

# 有限な円筒状及び環状領域に於ける 境界値問題と有限ハンケル変換に関して

佐藤 良泰\*・岡 小天\*\*

Yoshiyasu SATO, Shoten OKA, (On the Boundary Value Problems in Cylindrical and Annular Domains with Finite Length, and the Finite Hankel Transforms)

(1953年9月15日受理)

## まえがき

工学或は応用物理学に於いて、非常に広汎な用途を持つにも拘らず、有限な長さの円筒及び環に関する境界値問題は、未だ殆んど未開拓であるかに見受けられる。1) さきに著者は共軸円筒型廻転レオメーターに依る、高分子溶液の粘弾性或は溶液もしくは液体の動的剛性率・粘度等の測定に於ける従来の測定原理の誤謬を指摘して、厳密な測定原理を与え、それに基づくデーターの解析法を示した。2)

ついで通常は、その補正が無視出来るであろうと推定されるが、内筒底面に於ける抵抗及び自由表面の影響に対する定量的な保証として、それらを考慮した三次元的な取扱を試みた。3)4) その考察及び取扱は、より一般的に、工学及び応用物理学上重要である有限な円筒状及び環状の領域或は、夫等の組合せの領域に関する境界値問題の解法に有効であろうと考えられる。

そこで本論では共軸円筒型レオメーター及び円筒型蓄電器に関しての我々の計算を例にとり、主として問題の前半、即ち領域の分割と、それに基づく境界値問題の設定、及び固有の境界面 ( $r$ に関する) 上で与えられた条件を満足する各部分領域の解 (部分解と呼ぼう、全域の解の縮小函数) を求める事に限定し、それを成るべく一般的な形式に整理して述べよう。残された問題は、各部分領域の境界面 (主として軸に垂直な境界面) 上で各部分解を接続する事であり、この事は内容的には各部分解及びその微係数であるフーリエ・ベッセル級数、もしくは類似級数の間の関係を与え、それらの係数列を決定することであるが、これは問題の前半より個別的問題になり、種々な境界条件の組合せにより変化に富む特殊問題を形成するので、茲では述べない。

尙成るべく統一的形式で述べるには、主として I. N. Sneddon に依り1945年頃より発表させられた有限

ハンケル変換<sup>5)</sup>を用いる事が好ましいと思われる。それに依れば微分方程式の主な項の組合せから統一的に解の形が予想される許りでなく、普通の変数分離法に比してより直截的であり、簡潔に而も固有の境界条件は自動的に処理される。

勿論これにより通常の解析的方法では求められない結果は得られないし、そして既知の展開定理の単なる別表現に過ぎないが、それにしてもその演算子的特性により、変換表の作製と相俟つてこの種の問題の解法上、将来発展すべきものと考えられる。而も、演算子的な用法については、未だ余り文献の多くはないので、先ず最初に有限ハンケル変換と数値物理学の主な微分方程式との関係について、幾分総合的な紹介を行ふ事にした。

## I 有限ハンケル変換と主な微分方程式

### 1.1 2種の有限ハンケル変換とその特性

次の定理により2種類の有限ハンケル変換を定義し、その性質を述べる。5) 証明は別に新しい事実ではないので省略しよう。以下  $J, Y$  は夫々第1種及び第2種のベッセル函数である。

〔定理〕 I もし函数  $f(r)$  が区間  $(0, a)$  でディクレーの条件を満すならば、そして、その範囲に於ける有限ハンケル変換  $f_n^y$  を

$$\bar{f}_n^y = \int_0^a r f(r) J_n(knr) dr \quad (1.1)$$

で定義すれば、 $f(r)$  が連続である  $(0, a)$  の任意の点に於いて

$$f(r) = \frac{2}{a^2} \sum \bar{f}_n^y \frac{J_n(k_n r)}{\{J_n'(k_n a)\}^2} \quad (1.2)$$

である。但し  $k_n$  は超越方程式

$$J_n(ka) = 0$$

の一つの根であり、上の和は方程式 (1.3) の総ての正根に亘りとりられる。

〔定理〕 II I. の  $f(r)$  に対して

\* 信州大学繊維学部数学研究室

\*\* 小林理學研究所

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f\right)_n^v = -ak_n f(a) J'_\nu(k_n a) - k_n^2 J_\nu^v \quad (1.4)$$

特に  $\nu = 0$  ならば,

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right)_n^0 = ak_n f(a) J_0(k_n a) - k_n^2 J_n^0 \quad (1.4')$$

【定理】Ⅲ もし函数  $f(x)$  が区間  $(a, b)$  でデュリクレの条件を満たすならば, そしてその範囲に於ける有限ハンケル変換  $\bar{f}_m^v$  を

$$\bar{f}_m^v = \int_a^b r(f(r)) [J_\nu(\kappa_m r) Y_\nu(\kappa_m a) - J_\nu(\kappa_m a) Y_\nu(\kappa_m r)] dr \quad (1.5)$$

で定義すれば,  $f(r)$  が連続である  $(a, b)$  の任意の点に於いて

$$f(r) = \sum \frac{2\kappa_m^2 J_\nu^2(\kappa_m b) \bar{f}_m^v}{J_\nu^2(\kappa_m a) - J_\nu^2(\kappa_m b)} [J_\nu(\kappa_m r) Y_\nu(\kappa_m a) - J_\nu(\kappa_m a) Y_\nu(\kappa_m r)] \quad (1.6)$$

である。茲に  $\kappa_m$  は超越方程式

$$J_\nu(\kappa b) Y_\nu(\kappa a) - J_\nu(\kappa a) Y_\nu(\kappa b) = 0 \quad (1.7)$$

の一つの根であり, 上の和は方程式 (1.7) の総ての正根に亘りとられる。

【定理】Ⅳ Ⅲの  $f(r)$  に対して

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f\right)_m^v = -\kappa_m^2 \bar{f}_m^v - \frac{2}{\pi} f(a) - f + \frac{2}{\pi} f(b) \frac{J_\nu(\kappa_m a)}{J_\nu(\kappa_m b)} \quad (1.8)$$

特に  $\nu = 0$  ならば

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right)_m^0 = -\kappa_m^2 \bar{f}_m^0 - \frac{2}{\pi} f(a) + \frac{2}{\pi} f(b) \frac{J_0(\kappa_m a)}{J_0(\kappa_m b)} \quad (1.8')$$

【Lemma】

$$1^\circ \left(\frac{J_1(\beta r) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta r)}{J_1(\beta a) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta a)}\right)_m^1 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2 - \kappa_m^2} \quad (1.9)$$

$$2^\circ \left(\log \frac{r}{b}\right)_m^0 = -\frac{2}{\pi} \frac{\log \frac{a}{b}}{\kappa_m^2} \quad (1.10)$$

### 2.2 主な微分方程式とその変換

(1°) 先づ応用数学で常に必要なラプラスアンについて考察しよう。ラプラスアン

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

は円筒座標  $(r, \phi, z)$  では

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

で表わされる。もし物理量  $\varphi(r, \phi, z)$  が  $z$  軸を対称軸とすれば,  $\varphi = \varphi(r, z)$  で

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となる。

$\varphi$  が電位, 磁位, 速度ポテンシャルの如き, ポテンシャル量であれば,  $\rho(r, z)$  をそれに対応する量の空間分布密度としてポアソンの方程式

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi \rho \quad (1.11)$$

が成り立ち, 特に  $\rho = 0$  であればラプラスの方程式

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.12)$$

となる。

今場が円筒状領域ならば I, II より, (1.11) は次の如く変換される

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi)_n^0 &= a k_n \varphi(a, z) J_1(k_n a) - k_n^2 \bar{\varphi}_n^0 \\ &+ \frac{d^2 \bar{\varphi}_n^0}{dz^2} = 4\pi \rho_n^0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

又 (1.12) は

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi)_n^0 &= a k_n \varphi(a, z) J_1(k_n a) - k_n^2 \bar{\varphi}_n^0 + \frac{d^2 \bar{\varphi}_n^0}{dz^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

即ち偏微分方程式 (1.11) 或は (1.12) は, 常微分方程式 (1.13) 或は (1.14) に移され, 容易にこれより  $\varphi_n^0$  は求められ, 従つて I により  $\varphi(r, z)$  が求められる事になる。

同様もし場が内径  $a$ , 外径  $b$  の環状領域ならば III, IV により (1.11) 及び (1.12) は夫々

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi)_m^0 &= -\kappa_m^2 \bar{\varphi}_m^0 - \frac{2}{\pi} \varphi(a, z) + \frac{2}{\pi} \varphi(b, z) \\ &\times \frac{J_0(\kappa_m a)}{J_0(\kappa_m b)} + \frac{d^2 \bar{\varphi}_m^0}{dz^2} = 4\pi \rho_m^0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

及び

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi)_m^0 &= -\kappa_m^2 \bar{\varphi}_m^0 - \frac{2}{\pi} \varphi(a, z) + \frac{2}{\pi} \varphi(b, z) \\ &\times \frac{J_0(\kappa_m a)}{J_0(\kappa_m b)} + \frac{d^2 \bar{\varphi}_m^0}{dz^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

となる。これより容易に  $\bar{\varphi}_m^0$  が求められ, III より  $\varphi(r, z)$  が得られる。

(2°)  $\theta(r, z)$  を円筒状或は環状の境界面を有する均質固体内に分布する温度とし,  $k^2$  を熱拡散率とすれば, 熱伝導現象は周知の如く方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k^2 \Delta \theta = k^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

に支配される。同様に  $C(r, z)$  を円筒状もしくは環状容器内の溶液の溶質の濃度とし、 $r$  に関して境界条件が与えられる場合には、拡散を支配する方程式は周知の如く、 $D$  を拡散常数とし

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

で与えられる。さて、これらの場合、もし過渡的な状態を取扱らば、ラプラス変換或はフーリエ変換を併用し、又もし定常状態；  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$  或は  $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$  の場合には全く (1°) そのままにハンケル変換のみで、 $\theta$  或は  $C$  を与える常微分方程式が得られる。

波動、振動現象は、振動量を  $u(r, z)$ 、伝播速度を  $v$  とすれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u$$

で表される事は周知の事であるが、これも殆んど同様である。

## 2 廻転レオメーターについて

前論<sup>3)</sup>で与えられ、変数分離法で解かれた、内筒底面及び自由表面の影響を考慮した、共軸円筒型廻転レオメーターに於ける境界値問題を、茲では有限ハンケル変換の応用例と見て、各部分解を得る処迄示す。その他の事及び詳細については別論<sup>4)</sup>を参照され度い。

固定した半径  $b$  の円筒容器に、複素剛性率  $G^*$ 、密度  $\rho$  の試料溶液（液体）を入れ、その内に共軸に捩れ常数  $k$  の針金で、半径  $a$ 、慣性モーメント  $I$  の内円筒を吊した時、試料溶液に浸されている部分の高さを  $h$ 、内外両円筒の底面間の距離を  $l$  とする（第1図参照）。

今針金の先端に角振動数  $\omega$ 、振幅  $\Psi_0$  の強性振動  $\Psi = \Psi_0 e^{i\omega t}$

を与える時、定常振動状態に於ける円筒の振動角を、

$$\theta = \theta_0 e^{i\omega t},$$

とし、円筒の軸を  $z$  軸、外円筒底面の中心を原点とする。試料の場所  $(r, \phi, z)$  に於ける角変位を

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$$

とすれば、この場合の境界値問題は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \beta^2 \varphi_0 &= 0, \\ \beta^2 &= \frac{\rho \omega^2}{G^*} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

境界条件：

$$\varphi_0(a, z) = \theta_0 ; \quad (l \leq z \leq l+h), \quad (2.2)$$

$$\varphi_0(b, z) = 0 ; \quad (0 \leq z \leq l+h), \quad (2.3)$$

$$\varphi_0(r, 0) = 0 ; \quad (0 \leq r \leq b), \quad (2.4)$$

$$\varphi_0(r, l) = \theta_0 ; \quad (0 \leq r \leq a), \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_0(r, z)}{\partial z}\right)_{z=l+h} = 0 ; \quad (a < r < b), \quad (2.6)$$

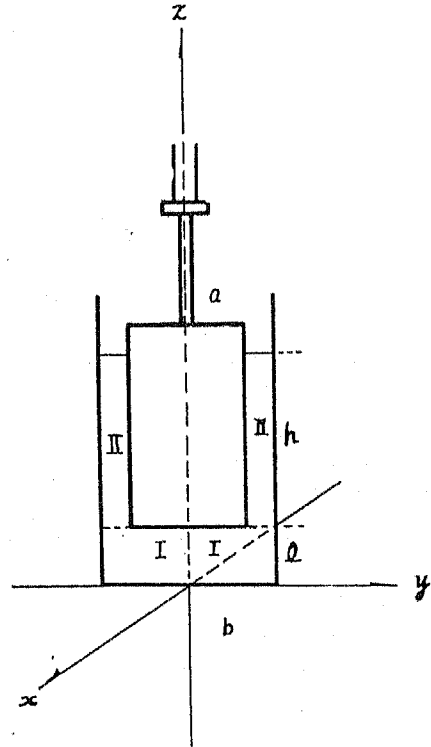


Fig 1

これは前論と同様に、先づ試料の占める領域を第1図の如く、半径  $b$ 、高さ  $l$  の円筒領域 I と、内径  $a$ 、外径  $b$ 、高さ  $h$  の環状領域 II に分けると、 $\varphi$  もそれに応じて

$$\varphi_0 = \varphi_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)} \quad (2.7)$$

の二つの部分に分けることができるので、問題は次の如き形式となる：

領域 I :

$$\varphi_0^{(2)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_0^{(1)}}{\partial z^2} + \beta^2 \varphi_0^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{境界条件;} \varphi_0^{(1)}(r, 0) = 0 ; \quad (0 \leq r \leq b), \quad (2.9)$$

$$\varphi_0^{(1)}(r, l) = \theta_0 ; \quad (0 \leq r \leq a), \quad (2.10)$$

$$\varphi_0^{(1)}(b, z) = 0 ; \quad (0 \leq z \leq l), \quad (2.11)$$

領域 II :

$$\varphi_0^{(1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_0^{(2)}}{\partial z^2} + \beta^2 \varphi_0^{(2)} = 0, \quad (2.12)$$

境界条件,

$$\varphi_0^{(2)}(a, z) = 0; \quad (l \leq z \leq l+h), \quad (2.13)$$

$$\varphi_0^{(2)}(b, z) = 0; \quad (l \leq z \leq l+h), \quad (2.14)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_0^{(2)}(r, z)}{\partial z} \right)_{z=l+h} = 0; \quad (a < r < b), \quad (2.15)$$

領域 I, II の境界面での条件

$$\varphi_0^{(1)}(r, l) = \varphi_0^{(2)}(r, l); \quad (a < r < b), \quad (2.16)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_0^{(1)}(r, z)}{\partial z} \right)_{z=l} = \left( \frac{\partial \varphi_0^{(2)}(r, z)}{\partial z} \right)_{z=l}; \quad (a < r < b), \quad (2.17)$$

### 2.1 $\varphi_0^{(1)}$ の計算

$$\varphi_0^{(1)} = \frac{U(r, z)}{r} \quad (2.18)$$

で,  $\varphi_0^{(1)}$  を  $U^{(1)}$  に変換し, 少し変形すれば, 方程式 (2.8) は

$$\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} - \frac{U^{(1)}}{r^2} = -\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z^2} - \beta^2 U^{(1)} \quad (2.19)$$

となる。条件 (2.9), (2.10), (2.11) は:

$$U^{(1)}(r, 0) = 0; \quad (0 \leq r \leq b), \quad (2.20)$$

$$U^{(1)}(r, l) = r\theta_0; \quad (0 \leq r \leq a), \quad (2.21)$$

$$U^{(1)}(b, z) = 0; \quad (0 \leq z \leq l), \quad (2.22)$$

そこで [定理] I の有限ハンケル変換

$$U^{(1)}(z) = \int_0^b r U^{(1)}(r, z) J_1(k_n r) dr$$

を考えよう。但し  $k_n$  は方程式  $J_1(kb) = 0$  の正根の一つを表わし, index  $\nu$  (今は  $\nu=1$ ) は省略してある。これで (2.19) の関係を変換すれば, [定理] II の (1.4) より同式の左辺は  $-bk_n U^{(1)}(b, z) J_1'(k_n b) - k_n^2 \overline{U^{(1)}}(z)$  となり。右辺は  $-\frac{d^2 \overline{U^{(1)}}}{dz^2} - \beta^2 \overline{U^{(1)}}(z)$  となる, (2.22)

を考慮して結局 (2.19) は  $\overline{U^{(1)}}(z)$  を定める方程式

$$\frac{d^2 \overline{U^{(1)}}}{dz^2} + \alpha_n^2 \overline{U^{(1)}} = 0 \quad (2.23)$$

$$\alpha_n^2 = \beta^2 - k_n^2 \quad (2.24)$$

を与える。(2.23) の一般解は  $C_n, D_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を任意の常数として

$$\overline{U_n^{(1)}} = C_n \cos \alpha_n z + D_n \sin \alpha_n z$$

である。然るに  $U^{(1)}(r, z)$  は条件 (2.20) を満すから, この条件を変換すれば

$$U^{(1)}(0) = \int_0^b r U^{(1)}(r, 0) J_1(knr) dr = 0 \quad (2.25)$$

であるから

$$C_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

となる。従つて

$$\overline{U_n^{(1)}}(z) = D_n \sin \alpha_n z \quad (2.26)$$

を得る。これと [定理] I から  $U^{(1)}(r, z)$  従つて (2.18) より  $\varphi_0^{(1)}$  が求められる:

$$U^{(1)}(r, z) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{U_n^{(1)}}(z) \frac{J_1(k_n r)}{[J_1(k_n b)]^2} \\ = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \sin \alpha_n z}{J_1^2(k_n b)} J_1(k_n r) \quad (2.27)$$

従つて

$$\varphi_0^{(1)}(r, z) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \sin \alpha_n z}{J_1^2(k_n b)} \frac{J_1(k_n r)}{r} \quad (2.28)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \alpha_n z \frac{J_1(k_n r)}{r} \quad (2.28)$$

茲に  $A_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は前論のそれであり, 本論の  $D_n$  とは

$$A_n = \frac{2D_n}{b^2 J_1^2(k_n b)} \quad \text{或は} \quad D_n = \frac{b^2 J_1^2(k_n b)}{2} A_n \quad (2.29)$$

なる関係にある。つまり前論の結果 (2.28) と今の結果 (2.28) とを比較すれば, 常数  $A_n$  の性格が稍々詳しく得られた事になる。勿論和は総ての正根についてとる。

### 2.2 $\varphi_0^{(2)}$ の計算

2.1 に於けると全く同様に

$$\varphi_0^{(2)} = \frac{U^{(2)}(r, z)}{r} \quad (2.30)$$

で,  $\varphi_0^{(2)}$  を  $U^{(2)}$  に変換すれば, 方程式 (2.12) 及び条件 (2.13), (2.14) は次の如くなる:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U^{(2)} = -\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2} - \beta^2 U^{(2)}, \quad (2.31)$$

及び

$$U^{(2)}(a, z) = a\theta_0, \quad (l \leq z \leq l+h), \\ U^{(2)}(b, z) = 0. \quad (2.32)$$

そこで有限ハンケル変換

$$\overline{U_n^{(2)}}(z) = \int_a^b r U^{(2)}(r, z) [J_1(\kappa_m r) Y_1(\kappa_m a) - J_1(\kappa_m a) \\ \times Y_1(\kappa_m r)] dr$$

を考える。言う迄もなく  $\kappa_m$  は  $J_1(\kappa b) Y_1(\kappa a) - J_1(\kappa a) \times Y_1(\kappa b) = 0$  の一つの正根である。これで方程式を変換すれば, その左辺は [定理] IV と条件 (2.32) により,

$$\frac{2}{\pi} \frac{J_1(\kappa_m a)}{J_1(\kappa_m b)} \overline{U_n^{(2)}}(z) - \frac{2}{\pi} U^{(2)}(a, z) - \kappa_m^2 \overline{U_n^{(2)}} = -\frac{2}{\pi} a\theta_0$$

$$-\kappa_m^2 \overline{U_m^{(2)}}$$

となり、右辺は  $-\frac{d^2 \overline{U_m^{(2)}}}{ds^2} - \beta^2 \overline{U_m^{(2)}}$

となるから、 $\overline{U_m^{(2)}}$  は次の式で与えられる：

$$\frac{d^2 \overline{U_m^{(2)}}}{ds^2} + r_m^2 \overline{U_m^{(2)}} - \frac{2}{\pi} a \theta_0 = 0, \quad (2.33)$$

$$r_m^2 = \beta^2 - \kappa_m^2 \quad (2.34)$$

これは容易にとけ  $E_m, F_m (m=1, 2, \dots)$  を常数として

$$\overline{U_m^{(2)}} = \frac{2 a \theta_0}{\pi r_m^2} + E_m \cos r_m s + F_m \sin r_m s$$

となるが、条件 (2.15) に依れば

$$\left[ \left( \frac{\partial \overline{U_m^{(2)}}(r, s)}{\partial s} \right)_{s=l+h} \right]_m = \left( \frac{\partial \overline{U_m^{(2)}}(s)}{\partial s} \right)_{s=l+h} = 0$$

であるから、 $F_m$  は

$$F_m = E_m \tan r_m (l+h) \quad (m=1, 2, \dots)$$

となる。故に

$$\overline{U_m^{(2)}} = \frac{2 a \theta_0}{\pi r_m^2} + E_m \frac{\cos r_m (l+h-s)}{\cos r_m (l+h)} \quad (2.35)$$

そこで「定理」IIIにより  $U^{(2)}(r, s)$  従つて (2.30) から  $\varphi^{(2)}(r, s)$  が次の如く得られる：

$$\begin{aligned} U^{(2)}(r, s) &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\kappa_m^2 J_1^2(\kappa_m b)}{J_1^2(\kappa_m a) - J_1^2(\kappa_m b)} \left\{ \frac{2 a \theta_0}{\pi r_m^2} \right. \\ &+ E_m \frac{\cos r_m (l+h-s)}{\cos r_m (l+h)} \left. \right\} \times [J_1(\kappa_m r) Y_1(\kappa_m a) \\ &- J_1(\kappa_m a) Y_1(\kappa_m r)] \\ &= a \theta_0 \frac{J_1(\beta r) Y_1(\beta a) - J_1(\beta a) Y_1(\beta r)}{\Delta} \\ &+ \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 E_m \kappa_m^2 J_1^2(\kappa_m b)}{J_1^2(\kappa_m a) - J_1^2(\kappa_m b)} \frac{\cos r_m (l+h-s)^2}{\cos r_m (l+h)} \\ &\times [J_1(\kappa_m r) Y_1(\kappa_m a) - J_1(\kappa_m a) Y_1(\kappa_m r)] \quad (2.36) \end{aligned}$$

但し  $\Delta = J_1(\beta a) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta a)$  であり、(2.36) の第一項は「Lemma」1° を用い変形してある\* 故に

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(2)}(r, s) &= \frac{a \theta_0}{r} \frac{J_1(\beta r) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta r)}{J_1(\beta a) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta a)} \\ &+ \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 E_m \kappa_m^2 J_1^2(\kappa_m b)}{J_1^2(\kappa_m a) - J_1^2(\kappa_m b)} \frac{\cos r_m (l+h-s)}{\cos r_m (l+h)} \\ &\times \frac{J_1(\kappa_m r) Y_1(\kappa_m a) - J_1(\kappa_m a) Y_1(\kappa_m r)}{r} \quad (2.37) \\ &= f(r) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\cos r_m (l+h-s)}{\cos r_m (l+h)} \end{aligned}$$

$$\times \frac{J_1(\kappa_m r) Y_1(\kappa_m a) - J_1(\kappa_m a) Y_1(\kappa_m r)}{r} \quad (2.37)$$

前論の結果と比較するために (2.37) を (2.37') の形においた。云う迄もなく

$$B_m = \pi^2 E_m \kappa_m^2 J_1^2(\kappa_m b) / \{J_1^2(\kappa_m a) - J_1^2(\kappa_m b)\} \times 2$$

或は、 $E_m = 2 \{J_1^2(\kappa_m a) - J_1^2(\kappa_m b)\} / \pi^2 \kappa_m^2 J_1^2(\kappa_m b)$   $\times B_m$  (2.38) であり、又

$$f(r) = \frac{a \theta_0}{r} \frac{J_1(\beta r) Y_1(\beta b) - J_1(\beta b) Y_1(\beta a)}{\Delta}$$

は、既に前の諸論<sup>3)</sup>に導かれている二次元的な解である。前論<sup>3)</sup>の解法に於いては、物理的意味から、 $\varphi_0^{(2)}$  を二次元的解に、三次元的考慮による補正項  $\Psi(r, s)$  を加え

$$\varphi_0^{(2)}(r, s) = f(r) + \Psi(r, s) \quad (2.39)$$

において、 $\Psi(r, s)$  を通常の変数分離法で求めたのであるが、その  $\Psi(r, s)$  は正しく本論の (2.37) の第二項と一致している。従つて本論の取扱は、前論の物理的意味から推定した関係 (2.39) の数学的証明と考えてもよい。これ前論の  $\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}$  の解法の別法として、その求め方を本論に引き出した所以の一つである。

$\varphi_0^{(1)}$  の  $A_n$  (或は  $D_n$ ) 及び  $\varphi_0^{(2)}$  の  $B_m$  (或は  $E_m$ ) は勿論、領域 I, II の境界面の接続条件 (2.16), (2.17) で定められる。これについては既に述べた如くで茲ではふれないが、条件 (2.16), (2.17) とより  $A_n$  を求め、消去して  $E_m$  に関する無限次元の一次聯立方程式が得られる。<sup>4)</sup>

終りに、かくて  $E_m$  の方程式を近似的に解いて  $E_m$  が得られれば、 $A_n$  も得られ内筒測面の抵抗を、 $M = M_0 e^{i\omega t}$ 、底面のそれを  $M' = M_0' e^{i\omega t}$  とすれば、 $M, M'$  は

$$\begin{aligned} M &= -e^{i\omega t} \iint G^* a^3 \left( \frac{\partial \varphi_0^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=a} d\phi ds \\ &= -2\pi a^3 G^* e^{i\omega t} \int_l^{l+h} \left( \frac{\partial \varphi_0^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=a} dz \\ &= -2\pi a^3 h G^* \psi_0 - 2\pi a^3 G^* \chi_0 \\ M' &= -e^{i\omega t} \iint G^* s \left( \frac{\partial \varphi_0^{(1)}}{\partial s} \right)_{s=l} r d\phi \\ &= -2\pi G^* e^{i\omega t} \int_0^a \left( \frac{\partial \varphi_0^{(1)}}{\partial s} \right)_{s=l} r^2 dr \\ &= 2\pi a^3 G^* \phi_0 \end{aligned}$$

として求められ、測定量

$$\mu = \frac{1}{2\pi h a^2} \left( I \omega^2 - \kappa - \frac{\kappa}{\psi_0 / \theta_0} \right)$$

から、複素剛性率  $G^*$  が次の方程式

\* 逆変換を用いてある。勿論逆変換は一般には一義的には定まらないが、ディリクレの条件を満足する逆変換は一義的に定まる。

$$\nabla^2 \left\{ \psi + \frac{a}{h} (\chi + \psi) \right\} = \mu$$

から得られる事及び  $\nabla^2 = G' + i\omega\mu'$  と分ければ、 $G'$  及び  $\mu'$  は夫々試料の動的剛性率及び精度を表わす事をつけ加えておきたい。

$$\begin{aligned} \text{茲に } \psi &= \beta a \frac{J_2(\beta a)Y_1(\beta b) - J_1(\beta b)Y_2(\beta a)}{\Delta} \\ \chi &= -\frac{2}{\pi a^2 \theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2E_m \kappa_m^2 J_1(\kappa_m b)}{J_1^2(\kappa_m a) - J_2^2(\kappa_m b)} \times \\ &\quad \frac{\sin r_m h}{r_m \cos r_m (l+h)}, \\ \Phi &= \frac{1}{a\theta_0} \sum A_n \frac{\omega_n}{k_n} \cos \alpha_n l J_2(k_n a) \end{aligned}$$

とおいた。

### 3 有限な長さの円筒型蓄電器の内部の電場

有限な長さの環状或は円筒状領域を持つ、古典静電気学の問題の最も簡単な例として、空気媒質の円筒型蓄電器の内部の電位、電場を考察しよう。通常は両端の影響をなくするために無限に長い共軸円筒を考え、単位長さ当りの荷電をとり考察する。

従つて電力線は総て両円筒面に垂直となり、等電位面は常に両円筒間に存する共軸円筒となる。そして有限な円筒としての取扱は見当らない様である。勿論両円筒の半径に比して充分長いものであれば両端の影響は無視されよう。長さが比較的短いものでは、電力線分布が非常

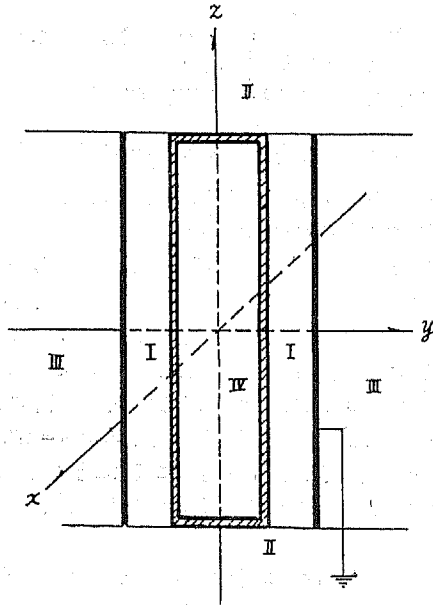


Fig 2

に違つて来る。今それらの傾向を考慮しよう。

半径  $a$ , 正電荷  $Q$ , 電位  $\varphi_0$  の内筒と、接地した半径  $b$  の外円筒から成る共軸円筒型蓄電器を考える。両端の影響は、両端に於ける境界条件を如何に与えるかにより定まるが、茲では両円筒の長さが  $2h$  で、内筒の両端面は閉じているとし、両円筒間の空間は開いているものとしよう。今円筒軸を  $z$  軸に、その中点を原点にとる。媒質は空気であるから、空間電荷は無視され、電位  $\varphi(r, z)$  はラプラスの方程式から定まる。(1.12) より)

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

境界条件は

$$\varphi(a, z) = \varphi_0 \quad (3.2)$$

$$\varphi(b, z) = 0 \quad ; \quad (-h \leq z \leq h) \quad (3.3)$$

$$\varphi(\infty, z) = 0, \quad (3.4)$$

$$\varphi(r, \pm \infty) = 0 \quad (3.5)$$

今考察す可き環状領域を I としよう。I に於ける電位、電場は両端が開いているから、外部の場に両端で接続せねばならない。両端外部の領域を II としよう。それに応じ  $\varphi_0$

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \quad (3.6)$$

に分け、境界値問題を次の形に設定する：

領域 I :

$$\varphi^{(2)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi^{(1)}(a, z) = \varphi_0 \quad ; \quad (-h \leq z \leq h) \quad (3.8)$$

$$\varphi^{(1)}(b, z) = 0.$$

領域 II :

$$\varphi^{(1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.10)$$

$$\varphi^{(2)}(r, \pm \infty) = 0, \quad (3.11)$$

$$\varphi(\infty, z) = 0. \quad (3.12)$$

両領域境界面に於いて：

$$\varphi^{(1)}(r, h) = \varphi^{(2)}(r, h), \quad (3.13)$$

$$\varphi^{(1)}(r, -h) = \varphi^{(2)}(r, -h), \quad (a < r < b) \quad (3.14)$$

$$\vec{E}^{(1)}(r, h) = \vec{E}^{(2)}(r, h),$$

$$\vec{E}^{(1)}(r, -h) = \vec{E}^{(2)}(r, -h),$$

$$\text{但し } \vec{E}^{(1)} = -\text{grad } \varphi^{(1)},$$

$$\vec{E}^{(2)} = -\text{grad } \varphi^{(2)}$$

$$\varphi^{(2)}(r, h) = \varphi_0,$$

$$\varphi^{(2)}(r, -h) = \varphi_0, \quad (0 < r < a),$$

云う迄もなく内筒内部の空間Ⅳの電位は到る處で  $\varphi_0$  あり、電場は0である。

3.1  $\varphi^{(1)}$  の計算

例により有限ハンケル変換

$$\overline{\overline{\varphi_m}}(z) = \int_a^b r \varphi(r, z) [J_0(\kappa_m r) Y_0(\kappa_m a) - J_0(\kappa_m a) Y_0(\kappa_m r)] dr$$

を考え (3.7) を変換すれば〔定理〕Ⅳにより：

$$-\kappa_m^2 \overline{\overline{\varphi_m}} - \frac{2}{\pi} \varphi^{(1)}(a, z) + \frac{2}{\pi} \varphi^{(1)}(b, z) \frac{J_0(\kappa_m a)}{J_0(\kappa_m b)} + \frac{d^2 \overline{\overline{\varphi_m}}}{dz^2} = 0$$

条件 (3.8) 及び (3.9) を考慮すれば、上式は

$$\frac{d^2 \overline{\overline{\varphi_m}}}{dz^2} - \kappa_m^2 \overline{\overline{\varphi_m}} - \frac{2}{\pi} \varphi_0 = 0$$

となり、これより  $\overline{\overline{\varphi_m}}^{(1)}$  が求められる。明らかに

$\overline{\overline{\varphi_m}}^{(1)}(r, z) = \overline{\overline{\varphi_m}}^{(1)}(r, -z)$  ( $a \leq r \leq b$ ) となるべき事により

$$\overline{\overline{\varphi_m}}^{(1)} = -\frac{2}{\pi} \frac{\varphi_0}{\kappa_m^2} + Am \frac{e^{\kappa_m z} + e^{-\kappa_m z}}{2} = -\frac{2}{\pi} \frac{\varphi_0}{\kappa_m^2} + Am \cosh \kappa_m z$$

である。従つて〔定理〕Ⅲより、 $\varphi^{(1)}(r, z)$  が次の如く得られる：

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(r, z) &= \frac{\pi^2}{4} \sum_m \frac{2\kappa_m^2 J_0^2(\kappa_m b)}{J_0^2(\kappa_m a) - J_0^2(\kappa_m b)} \left\{ -\frac{2}{\pi} \frac{\varphi_0}{\kappa_m^2} + Am \cosh \kappa_m z \right\} [J_0(\kappa_m r) Y_0(\kappa_m a) - J_0(\kappa_m a) Y_0(\kappa_m r)] \\ &= \frac{\varphi_0}{\log \frac{a}{b}} \log \frac{r}{b} + \frac{\pi^2}{4} \sum_m \frac{2Am \kappa_m^2 J_0(\kappa_m b) \cosh \kappa_m z}{J_0^2(\kappa_m b) - J_0^2(\kappa_m a)} \\ &\quad \times [J_0(\kappa_m r) Y_0(\kappa_m a) - J_0(\kappa_m a) Y_0(\kappa_m r)] \quad (3.15) \end{aligned}$$

但し上式の第一項の計算には〔Lemma〕2の関係〔1.10〕を用いてある。これは明らかに条件を(3.8), (3.9)を満す(3.7)の解である。

3.2  $\varphi^{(2)}$  の計算

〔に於ける場を考察する目的であるが、参考のため両端外部領域Ⅱの場をも考察しよう。これは有限ハンケル変換でなく通常のハンケル変換を用いる。即ちフーリエ・ハンケルの積分定理に依れば函数  $f(r)$  が或る条件を満す時、ハンケル変換を

$$\overline{f}(k) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(kr) dr \quad (\nu \geq -1/2) \quad (3.16)$$

で定義すれば、 $f(r)$  は対称核の逆変換で表わされる、即ち

$$f(r) = \int_0^\infty k f(k) J_\nu(kr) dk \quad (3.17)$$

が證明される。そこでハンケル変換

$$\overline{\varphi}(k, z) = \int_0^\infty r \varphi(r, z) J_0(kr) dr$$

を考えれば、部分積分法により有限ハンケル変換の場合と同様に、次の関係が成立つことが判る：

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\varphi}^{(2)}}{\partial r} = -k^2 \overline{\varphi}^{(2)}(k, z)$$

従つて (3.10) 式を、変換すれば

$$\frac{d^2 \overline{\varphi}^{(2)}}{dz^2} - k^2 \overline{\varphi}^{(2)} = 0$$

$\varphi^{(2)}(r, z) = \varphi^{(2)}(r, -z)$  を考慮すれば、上式より

$\overline{\varphi}^{(2)}(k, z)$  が求められる：

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(k, z) &= C e^{-kz} ; (z > h), \\ &= C e^{kz} ; (z < -h). \end{aligned}$$

これを用い、(3.17)の逆変換を行えば  $\varphi^{(2)}(r, z)$  が求められる：

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(r, z) &= \int_0^\infty k \overline{\varphi}^{(2)}(k, z) J_0(kr) dk \\ &= \int_0^\infty k \{ C e^{\pm kz} \} J_0(kr) dk \\ &= C' \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} ; (z > h), \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$= -C' \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} ; (z < -h). \quad (3.18)$$

明らかに、これは  $\Delta \varphi^{(2)} = 0$  を満し而も

$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi^{(2)}(r, z) = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^{(2)}(r, z) = 0$  を満すから条件 (3.11), (3.12) に適う (3.10) の解である。

3.3 電力線、等電位面の概要

(3.15)の係数列  $Am (m=1, 2, \dots)$  及び (3.18), (3.18)の常数  $C$  は、円筒両端の接続条件及び領域Ⅱ、Ⅴの境界面に於ける接続条件から定められるべきものであるが、これらの決定は、余り特殊問題に入るので、既述の方針に従つてここでは立ち入らない。領域Ⅰの有様の概要を述べる為には必ずしも係数列  $Am (m=1, 2, \dots)$  の決定は必要でなく、参考迄に調べるⅡの場の概略の有様についても常数  $C$  の決定は必要でない。

1<sup>0</sup> 内部の場の模様

(3.15)の  $\varphi_0^{(1)}(r, z)$  の形を考察しよう。その第一項は明らかに二次元の場合の解である。  $\cosh \kappa_m z$  は偶函数で  $|z|$  と共に急激に増加する故、 $\varphi^{(1)}(r, z)$  は一定の

$r$  に対して円筒の中央部 ( $z=0$ ) で最大であり、それより上つても下つても急減する。次に電力線を考えるに

$$E_z^{(1)} = -\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial z} = -\sum_m \frac{2A_m \kappa_m^3 J_0^2(\kappa_m b) \sinh \kappa_m z}{J_0^2(\kappa_m a) - J_0^2(\kappa_m b)} \times [J_0(\kappa_m r) Y_0(\kappa_m a) - J_0(\kappa_m a) Y_0(\kappa_m r)] \quad (3.19)$$

であるから、 $E_z^{(1)}(r, 0) = 0$  となり、内筒の荷電は正である故、中央部で電力線は内筒に垂直に出て、外筒に垂直に入っている。 $z$  キロならば  $E_z^{(1)}$  キロであるから中央部から上下に行くに従つて、段々  $E_z^{(1)}$  成分が大きくなり電力線は上下に彎曲して来る。勿論 (3.19) より明らかな様に内外円筒面上では何処でも  $E_z^{(1)}(a, z) = E_z^{(1)}(b, z) = 0$  で垂直に出て垂直に入る。

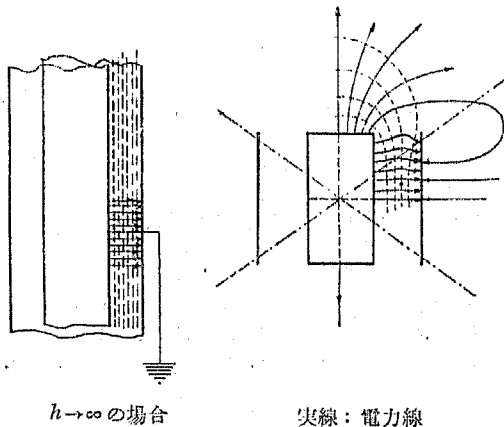


Fig 3

軸方向から見れば、明かに放射状に均一に内筒から出て外筒に入っている。

両端の領域 I, II の境界面では等電位面及び電力線は I, II の部分解から与えられたものが連続するべきである。

2<sup>o</sup> 外部 (領域 II) の場の模様

$\varphi^{(2)}(r, z) = \varphi^{(2)}(r, -z)$  であるから、(3.18) より

$$\varphi^{(2)}(r, z) = C \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (z > h) \text{ を調べよう。先}$$

づ軸上では  $\varphi^{(2)}(0, z) = C \frac{I}{z^2}$  であるから等電位面は  $z = \text{const}$  即ち軸に垂直になる。電力線の様子を調べる為に電場を求める：

$$Er = -\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} = 3C \frac{rz}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \quad (3.20)$$

$$Ez = -\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} = C \left\{ \frac{3z^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{1}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right\} \quad (3.21)$$

これより見ても軸上では  $Er(0, z) = 0$  で電場は軸の方向、上向きであるから軸が一本の電力線となる。軸上から離れるに従い、 $Er$  が増加して来るから電力線は鉛直から彎て来る。丁度、細い針金を束にして垂直に手に持つた様になる。

次に  $Ez = 0$  の軌跡を考えて見よう。(3.21) より、の条件は、 $z^2 + r^2 = \rho^2$  とおけば

$$3z^2/\rho^5 - 1/\rho^3 = 0$$

となり従つて  $z/\rho = 1/\sqrt{3}$  となり、原点を頂点とした頂角約 54.7 $^\circ$  の円錐面 ( $z < -h$  も考えれば 2 箇の円錐) となる。この円錐面と電力線は総て水平に交わる。以上から場の概略を推定する事が出来る。しかし両端面附近の詳細な様子は更に領域 III の部分角を求め、各々の部分解を接続して係数を決定し、数値計算に依らなければわからない。

#### 4 表面検査用電子顕微鏡陰極附近の電場

最後に軸は有限でもよいが、一応半無限として、 $r$  に関する境界値が与えられている問題の例として、谷氏による表面検査用電子顕微鏡の陰極附近の電場の計算の別法を示して見よう。谷氏の説明を借りれば、高温に熱せられた物体の表面から放出する熱電子に高電圧を加え、之を陰極線束として、電子レンズにかけて収束して物体表面の電子による拡大像を形成し、以て表面の高温に於ける構造をしらべるのが表面検査用の電子顕微鏡のねらい点である。

此の顕微鏡に於ては表面に働く電場がかなり広い範囲に亘つて一様に分布していること、従つてその方向も陰極面に垂直であることが望ましいのである。この目的のために極は円板状の陰極 C とその周囲をかこむ共軸の保護円輪 B 及び円筒型陽極 A から成り立っていて、B は C に対し低電位に在る。

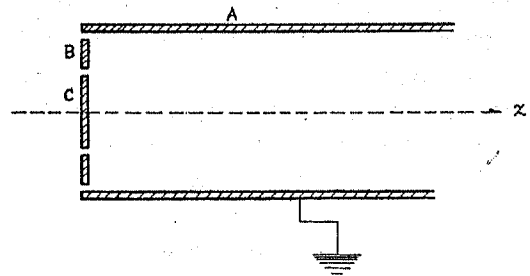


Fig 4.



此の系の中心軸をZとし、B及びCの面を  $z=0$  とし、C, Bの電位を夫々  $\varphi_1, \varphi_2$ , Aの電位をOとすると  $\varphi$  を与える式は次の様になる

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{4.1}$$

$$\varphi(R, z) = 0, \tag{4.2}$$

$$\varphi(r, 0) = \begin{cases} \varphi_1 & ; 0 \leq r \leq a, \\ \varphi_2 & ; a < r \leq R, \end{cases} \tag{4.3}$$

そこで前と同様に定理IIにより:

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi)_n^0 &= Rkn^0(R, z) J_1(k_n a) - k_n^2 \overline{\varphi_n^0} \\ &+ \frac{d^2 \varphi_n^0}{dz^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

$\varphi$  は  $z$  の増加と共に0に近づくから  $\varphi_n^0$  も  $z$  と共に0に近づく。従つて

$$\begin{aligned} \varphi_n^0 &= A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z} \quad (z > 0) \\ &= B_n e^{-k_n z} \end{aligned}$$

となり〔定理I〕より電位  $\varphi(r, z)$  は与えられる:

$$\varphi(r, z) = \sum_n \frac{2}{R^2} \frac{B_n e^{-k_n z}}{\{J_0'(k_n R)\}^2} J_0(k_n r)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } B_n &= \int_0^R r \varphi(r, 0) J_0(k_n r) dr \\ &= \int_0^a r \varphi(r, 0) J_0(k_n r) dr + \\ &\int_a^R r \varphi(r, 0) J_0(k_n r) dr \\ &= \varphi_1 \int_0^a r J_0(k_n r) dr + \varphi_2 \int_a^R r J_0(k_n r) dr \\ &= \frac{\varphi_1}{k_n} a J_1(k_n a) + \frac{\varphi_2}{k_n} \{R J_1(k_n R) \\ &\quad - a J_1(k_n a)\} \\ &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k_n} a J_1(k_n a) + \frac{\varphi_2}{k_n} R J_1(k_n R) \end{aligned}$$

詳細は谷氏の論文(6)を参照され度い。

あとがき

以上に於いて、回転レオメーター及び円筒型蓄電器に於ける、著者の行つた三次元的取扱を例にとり乍ら、或るべく一般的にそして統一的に、有限な長さを持つ円筒状及び環状領域に於ける境界値問題の取扱の大要を示した。即ちかかる問題ではその性格に応じて幾つかの部分領域に分け、解の各々の領域に於ける部分解を求め、後でこれを接続すれば良いのであるが、本論ではその目的から、有限ハンケル変換を統一的に用い、固有の境界条件を満す各部分解を求める処をより一般的に紹介した。

もとより境界値問題の完成には未だ各部分解を接続する事が残されている。それは複雑ではあるが、併し単にフーリエ・ベッセル級数及び類似級数の間の関係を与えられ、それらの係数を計算するだけの問題でもあり、ここで取扱うには、余り個別的な特殊問題となるので別論に譲つた。尙本論の計算は更に整理され簡潔にならねばならない部分もあるが、それは原理的な形式を示そうとする本論の目的を損うものではなからう。然し成る可く近い将来に計算を整理して、特殊問題の解析に備え度いと思ふ。

終りに、本論の図の作製及び校正等に関しては、久保孝君及び河合良一君の多大なる御協力を得た。茲に記して感謝の意を表し度い。

文 献

- 1) 例えは I, N, Sneddon ; Fourier Transforms 191 (1951)  
C, J, Tranter; Quart. Jour. Mech. Applied Math. 1, 281 (1945)
- 2) 岡小天, 高見昭, 小林理研報告3, No.1 (1953) I
- 3) 岡小天, 小林理研報告3, No.1(1953) II
- 4) 岡小天, 佐藤良泰, 昭和28年10月19日, 日本物理学会年会で講演  
岡小天, 佐藤良泰, 小林理研報告3 (1953) III (印刷中)
- 5) I. N. Sneddon; Phil. Mag. 37 17 (1946)  
; Proc. Cambridge Phil. Soc. 41, 29 (1945)  
; Foudrier Transforms 82 (1951)
- 6) 谷安正, 応用物理, 10, 24 (1941), 静電場 182 (1942)

Summary

It is considered to be an excellent method to use the finite Hankel transforms for solving the boundary value problems on cylindrical or annular domains with finite length. In order to solve these problems. the domains are at first divided into several proper parts according to their properties, and thus the problem can be solved for each part, and finally the partial solutions are unified.

In this paper, taking a rotation rheometer and a cylindrical condenser as examples, we have shown only how the partial solutions to satisfy each proper boundary condition are obtained by means of finite Hankel transforms.

(Laboratory of Mathematics, Faculty of Textile and Sericulture, Shinshu University and Kobayashis Institute of Physics)