蒸気を含む多孔体の伝熱による蒸発現象についての考察

鈴木　惠

Megumu Suzuki : A Contribution to the Flow of Homogeneous Fluid through heated porus media containing Vapour

(1956年10月1日受理)

I. 緒　言

液体を含む多孔体の種々の弾性力学的の研究は古くから多くなされている。たとえば，等方性と異方性の多孔体については弾性理論から Boussinesq-Papkovitch の解法と応力函数を使用して，応力と変位との関係を上手に説明している[1)2)]。これらの理論の応用は，高分子物質，土木工学，地質学などと分野は広く，難解の方程式を一般の剛体に対するものと何等変りないものに導いている。

しかしながらこれらの液体を含む多孔体に力を加えると，温度が上昇し含有蒸気は蒸発する。たとえば実際にはオイルレスベアリング[3)]（焼結ナイロン，粉末合金など）に荷重がかかり，一定速度で廻転するような時には摩擦熱により相当の温度が上昇し，給油は蒸気となり蒸発し，焼付きという現象を起す。更にサンフォライジングなどのように織物に張力をかけて乾燥をするような場合もこれに似た現象を呈し，織物に収縮を起すことは古くから知られている。それらの内，特に織物の乾燥については，最近，理論的には新津[4)]外が研究し，実験的には簡便な方法により鈴木[5)]が，更に風速を考えた場合について詳細に赤松[6)]外が研究をなしている。これと同様の現象は，機械，電気，化学，繊維工業などの各部門で見られ極めて重要と思われる。それゆえ，液体または蒸気を含む多孔体を熱せられる場合の蒸発流動現象を熱伝導の方程式から考察しようとするものである。

II. 理　論

高分子物質は多くの孔を有し，吸着現象が活潑であり，繊維を洗色するような多くの現象の如く毛管による凝縮や，オイルレスベアリングの如く先に給油して液体を含む場合もある。しかしこれらの熱力学的に安定した状態というものは外界に支配されて，再現性は困難であり，織物の乾燥の際も真の乾燥状態をえることは非常に難しい。これらの高分子物質中たとえば繊維素が吸つた水分子の挙動については P. H. Hermans[7)] が説明を加えている。オイルレスベアリングのような場合の油の挙動については F. P. Bowden, D. Tabcr[8)] および曽田[9)] が毛管現象に似た現象で潤滑がなされると言つている。これらの水分子・油などの液体または蒸気を含有する高分子物質を乾燥または乾燥潤滑することが工業界には多い。

しかし，高分子物質のような非連続体にそのまま連続体の熱伝導の式を当てはめるのは多くの難点はあると思うが，繊維素の空気乾燥について J. J. Higgins[10)] が乾燥中における水分流動機構について提案しているので使用出来るものと思う。さて，$x=\pm a$，　$y=\pm b$，$z=\pm c$ で囲まれた多孔性高分子を考える。[11)] 一点（x，y，z）に辺 ∂x，∂y，∂z を有する微小体積に各温度に応じて移動する蒸気量を　u，その四囲から蒸気は外界に逃れ出るとすると，

$$\partial u/\partial t=k^2\nabla^2 u \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに k は蒸気の移動係数，∇^2 は x，y，z についての Laplacian である。この蒸気の移動係数は熱力学の諸法則を満足する常数とする。境界条件により

$$(\partial u/\partial x\pm hu)_{x=\pm a}=0,\quad (\partial u/\partial y\pm hu)_{y=\pm b}=0,$$
$$(\partial u/\partial z\pm hu)_{z=c}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

で与えられる。ここに h は蒸発係数である。また初めの蒸気含有量を u_0 とすると

$$(u)_{t=0}=u_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) 式の特解は

$$u=u_c e^{-k^2(p^2+q^2+r^2)t}(A\cos px+A'\sin px)$$
$$(B\cos qy+B'\sin qy)\ (C\cos rz+C'\sin rz)\cdots(4)$$

境界条件 (2) により

$$A\ (p\sin pa-h\cos pa)+A'\ (p\cos pa+h\sin pa)=0$$
$$A\ (p\sin pa-h\cos pa)-A'\ (p\cos pa+h\sin pa)=0$$

をうる。これら二式から

$$p\sin pa-h\cos pa=0,\quad A=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

または

$$p\cos pa+h\sin pa=0,\quad A'=0$$

の中の何れか一つをとらなくてはならない。後の関係式において pa の代りに $pa+\pi/2$ としたものは (5) 式であ

るから (5) 式のみで充分である。$pa=\delta$ とおくと

$$\delta \sin \delta = ha \cos \delta \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

と書きうる。この式の解は無数にあり，その中の一つを δ_s とすると

$$p_s = \delta_s / a$$

により与えられる。δ_s は図式法により求められる。すなわち，(6) 式より

$$\cot \delta = \delta / ha \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

とし，

$$y = \cot \delta, \quad y = \delta / ha$$

なる二曲線を $y\delta$ 平面上に書けば，それらの交点から δ_s が求められる。q，r もまつたく同様にして求められる。

従つて (4) 式は全体の p，q，r について加え合せると

$$u = u_0 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k^2(p_l{}^2+q_m{}^2+r_n{}^2)t} A_l B_m C_n \cos p_l x \cdot \cos q_m y \cos r_n z \cdots\cdots\cdots(8)$$

A_l，B_m，C_n は初めの条件 (3) 式から決定される。(5) 式とは $(u)_{t=0}=u_0$ であるから (8) 式より

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos p_l x = u_0{}^{1/3}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos q_m y = u_0{}^{1/3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos r_n z = u_0{}^{1/3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

のように係数が決定されればよいから，Fourier 級数論より

$$\left.\begin{aligned} A_s &= 2(p_s{}^2+h^2)\sin p_s a/h+ap_s{}^2+h^2a, \\ B_s &= 2(q_s{}^2+h^2)\sin q_s b/h+bq_s{}^2+h^2b. \\ C_s &= 2(r_s{}^2+h^2)\sin r_s c/h+cr_s{}^2+h^2c, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

となる。ゆえに

$$1 = 8\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(p_l{}^2+h^2)(q_m{}^2+h^2)(r_n{}^2+h^2)\sin p_l a \cdot \sin q_m b.\ \sin r_n c \cdot \cos p_l x.\ \cos q_m y.\ \cos r_n z/(h+ap_l{}^2+h^2a)(h+bq_m{}^2+h^2b)(h+cr_n{}^2+h^2c) \qquad (11)$$

となる。従つて求める解は

$$u = u_0\left\{2\sum_{l=1}^{\infty} e^{-k^2p_l{}^2t} \cdot (p_l{}^2+h^2)\sin p_l a \cdot \cos p_l x/h+ap_l{}^2+h^2a\right\} \times \left\{2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k^2q_m{}^2t} \cdot (q_m{}^2+h^2)\sin q_m b \cdot \cos q_m y/h+bq_m{}^2+h^2b\right\} \times \left\{2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k^2r_n{}^2t} \cdot (r_n{}^2+h^2)\sin r_n c \cos r_n z/h+cr_n{}^2+h^2c\right\} \cdots\cdots\cdots(12)$$

従つて，液体または蒸気を含有する多孔性高分子中の任意の一点（x，y，z）の時刻 t においての蒸気含有量は (12) 式で示される。

III 考　　察

(1) 計算で求めた (12) 式はあまりに複雑で，実際的でないが，F. BERGER[12] によると熱伝導の立場から (12) 式の p_s, q_s, r_s は級数的に小さくなることを立証している。それゆえ，実験式としては S＝2 までで充分表わしうると思う。

しかしながら S＝1 のような特別の場合には (12) 式より次式で表わしうる。

$$u = u_0 A_1 B_1 C_1 \cos p_1 x \cdot \cos q_1 y \cdot \cos r_1 z \cdot e^{-k^2(p_1{}^2+q_1{}^2+r_1{}^2)t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 2(p_1{}^2+h^2)\sin p_1 a/h+ap_1{}^2+h^2a \\ B_1 &= 2(q_1{}^2+h^2)\sin q_1 b/h+bq_1{}^2+h^2b \\ C_1 &= 2(r_1{}^2+h^2)\sin r_1 c/h+cr_1{}^2+h^2c \end{aligned}\right\}$$

とする。それゆえ多孔体全体の蒸気含有量は時間 t においてUとすると

$$U = A_1 B_1 C_1 \int_{-a}^{a}\cos p_1 x dx \int_{-b}^{b}\cos q_1 y dy \int_{-c}^{c} u_0 \cos r_1 z dz \cdot e^{-k^2(p_1{}^2+q_1{}^2+r_1{}^2)} \cdots\cdots (14)$$

ここでまた

$$U_0 = A_1 B_1 C_1 \int_{-a}^{a}\cos p_1 x dx \int_{-b}^{b}\cos q_1 y dy \int_{-c}^{c} u_0 \cos r_1 z dz$$

$$\alpha = k^2(p_1{}^2+q_1{}^2+r_1{}^2)$$

とおくと

$$U = U_0 e^{-\alpha t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

となる。この (15) 式は既に著者が発表した関係式[5] であり，一般には，風速，乾燥温度，室内湿度などに関係し異なる形をとり，第2項以下（S＝2以下）が表われるが，J. B. MAGGINNIS[13] は実験的に多くの糸の乾燥から指数的に含有蒸気が減少することを指摘しているので正しいと思う。

(2) レオロヂーと電気回路理論の類似性[14] の如く，多孔体が蒸気を含有するならば，その伝熱による蒸発現象は粘弾性模型で表わしうる。なんとなれば V. S. POSTNIKOF[15] はその論文中で熱伝導，拡散は緩和現象の根源の一つであるといつているから緩和時間 λp は $1/k^2p_s{}^2$ とおける。

(3) (12) 式の誘導には一応 k，h を常数とおいたが，物体内部の種々の条件で異なり，熱伝導と同様に蒸発をみて解析したための誤差はまぬかれぬと思うが，普通の乾燥実験では充分満足すると思う。特に布の乾燥について

は，この論文とは別に新津[4]外は乾燥物体表面または内部を流れる空気の性状（湿度，絶対温度）変化に着目して乾燥を拡散現象として解析しているので面白い。

(4) Darcy の法則との関連について[16)17)]，(12)式でx ̲方向のみ考え，y，z 方向は考えず，単位時間をとると

$$u=u_0 D\cdot\left\{2\sum_{l=1}^{\infty}e^{-k^2p_l^2}\cdot(p_l^2+h^2)\sin p_l a\cdot\cos p_l x/h+ap_l^2+h^2a\right\}\cdots(16)$$

ここで

$$D=\left\{2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-k^2q_m^2}\cdot(q_m^2+h^2)\sin q_m b\cdot\cos q_m y/h+bq_m^2+h^2b\right\}\times\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-h^2r_n^2}\cdot(r_n^2+h^2)\sin r_n c\ \cos r_n z/h+cr_n^2+h^2c\right\}$$

そこでuは単位時間内の移動量であるから速度を与えることになる。また，有孔体の流れにおいて圧力差 p_1-p_2，流れの平均速度 V，流体の粘性係数 μ および透過度をKとすると，Darcy の法則は次式で与えられる。

$$V=-\frac{K}{\mu}\frac{dp}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで(16)式の u と(17)式の Vは相等しいから，(16)式と(17)式の右辺より

$$dp/dx=-\mu/K\cdot u_0 D\left\{2\sum_{l=1}^{\infty}e^{-k^2p_l^2}\cdot(p_l^2+h^2)\cdot\sin p_l a\cdot\cos p_l x/h+ap_l^2+h^2a\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

従つて

$$p_1-p_2=-\int_{-a}^{a}E\left\{\sum_{l=1}^{\infty}e^{-k^2p_l^2}\cdot(p_l^2+h^2)\cdot\sin p_l a\cdot\cos p_l x/h+ap_l^2+h^2a\right\}dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

ここに

$$E=2\mu/K\cdot u_0\cdot D$$

を表わす。(19)式は多孔体の厚さ 2a 間の蒸気圧を指すもので，極めて小さいものと考えられる。もちろん Darcy の法則が適用できるのであるから低 Reynolds 数で蒸気は流動するものである。u_0 がxの関数でなく常数であり，l=1 の特別の場合には，

$$p_1-p_2=-E\cdot e^{-k^2p_1^2}\cdot(p_1^2+h^2)\sin 2p_1 a/h+ap_1^2+h^2a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

となる。

これらの考察は金網状の物質（高分子多孔体を指す）に寒天状の溶液（蒸気を指す）が入つた一般の場合を模型として考え，特に土壌の場合には蒸気相としての水分移動として F. D. Baver[18)] が研究しているが，織物のような方向性のあるものについて理論が合うか，また蒸発する際に水分が表面で蒸気になるか，内部で蒸気になるかという疑点はあると思うが今後の実験でたしかめたい。

終りにいつも御鞭撻いただく慶大工学部荒井渓吉先生に厚く感謝致します。

参 考 文 献

(1) M. A. Biot : J. App. Phys., 26, 182～185 (1955)
(2) —— : J. App. Mech., 23, (1) (1956)
(3) 川崎 宗造：オイルレスベアリング（日刊工業新聞社出版部）
(4) 新津靖・三角治洋：繊維機械学会（1954）秋季研究発表要旨
(5) M. Suzuki : J. Text. Mach. Soc. Japan, 1 (1), 57～59 (1954)
(6) 赤松督三 外五氏：繊機誌 9, (6), 37～43 (1956)
(7) P. H. Hermans : Contribution to the Physics of Cellulose Fibers (1946)
(8) 曾田 範宗：摩擦と潤滑（岩波全書）
(9) F. P. Bowden, D. Tabor : The Friction and Lubrication of Solid, (Oxford) (1952)
(10) J. J. Higginis : Tappi, 35, (93), (1952)
(11) 小平 吉男：物理数学（第2巻）（岩波）
(12) F. Berger : ZS. f. angew. Math. und. Mech. 8, (6) 479 (1928)
(13) J. B. Maginnis : Text. R. J. 3, 165, (1950)
(14) 中川鶴太郎：高分子，2, 513, 550, (1953)
(15) V. S. Postnikof : 物理学の成果 53, (1) (1954)
(16) M. Muskat : The flow of homogeneous Fluid through porous Media(1946) (Michigan)
(17) 信大繊維物理学教室編：繊維物理学実験 (1955)
(18) L. D. Baver : Soil Physics（野口，福田訳）朝倉書店 (249～254)

Summary

This paper deals mathematically with the flow of homogeneous fluid through heated porus media containing vapor or liquid by the heat conduction theory. The resulnts are as follows : —

1) The equation for the quantity of vapor contents at any time and point is extremely complicated, but it seems to be approximately represented by S=2 from the Berger's calculation for heat conduction. In the special case of S=1, it coincides with Suzuki's experimental equation. Thus we realize that the Magginis's suggestion is correct.

2) The phenomena may be represented by the visco-elastic model type and are based on the relaxation claimed by Postnikof.

3) The idea is the same with Darcy Law. Consequently the flow or vaporization speed coincides with that of Darcy Law, and very small difference in the pressure in vapor flow in porus media can be theoretically calculated.