ONE THEOREM ON THE VECTOR SPACE.

安　東　康　齋 *

Lie 環 R で $[R, R]$ は R の ideal になるが，L. Pontrjagin- *Topological Groups,* P. 266 でも C. Chevalley- *Theory of Lie Groups,* P. 125 でも $[R, R]$ を含む最小の linear space として論じて居るので，$[R, R]$ がそのまゝ linear space である事を注意して置く，証明は elemental である。

R を field P の上の n 次元 vector space とする。R の basis を $\{e^1, \cdots\cdots, e^n\}$ と書く，又 R に於ける積を $[e^i, e^j] = \sum_k C^k_{ij} e^k$

又は，

$$[a, b] = \sum_{i,j} C^k_{ij} a^i b^j$$

で定義する。

次の定理を証明すれば吾々の目的は達せられる。

定理 R の元 a, b の積 $[a, b]$ の総ての集合は vector space である。即ち任意の $\alpha, \beta \varepsilon P$; $a, b, c, d \varepsilon R$ に対して

$$(1)\quad \alpha[a, b] + \beta[c, d] = [x, y]$$

を満たす $x, y \varepsilon R$ が存在する。

証明 (1) より

$$(2)\quad \alpha \sum_{i,j} C^k_{ij} a^i b^j + \beta \sum_{i,j} C^k_{ij} c^i d^j = \sum_{i,j} C^k_{ij} x^i y^j \qquad k = l, \cdots\cdots, n.$$

即ち

$$(3)\quad \sum_{i,j} C^k_{ij} x^i y^j = K^k, \qquad k = l, \cdots\cdots, n.$$

但し

$$(4)\quad K^k = \sum_{i,j} C^k_{ij} (\alpha a^i b^j + \beta c^i d^j) \qquad k = l, \cdots\cdots n.$$

(3)から，n-n^2- matrix, n-n^2+1-matrix:

$$\begin{pmatrix} C^1_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^1_{kl} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^n_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^n_{kl} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C^1_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^1_{kl} \; K^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^n_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^n_{kl} \; K^n \end{pmatrix}$$

の rank は相等しい，これを m と置き，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} C^1_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^1_{kl} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^m_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots C^m_{kl} \end{pmatrix} = m$$

と仮定すると，方程式(3)の最初の m 個：

$$(5)\quad \sum_{i,j} C^k_{ij} x^i y^j = K^k, \qquad k = l, \cdots\cdots, m.$$

が独立である，此の方程式の根の存在を証明すればよい。

---

* 信州大学繊維学部数学研究室

今

$$(6)\quad \begin{vmatrix} C^1_{i_1j_1} \cdots\cdots\cdots\cdots C^1_{i_mj_m} \\ C^m_{i_1j_1} \cdots\cdots\cdots\cdots C^1_{i_mj_m} \end{vmatrix} \neq O$$

と仮定し

$$x^i = O \qquad (i \neq i_\nu\ ,\ \nu=1,\cdots\cdots,m)\ ,$$

$$y^j = O \qquad (j \neq j_\mu\ ,\ \mu=1,\cdots\cdots,m)\ ,$$

と置く。又簡単に i_ν , j_μ を夫々 ν, μ と書く事にすると(5)は

$$(7)\quad \sum_{\nu,\mu} C^k_{\nu\mu} x^\nu y^\mu = K^k, \qquad k=1,\cdots\cdots m$$

となる。

行列式 $\det(\sum_\nu C^i_{\nu\mu} x^\nu)$ は変数 $x^1, \cdots\cdots, x^m$ の n 次の函数で(6)から恒等的には零にならない事がわかるから

$$(8)\quad \det(\sum_\nu C^k_{\nu\mu} x^\nu_0) \neq O$$

を満たす P の元 $x^1_0, \cdots\cdots, x^m_0$ を見出し得る。

方程式 $\sum_\mu (\sum_\nu C^k_{\nu\mu} x^\nu_0)\ y^\mu = K^k$

の根を $y^l_0, \cdots\cdots, y^m_0$ とすれば, $\{x^i,\ y^j\}$:

$$x^i = \begin{cases} x^\nu_0 & (i=i_\nu) \\ o & (i \neq i_\nu) \end{cases} \qquad \nu=1,\cdots\cdots,m,$$

$$y^j = \begin{cases} y^\mu_0 & (j=j_\mu) \\ o & (j \neq j_\mu) \end{cases} \qquad \mu=1,\cdots\cdots,m,$$

は方程式(5)の根である。

(8 / 2 / 51)