Tsukuba Psychological Research
2000, **22**, 85-92

算数・数学教育研究に寄与する認知の科学の視点の抽出と吟味

筑波大学大学院(博)心理学研究科　島田　英昭

筑波大学心理学系　海保　博之

An examination of cognitive perspectives that contribute to mathematics education research

Hideaki Shimada and Hiroyuki Kaiho (*Institute of Psychology, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8572, Japan*)

Developments of cognitive sciences over almost half a century have had a great impact on research into mathematics education. In this paper, we identify 15 cognitive points of view that suggest effective research strategies for mathematics education, and examine these in terms of the cognitive characteristics of children, teaching materials and teaching methods. Finally we propose several promissing approaches for further research.

Key words: cognitive science, mathematics education research, cognitive characteristics of children, teaching materials, teaching methods

はじめに

1950年代のPiagetによる子どもの心理論理の解明が，算数・数学教育研究に多大の影響を与えたことはよく知られている．これを，算数・数学教育研究への心理学からの影響の第1の波とするなら，第2の波が，時代的には重複しながらも現在に及んでいる，認知の科学(認知科学と認知心理学)からのそれである．ほぼ半世紀にわたる認知の科学の発展が算数・数学教育研究に何をもたらし，今後，もたらすことが期待されているかを，本稿では，認知の科学が明らかにしてきた子どもの基本的な認知特性という観点から検討してみる．

ところで，Piagetによる第1の波と認知の科学による第2の波とを比較してみると，いずれも算数・数学教育の場で子どもがどのように思考をめぐらしているのかについての知見を提供した点で共通しているが，その知見の内容あるいは知見の提供の仕方には，次のような違いがある．

Piagetが提供した知見は，論理発達という領域に限定されていること，しかも，その知見の提供の仕方も極めて理論志向(トップダウン)的であるのに対して，認知の科学が提供した知見は，体系的ではないが，算数・数学教育のカリキュラムのかなり広範な領域にわたっていること，その提供の仕方は極めて実証・検証志向(ボトムアップ)的である．

さて本稿では，認知の科学の算数・数学教育研究への影響について次の3つの領域に分けて考察する．

- 課題解決者としての子どもの認知特性の解明
- 子どもの認知特性に配慮した教材開発
- 子どもの認知特性に配慮した教授法の開発

いずれについても，算数・数学教育研究にとって有効と思われる，認知の科学が明らかにした基本的な観点を抽出して，それに関連する研究事例を紹介するという形で論を進めていく．

1．子どもの認知特性

今では常識となっている，子どもには子どもなりの世界があるとする子ども観，そして，それがどんな世界なのかを垣間見せてくれたのがPiagetであった．「子どもは小さな科学者である」にならうなら，「子どもは小さな課題解決者である」が，本

稿での基本的な子ども観である．ここで，算数・数学での課題解決とは，よく定義された領域において，計算手順や論理を操れることで解が発見できることを意味している．

なお，第1で抽出された特性は，第2と第3でのそれと基本的には同じであるが，教育実践とは直接にはかかわっていないものである．

1.1．子どもはスキーマを持つ

認知科学では，知識の表象に関して，その形成論，表現論，運用論の3つをめぐって研究がなされてきた．このうち，表現論と運用論を射程に入れて構築されたのが，スキーマ理論である．

知識の表現論としてのスキーマ理論の特徴は，ともすると論理ベースで構築されがちな知識表現に対して，知識要素もそれらの関係も子どもの認知的実態に合わせたダイナミックな表現になっているところにある．そして，運用論としてのスキーマ理論の特徴も，子どもの「誤り」さえも説明できるような自然で汎用性の高いものとなっているところにある．

研究事例1.1　「連想マップで知識状態を知る」

課題解決に際して，子どもがすでに何を知っていて何を知らないかを教師が知ることは，積み上げ教科である算数・数学教育では必須である．Novak & Gowin(1984)は，キーワードからの自由連想語をネットワーク表現する手法を概念地図法と呼び，算数・数学の領域でも，子どもの算数・数学に関する知識を表現する試みを行なっている．

1.2．子どもは「計算的」である

認知科学は，表象とともに計算という基本テーゼがあることはよく知られている．計算テーゼとは，認知活動を究極的にはコンピュータ・シミュレーションできる形でモデル化することである．

論理ベースより経験ベース，ヒューリスティクスベースで行なう傾向の強い子どもの認知活動を，計算論的にとらえるのは挑戦的ではあるが，かなりの困難を伴う．取り上げる課題を限定せざるをえないのが実情である．

研究事例1.2　「大きさの順に並べる」

何本かの棒を大きさの順に並べる課題は，4歳の子どもでは，隣り合う2本についてはできても，すべての棒を大きさ順に並べることはできない．こうした子どもの知的活動をYoung(1979)は，次に例示するような10個のプロダクション・システムで記述できることを示した．たとえば，

・if 現在の目標が別の棒を置くことならば，then 最も長い棒を取れ

・if 現在の目標が別の棒を置くことで，棒の新しい配列を終えたところならば，then 新しい位置に置かれた棒がその系列内の隣の棒より大きいかどうかを調べること

1.3．子どもの誤りにも法則がある

子どもは課題解決に際して，自分なりの解決方略を適用する．この解決方略が正しくない場合，課題の解決を誤る．このような誤りは，自らの解決方略に従ったものであるため，単なる不注意による誤りと異なり，誤り方に一貫性(法則)が見られる．どのような法則を子どもが持っているか，それらがどのように形成され，修正のための支援方略は何かを見つけ出すことが研究上の一つの課題となる．

研究事例1.3　「計算バグ発生のメカニズムを探る」

計算バグ発生のメカニズムについて，Brown & VanLehn(1980)は「間に合わせ理論(repair theory)」を提唱している．間に合わせ理論では，2段階のプロセスを想定する．第1段階は，何らかの不完全な知識を持つ人が，自らの手続きでは対応できない状態に陥る．この状態を「いきどまり(impasse)」と呼ぶ．第2段階は，いきどまりの状態から抜け出すために，自らの既有知識を用いて，間に合わせようとする．

例えば，「上の数より下の数の方が大きければ，借りよ」というルールが，習っていないなどの理由で欠落しているとする．このとき，「745－282」のような問題で，「4－8」の部分で，いきどまりに陥る．ここで，そのルールを場当たり的な方略で埋め合わせようとする．例えば，「省略(skip)」という手段がとられれば，「4－8」はできないので，答えをとばして次の桁を処理する(745－282＝53)．また，「縦の交換(swap vertically)」という手段がとられれば，「4－8」を「8－4」として手続きを続行する(745－282＝543)．

1.4．課題解決はいくつかの情報処理段階からなる

一般に課題解決は，いくつかの段階を経て解決に至る．子どもが解決できない課題というのは，その課題全体が全くできないということは少なく，ある特定の段階でつまずいていることが多い．それがどの段階かを知ることは，子どもに課題の解決法を教授するのに有効である．

研究事例1.4　「算数文章題の情報処理は4段階よりなる」

算数の文章題の解決過程は以下のような段階に分

けられる(たとえば，Lewis, 1989; 多鹿・石田，1989；多鹿，1995)．

(1)文章理解過程
- ・変換過程…文章の言語的理解を行う
- ・統合過程…既有の数学的知識と変換過程で得られた情報を統合する

(2)立式・計算過程
- ・プラン化過程…式を立てる
- ・実行過程…計算を行う

石田・多鹿(1993)によると，文章題解決の困難さの多くは統合過程にあるとされている．単純な計算が苦手な生徒であっても，統合過程に困難がなければ，文章題に対して比較的高い点数を示すことが知られている．

1.5. 子どもは日常の中で学ぶ

子どもは日常の中で，算数・数学的な手順だけでなく本質的な概念をも学んでいる．そこでは，学校で学んだ知識を転移するという形よりも，必要にかられて子どもみずからが創出する形をとる．ここにだけ着眼すると，学校教育は不要にさえ思えるほどである．しかし，原理原則の転移と同程度に，現実の中で機能している適応のための原理の抽出支援という役割も学校教育にはあることを再認識すべきであろう．

研究事例1.5　「街角で算術を操る」

Carraher, Carraher & Schliemann(1985)は，十分な学校教育を受けていない9－15歳の子どもたちが，ブラジルの街角で，ココナッツの販売に際して，かなり複雑な計算を必要とする課題を難なくこなしていることを確認し，さらに，そこで彼らが行なっている「算数」を明らかにしている．

その「算数」の特徴は，貨幣などの現実の中で機能しているものの特徴を活用していること，「儲ける」といった現実的な要請に問題を言い換えて解くことである．また，通常の学校教育の算数とは，異なった計算手続きがとられていることもわかっている．

1.6. 子どもは算数・数学について信念を持っている

子どもは算数・数学という学問に対し様々な信念を持つ．Schoenfeld(1985, 1992)は，子どもが持つ数学に対する信念として，「数学的な発見や創造は天才だけがなし得る」，「学校で習う数学は実際の世の中とはほとんど関係がない」，「数学は1人で行なう活動である」などを挙げている．これらは，数学の学習に対して，さまざまな負の影響を及ぼす．たとえば，「数学的な発見や創造は天才だけがなし得る」という信念を持っていれば，数学の問題解決に失敗した際にその原因を自らの能力に帰属させ，結果として数学を学習する意欲をなくしてしまう．Schoenfeldは，信念が，リソースやヒューリスティクスなどと並び，数学問題解決に影響を与える要因の一つであるとしている．

近年の算数・数学教育の動向として，「よさ」が挙げられることが多い(たとえば，清水，1995；文部省，1998a；文部省，1998b；文部省，1999)．よさの一つの認識として，「算数・数学は日常の物事を簡潔に表現でき，便利なものである」などの信念形成が挙げられよう．学習に正の影響を与える信念を形成させるような教授が求められている．

研究事例1.6　「信念は学業成績に影響を及ぼす」

長谷(1996)は，高校生の学業成績に影響する要因を共分散構造分析により分析している．数学観，つまり数学に対して持つ信念は，「数学の得意な人は，社会で活躍する可能性が大きい」などの項目で測定される「有用性」と，「数学は，筋道をたてて考える教科である」などの項目で測定される「論理性」の2つが設定されている．分析の結果によると，有用性と論理性が，「思考過程の重視」や「失敗に対する柔軟性」などの学習観に影響を与える．さらに，学習観が学習スキル，自己効力感に影響し，これらが学業成績に影響を与えるとしている．

1.7. 利用しやすい知識を獲得させる

ある課題の解決には，以前に獲得された知識が不可欠である．逆に，その知識の獲得段階では，その知識を後の課題解決に利用できるものにすることが必要となる．つまり，転移を促進する知識を獲得しなければならない．

寺尾(1998)は，転移を促進する知識を獲得させるための有効なアプローチとして，次のような「構造生成アプローチ」を挙げている．その特徴として，一つは，以前に学習した例題をそのまま記憶しているのではなく，何らかの抽象化を行わせること，二つは，いわゆる公式のようなレベルの抽象化よりもさらに抽象化された，等式の生成を支えるアイデアを獲得させることである．例としてPolya(1957)が挙げている「ヒューリスティックス」やGreeno(1985)の挙げる「方略的知識」がある．

この視点に立てば，教授場面において，例題の解法を単に示すだけでなく，その例題の解決を支えるアイデアを教授することにまで踏み込む必要性が示唆されることになる．

研究事例１．７ 「圧縮解法を利用する」

Terao, Kusumi & Ichikawa(1997)は，「追いつき問題」と呼ばれる問題のクラス(電車，時計，池の周りを走るなど，題材はさまざまであるが，すべて「Aの進む距離－Bの進む距離＝ある距離」なる方程式で解決できる問題)が，「２つのものがあって，一方がもう一方に追いつく．このとき，２つのものが進んだ距離の差が，ある距離に等しくなる」という等式生成のアイデアで共通であることに注目し，このアイデアを知識として獲得させることにより，転移が促進されることを示した．このような知識は，等式の形よりも抽象的であり，彼らは，このような解決法を「圧縮解法」と呼んでいる．

２．子どもの認知特性に配慮した教材開発

教材開発は，子どもの動機づけへの配慮とともに，子どもの知識の世界への配慮が必須である．どんな既有の知識が貯蔵されているのか，それらはどのように運用されているのかについての知見が，ここでは抽出される．

なお，こうした意味での教材開発の重要性を強調するために，本来は教授法と表裏一体である教材開発を，本稿では，あえて分離してみた．

２.１．子どものメンタルモデルに配慮する

課題解決の状況が複雑すぎるときに，その複雑さを低下させるために，既有知識を使って状況を自分なりに解釈することがある．そのときの解釈を支えるために構築されるモデルをメンタルモデルという．メンタルモデルが状況の「妥当な」解釈をもたらせば，課題解決は納得的かつ効率的に行なわれることが知られている(たとえば，Gentner & Gentner, 1983)．

しかし，授業場面で，子どもに勝手なメンタルモデルの構築を促すことは思いこみエラーをおかさせてしまうリスクがある．そこで，教材開発の中で，教師側から「妥当な」メンタルモデルを提供し，それを使って課題解決するように促すことが現実的な方策としてありうることになる．

研究事例２．１ 「負の引き算を階段法で解かせる」

藤田・丸野(1988)は，軽い学習障害を持つ中学１年生男子に，正負の数の加減算を，階段の昇り降りのメンタルモデルを提供して理解させることを試みている．このモデルでは，加減操作を，階段の昇り降りの身体的行為に対応させるところに特徴がある．

彼らは，学習の過程でメンタルモデルがどのような機能を果たしているかについて次の２点を挙げている．一つは，メンタルモデルが具体的な経験ができる世界を提供したことによって身体的行為として問題を解決できるようになっていること，もう一つは，これによって，抽象的世界に自己の視点を投入することを可能にしたことである．

２.２．子どもは物語を好む

起床転結のある物語は，論理性を重視する数学とは無縁のように思えるが，算数・数学教育の教材に物語性を導入することは，動機づけという点でも，また，応用力の陶冶という点でも効果のある趣向である．

これまでも，物語性は，文章題の中にひかえめな形で導入されてはいたが，文章そのものの読解や文章表現のイメージ惹起力の弱さゆえに十分な効果を発揮してこなかったところがある．最近のマルチメディア技術の普及は，文章題の欠点を補う形での物語の導入を可能にした．

研究事例２．３ 「ビデオで問題解決の文脈を見せる」

Vanderbilt University の Learnig Technology Center(LTC)では，ビデオ教材，例えばジャスパーとその友人らがクルーザーの購入をめぐる物語などを作成して，そこで起こる数々の課題を子どもに解決させる実践的な試みを行ない，その有効性を確認している(Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1997)．

この教材作りでは，とりわけ次の３点が留意された．一つは，子どもの関心をひきつけること，二つは，学習の文脈に物語の筋をきちんと組み込むこと．三つは，問題解決の手がかりは物語に組み込まれるが，子ども自身がそれに気づいて解釈することが求められることである．

２.３．子どもはイメージ処理が得意

子どもが問題を解決する際に，自ら図を用いる，教師が図の利用を促す，また，教師が説明のために図を用いるなどということは，日常の授業場面でしばしば見られる．初等幾何の問題解決において，伊藤・大西・杉江(1994)は，図を用いることの利点として以下の３点を挙げている．

(1)保持性…記憶負荷を低減させる
(2)操作性…論理的な推論を容易にさせる
(3)全体性…文章表現ではわかりにくい副次的な情報が得やすい

しかし，このような有効性にもかかわらず，子どもが自発的に図を使用できるようになるのは簡単ではない．図で表現することの有効性を子どもが認識

できるような指導が望まれることになる．

研究事例２．３　「図をかくことで納得する」

重松(1993)は，５回の個別指導において，子どもに図を活用することのよさを教授することによる問題解決方略の変容を記述している．この指導では，余分な情報の与えられている文章題から必要な情報を取り出す際の図の利用の有効性，さらに，以前に解決した問題と同構造であることを図により納得するなどの活動を通して，図を利用することのよさを強調した．次第にこの子どもは納得の道具としての図の利用を自発的に行なうようになり，最後には，以前にできなかった宿題を，図を利用することにより解くことができた．

3．子どもの認知特性に配慮した教授法の開発

教授法の開発にあたっての基本的な配慮は，教材開発と同じであるが，さらに付け加えるなら，子どもを目の前にした相互交流にかかわる特性への配慮も必要となる．ともすると，教師の側からの一方的な教授になりがちな算数・数学の授業で，いかにして子どもとの相互交流を最適なものにしていくかも考えてみる必要がある．

3．1．子どもにはメタ認知力がある

人には心があることを知る３歳頃になると自らの心の存在も知るようになる．ここからメタ認知力が発生する．自らの認知状態を知り，目的にふさわしい活動ができるようにコントロールすることができるようになってくる．

メタ認知力がついてくると，課題解決の目的に応じた学習方略を駆使した学びができることになる．しかし，それができるためには，課題解決に有効な「学習方略についての知識」があることが前提となる．この前提を満たすようにすることが，学習方略指導の一つになる．

さらに，もう一つの問題は，学習方略の運用に熟達すればするほど，その運用が意識化できなくなってしまい，状況にふさわしい方略選択を意識的にコントロールすることができなくなってしまうということがある．かくして，学習方略指導のもう一つの局面として，方略運用の意識化がある．

研究事例３．１　「学習方略を意識させる」

市川(1993)は，学習相談室へ来所した子どもが，自らの学習方略を十分に意識化できていないことに着目して，問題解決後に学習過程を自ら振り返えさせるための６段階の支援質問を与えて自省させる試みを行なっている．

(1)自 己 診 断…問題点の認識を促す
(2)仮想的教示…仮に人に説明するとどうなるかを考えさせる
(3)診断的質問…どこまでわかっているかを試す質問
(4)比喩的質問…概念を比喩で説明させる
(5)図式的説明…図で説明させる
(6)教訓的帰納…なぜ解けなかったかを問う

3．2．具体と抽象を行き来する

足し算や九九を習得すること，さらにさまざまな数における四則計算，つまり一般的に計算能力を身につけることは，算数・数学教育の一つの大きな目標である．計算能力が生徒に身に付くようにする教授法として，以下の２つが行われてきた．

一つは，計算能力を手続き的知識とみなし，計算の誤りは手続きの誤解(手続きバグ)であるとして，その矯正をするという方法である．二つは，計算能力をその背後にある概念的知識に基づくものと見なし，計算の誤りが概念の誤解(概念バグ)に基づくものであるとして，計算の背後にある意味を強調するという方法である．しかし，いずれも計算の誤りをなくす，つまり正確な計算能力を獲得するためには十分でないとの指摘がある(Resnick, 1982; Resnick & Omanson, 1987)．

そこで，彼らは計算能力を考える際に，具体的世界である意味の世界と，そこから計算手続きのみを抽出した抽象的世界である手続きの世界を行ったり来たりさせることにより，手続き的知識と概念的知識との結びつきを高め，真の計算能力を獲得させることの有効性を提案している．

研究事例３．２　「手続きと概念を対応づけさせる」

Lampert(1986)は，小学校で掛け算の実践授業を行い，子どもの認知構造の変容を記述している．たとえば，「４×12」を学習する場面で，「この計算式に合う場面を考えよう」と発問する．子どもは具体的場面において思考しながら，10進法の位取りなどの抽象的な計算式の意味を認識していく．

この実践の特徴は，手続きと概念を単独で強調するのではなく，その結びつきを強調していることである．これにより，概念と手続きがそれぞれ単独のものでなく，お互いに結びついたものとして理解されるのである．

3．3．知識の社会的分散を利用する

グループ学習の試みの歴史は古い．そうした中で，認知研究は，知識の社会的分散という観点から，グループ学習について新たな試みの必要性を提案した．

課題解決の日常的な場面では，共同課題解決という形をとることが多い．そこでは，各自の持つ知識内容や運用の仕方が相互に触発し合うことでより良質の解が得られることが期待される．そうした現実を想定すると，算数・数学の領域でも，共同課題解決という営みを経験させることで，人の知識をいかに活用するかを学ぶこともあってよい．

研究事例３．３　「教室における相互作用をうながす」

Yackel & Cobb (1996) は，長年にわたり小学校での学習場面を観察している．集団での相互作用の記録から，子どもの知識の変容の仕方を探っている．

この研究では，教室における社会数学的規範の確立の必要性を訴えている．ここで，社会数学的規範とは，一般の状況で適用される社会的規範と区別され，「何を数学的に異なっているとするか」，「何を数学的に洗練されているとするか」などの，算数・数学の学習場面に固有の，集団に共有されるべき規範であるとされる．たとえば，Voigt (1995) は次のような例を挙げている．「27＋９」，「37＋９」，「47＋９」の問題を解決する場面において，多くの子どもは問題を一つ一つ独立なものとして解決する．ここで，教師が異なった考え方，この場合はこの３問を関連づける考え方を生徒に考えさせることにより，異なった考え方を認め合い，「数学的に異なっているとみなす解決法」の規範を成立させる契機とするのである．この規範の成立をもって，望ましい集団学習が行われるとされ，さらに，規範を成立させるのは教師の役割であるとされる．

３．４．子どもの学習をコンピュータで支援する

CAI は，皮肉なことに，徹底的行動主義者であったスキナーにはじまるが，認知研究の知見と人工知能研究の要素技術の蓄積とによって，新たな展開を遂げてきた．その一番の特徴は，子どもの学習過程の認知モデルがシステムの中に取り込まれている点である．結果として，一人の教師に一人の子どもという家庭教師的な学習環境を実現することができるようになった．さらにもう一つ際立った特徴を挙げるなら，表示技術と入力技術の高度化である．これによって，格段に豊かで効果的な学習環境を子どもに提供できるようになった．

研究事例３．４　「GP チュータによる初等幾何の証明支援」

Anderson (1985a, 1985b) は，初等幾何の証明支援システム「幾何証明チュータ (Geometry Proof Tutor：GP チュータ)」を開発した．このシステムは，Anderson 自身が提唱した人間の認知構造のモデルである ACT* (アクト・スター) を理論的背景としている．

このシステムの特徴を挙げると，第一に熟達者のモデルを内在させており，生徒の遂行をこの熟達者モデルと比較，評価することにより，生徒の誤りを訂正することができることである．第二に，証明の表示法がある．通常，証明は，文章とその理由を列挙することにより構成される．ところが，GP チュータでは，前提と結論のリンク，いわゆる証明木を表示していくのである．生徒は，この証明木を完成させることが目標となる．この表示によって，熟達者にしばしば見られる結論から前提への後ろ向き推論の学習が容易になる．また，問題空間を視覚化でき，状態間の対応が明確になる．

３．５．子どもの個人差に配慮する

算数・数学の課題解決を一種の情報処理とみなすとき，その情報処理の仕方は多様である．たとえば，日本の子どもの概算能力を評価すると，同じ課題であっても，採用される方略には多様なものがある (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa & Shimizu, 1991)．また，器質的な原因で，特定の情報処理が困難な場合もある．このように子どもの情報処理過程が多様である中で，新しい知識を教授することを考えると，それぞれの子どもにはそれぞれの最適な教材や教授方略があるはずである．

学校での授業形態が主に集団であることを考えると，個人差を考慮した教授は難しく思える．しかし，近年普及しているティーム・ティーチング (Team Teaching; TT) や特殊学級での教授など，個人差を考慮しながら教授すべき場面が多くあることも事実である．個人差を考慮した研究も，生かされる場面が多い．

研究事例３．５　「継次処理に困難を持つ子どもに足し算を教える」

K-ABC 検査は，神経心理学と認知心理学の知見に基づき，人間の情報処理の仕方に「同時処理」と「継次処理」の２種類があるとし，Kaufman らによって開発されたものである (松原・藤田・前川・石隈，1993)．東原・前川・藤倉 (1995) は，この検査によって継次処理に困難を持つことが明らかになった子どもに対し，算数の指導を行っている．

この指導では，(1) 言語的手がかりよりも視覚的手がかりを強調する，(2) 手順の系列を順次実行する過程を減らす，(3) 課題の構成要素の全体と部分の関係を視覚的に把握できるようにするなどの工夫がなされ，CAI により行われた．この子どもは繰り上がりのある足し算を行うことが困難であったが，この指導の結果，計算ができるようになり，解答の

速さも大幅に上昇した．

おわりに

算数・数学教育研究にとって有効と思われる，認知の科学の視点（原理）を15個抽出し，それぞれについて，研究事例をあげなら，有効性や限界などを吟味してみた．

15個の視点は，いずれも，やや抽象度の高いものであり，したがって，算数・数学教育研究に固有のものばかりとは言えない．そこに，抽出した視点の普遍性をみることができるが，一方では，算数・数学教育研究を限定的にガイドする実行性には欠けることになる．それぞれの下にさらなる具体性のある視点を抽出する努力が今後求められることになる．

認知の科学の算数・数学教育研究への貢献には，こうしたモデル論的な観点からのものに加えて，研究事例にもみられるように，コンピュータや経験データによる検証・実証のための多彩な手法によるものもある．こうした貢献を，ボトムアップ的に類型化してそこから新たな視点（原理）を引き出す努力も，もう一つの有効な試みとしてありうるであろう．

引用文献

Anderson, J.R. 1985a Cognitive psychology and its implications, second edition. Freeman.

Anderson, J.R. 1985b The geometry tutor. International Joint Conference on Artificial Intelligence: IJCAI-85, 1, 1-7.

Brown, J.S. & VanLehn, K. 1980 Repair theory; A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science, 4, 379-426.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. 1985 Mathematics in the streets and in schools. British Journal of Developmental Psychology, 3, 21-29.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt 1997 The Jasper project: lessons in curriculum, instruction, assesment, and professional development. Lawrence Erlbaum Associates.

藤田　敦・丸野俊一　1988　知的行為の形成過程におけるメンタルモデルの役割－正負の数計算に関するケース研究－　九州大学教育学部紀要（教育心理学部門），33，2，73-83.

Gentner, D. & Gentner, D.R. 1983 Flowing water or teeming crowds; Mental models of electricity. In D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.) Mental models. Hillsdale. NJ. Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J.G. 1978 A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.) Advances in instructional psychology Vol. 1. Lawrence Erlbaum Associates. Pp. 13-75.（山口修平・東洋訳　1985　問題解決の過程－幾何の課題による研究－　ライブラリ教育方法の心理学１　サイエンス社）

長谷勝幸　1997　高校数学における学習スキルと信念・意欲と学業成績との関係－学習スキルの指導上の位置づけへの示唆－　筑波大学大学院教育研究科修士論文（未公刊）．

東原文子・前川久男・藤倉敬士　1995　継次処理に困難を持つ児童の算数におけるつまづきとCAIによる指導．筑波大学心身障害学研究，19，73-86.

市川伸一　1993　問題解決の学習方略と認知カウンセリング　若き認知心理学者の会（編）　認知心理学者　教育を語る　北大路書房　Pp.82-92.

石田淳一・多鹿秀継　1993　算数文章題解決における下位過程の分析　科学教育研究，17，18-25.

伊藤毅志・大西　昇・杉江　昇　1994　人間の作図過程を説明する問題解決スクリプトと作図の分類　電子情報通信学会論文誌，77-D-Ⅱ，4，811-822.

Lampert, M. 1986 Knowing, doing, and teaching multiplication. Cognition and Instruction, 3, 305-342.

Lewis, A.B. 1989 Training students to represent arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 81, 521-531.

松原達哉・藤田和弘・前川久男・石隈利紀　1993　K-ABC心理・教育アセスメントバッテリー解釈マニュアル　丸善メイツ（Kaufman, A.S. & Kaufman, N.L. 1983 Kaufman Assessment Battery for children. American Guidance Service, Inc.）．

文部省　1998a　小学校学習指導要領　大蔵省印刷局．

文部省　1998b　中学校学習指導要領　大蔵省印刷局．

文部省　1999　高等学校学習指導要領　大蔵省印刷局．

Novak, J.D. and Gowin, D.B. 1984 Learing how to learn. Cambridge University Press.（福岡敏行・弓野憲一監訳　1992　子どもが学ぶ新しい学習法－概念地図法によるメタ学習－　東洋館出版社）

Polya, G. 1957 How to solve it －A new aspect of mathematical method－ Second edition. Princeton University Press.

Resnick, L.B. 1982 Syntax and semantics in learning to subtract. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg. (Eds.) Addition and subtraction: A cognitive perspective. Lawrence Erlbaum Associates. Pp.136-155.

Resnick, L.B. & Omanson, S.F. 1987 Learning to understand arithmetic. In R. Glaser. (Ed.) Advances in instructional psychology, Vol.3. Lawrence Erlbaum Associates. Pp.41-95.

Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. & Shimizu, K. 1991 Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese students. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 39-58.

Schoenfeld, A.H. 1985 Mathematical problem solving. Academic Press.

Schoenfeld, A.H. 1992 Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). Handbook for research on methematics teaching and learning. Macmillan. Pp.334-370.

重松清文 1993 図的表現による理解を重視した算数学習指導 市川伸一(編)学習を支える認知カウンセリング ブレーン出版 Pp.96-110.

清水静海 1995 子供を伸ばす算数 学ぶ意欲と算数のよさ 小学館.

多鹿秀継 1995 高学年の文章題 吉田 甫・多鹿秀継(編)認知心理学からみた数の理解 北大路書房 Pp.103-119.

多鹿秀継・石田淳一 1989 子どもにおける算数文章題の理解・記憶 教育心理学研究, 37, 126-134.

寺尾 敦・楠見 孝 1998 数学的問題解決における転移を促進する知識の獲得について 教育心理学研究, 46, 461-472.

Terao, A., Kusumi, T. & Ichikawa, S. 1997 Solution compression in mathematical problem solving: Acquiring abstract knowledge that promotes transfer. In Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society. Hillsdale, NJ: LEA. Pp.733-738.

Voigt, J. 1995 Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld. (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures. Lawrence Erlbaum Associates. Pp.163-202.

Yackel, E. & Cobb, P. 1996 Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 458-477

Young, R.M. 1979 Production system for modelling human cognition. In P.N. Johnson-Laird. (Ed.) The Computer and The Mind. William Collins Sons & Co.Ltd.(海保博之・中溝幸夫・横山詔一・守 一雄訳 1989 心のシミュレーション 新曜社)

—1999. 9. 30 受稿—