+\cdots\cdots+b_{j-t'+1}=0 \qquad (但し,\ j=t'+1, \cdots\cdots, t'+n)$$

である。従つてこれより $A(Z)$ の右辺が∞において極をもつという条件をあわせ考えると，

$$a_0 \neq 0,$$

$$a_0=a_1=\cdots\cdots\cdots=a_{t'}$$

$$a_{t'+1}=a_{t'+2}=\cdots\cdots\cdots=a_{t'+n}=0$$

$$b_0=-a,$$

$$b_1=b_2=\cdots\cdots\cdots=b_{n-1}=b_n=0$$

という関係が得られる。これらの条件を$L(Z)$に代入すると，

$$L(Z)=\frac{b_0+b_1Z+\cdots+b_nZ^n}{a_0+a_1Z+\cdots+a_nZ^m}=\frac{-a_0(1-Z)}{a_0(1-Z^{t'+1})}=-\frac{1-Z}{1-Z^{t'+1}}==\frac{1}{\sum_{t=0}^{t'}Z^t} \quad (3\cdot10)$$

となる。かくて最適広告費用管理方式は，この結果を用いると，

$$C(Z)=Z^{-(t'+1)}P^*(Z)+\frac{1}{\sum_{t=0}^{t'}Z_t}A(Z)$$

となる。すなわち，

$$\sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_t=Z^{-(t'+1)}\sum_{t=0}^{\infty}Z^{t}P^*_t+\sum_{t=0}^{\infty}Z^tA_t\Big/\sum_{t=0}^{t'}Z^t$$

これは

$$\sum_{j=0}^{t'}Z^j\sum_{t=0}^{\infty}Z^tC_t=\sum_{j=1}^{t'+1}Z^{-j}\sum_{t=0}^{\infty}Z^tP_t^*+\sum_{t=0}^{\infty}Z^tA_t$$

ここで両辺のZ^tの係数を比較すると，

$$C_t+\sum_{j=1}^{t'}C_{t-j}=\sum_{j=1}^{t'+1}P^*_{t+j}+A_t$$

かくて，われわれが求めんとした予測値は，次の（3・11）の関係式によつて示されることがわかる。

$$\sum_{j=1}^{t'+1}P^*_{t+j}=\sum_{j=1}^{t'}C_{t-j}+C_t-A_t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot11)$$

これは，将来の販売価格の予測値は，t' 期間と t 期の生産費用の和からその期間 t の広告費用を差引いたものに等しいことを意味するものである。

註(1) H. A. Simon : On the Application of Servomechanism Theory in the Study of Production Control (Econometrica. Vol. 20. No. 2. Apr., 1952. PP. 247—268.)

(2) 数学的操作については，以下のものに負う所が大きい。
窪田忠彦編「数学事典」1950. PP. 637. ff., 横山保，福場庸「在庫管理」1959. PP. 149—156. 水野幸男「在庫量管理」 PP. 62—65. H. A. Simon : ibid., PP. 247—268.

(3) 窪田忠彦編「前掲書」P. 637

(4) 横山 保，福場庸「前掲書」P. 152.

以 上