算数・数学の指導に必要な数学の知識・素養について

岩永恭雄　　理数科学教育講座

キーワード：　算数科指導法，数学的素養，演算と演算法則

序

本稿は，次の論文

[1] 伊藤武広，荻上紘一，原田実：『算数を教えるのに必要な数学的素養』－「2 × 3 か 3 × 2」の数学－，信州大学教育学部紀要第 79 号，1993 年 8 月，pp. 15-17

で指摘された問題について再考することと，この論文に対してのコメントを与え，関連する問題の提起を行った次の論文に対して，その解答を与えることである。

[2] 守一雄：『環と加群についての知識は算数を教えるのに必要な最小限の数学的素養か』－伊藤・荻上・原田 (1993) 論文へのコメント－，信州大学教育学部紀要第 81 号，1994 年 3 月，pp. 41-45

ただし，論文 [2] で提出された問題点は数学全般にわたるが，今回は代数学の範囲に限定し，抽象代数学の視点から論じたいと考えている。

抽象代数学は，19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて，創始され発展した代数学の領域である。現在では，「群・環・体」のような代数系の構造を研究する分野を指すが，抽象代数学の創始期に，自然数・整数・有理数・複素数といった数体系が，数学的に厳密な形態で構成されたのである（数概念の確立）。本稿では，上記の目的と併せて，環の公理系と数の構成方法に基づき，整数の四則演算に注目する方法を用いて解決できる幾つかの問題を取り上げたい。

第 1 節　論文 [1] を再検討する

論文 [1] では，小学校２年の算数で，かけ算の導入の際に取り上げられた次の問いに対して，「$3 \times 2 = 6$」と解答することの是非を論じている。

『３枚の皿にリンゴが２個ずつのっているとき，全部でリンゴが何個あるか。』

指導した教師が，『答えの６は正しいけれども，式は 3×2 ではなく 2×3 でなければならない』と言ったことに対して，このような誤った指導が行われないようにするためには，「加群」の概念が，算数を教える教師にとっての数学的素養として必要であることを指摘している。

この主張の是非を論じる前に，教師がなぜこのような誤った指導を行うことになったのかを考えてみた。そのために，小学校算数の教科書 (平成１２年版)，指導書 (平成１２年版) 及び学習指導要領（平成１４年版）を調べてみたところ，教師が上記の誤りを犯す理由が推察できた。教科書では，「2×3」という解答を誘導するような設問があり，指導書では，数の積に関して「乗数」と「被乗数」という言葉が用いられ，教師が上記のような指導を行っても仕方がない状況になっている。

これでは教科書及び指導書の記述が不適切であると言わざるをえない。乗数・被乗数という概念を用いるなら，当然ながら加群の概念が積の解釈に必要になってくるのである。

ここでは，数の演算という点に着目して，上記の問題を考察してみる。一般に，積といったとき，代数学では２つの意味を持っている。１つは「２項演算」であり，もう１つは「作用」である。集合 X の直積集合

$$X \times X = \{(x, x') \mid x, x' \in X\}$$

から X 自身への写像または関数

$$\rho : X \times X \to X$$

が定義されているとき，ρ を X 上の２項演算と呼び，任意の元 $(x, x') \in X \times X$ に対して，ρ による像を $\rho(x, x') = x \cdot x'$ と表して，これを通常 x と x' の積と呼ぶ。一方，代数系 A と集合 X について，直積集合

$$A \times X = \{(a, x) \mid a \in A,\ x \in A\} \quad \text{または} \quad X \times A = \{(x, a) \mid x \in X,\ a \in A\}$$

から X への写像

$$\lambda : A \times X \to X \quad \text{または} \quad \lambda' : X \times A \to X$$

が定義されているとき，λ を A の X への左作用，λ' を A の X への右作用と呼ぶ。２項演算と同様，この場合にも，$\lambda(a, x) = a \cdot x$, $\lambda'(x, a) = x \cdot a$ と積の形で表されるが，数学では通常これを積とは呼ばない。

乗数・被乗数の概念は作用の考え方に基づいており，２項演算ではないのである。従って，当然のことながら，左作用と右作用は一般的には異なっており，$3 \cdot 2$ と $2 \cdot 3$ は区別されなければならない。

これに対して，２項演算は数の積なので,「交換法則」が成立しており，$3 \times 2 = 2 \times 3$ が成り立つ。この点が重要なので強調しておくと，数の２項演算で 2×3 と書いたら，この値は 3×2 と同じであり,「リンゴと皿」の問題でも後者の考え方で正しい答えに到達する解釈が可能なはずである。実際，皿が３枚あるとき，各皿に１つずつリンゴを置き，もう１回これを繰り返せば，答えを導く式は，２回配ったのであるから，$3 \times 2 = 6$ になるはずである。また，リンゴの数が幾つあるかわからないとき，各皿にリンゴを配るには，各皿に１つずつ置き，これを繰り返すのが普通であろう。さらに，トランプのゲームをするとき，１人にトランプを１枚ずつ配る場面を想定すれば，ごく自然な考え方である。この問題では，数学的な解釈だけでなく，数を数えるときの言語上の違いも影響する場合があることを注意しておかなければならない。

中学校の数学では，初めて文字と数の間の演算が登場する。このとき，文字と数との積は，$2x \times 3x = 6x^2$ のように，数が常に文字の左側に書かれる。これも数の積が交換法則を満たしていることから来ており，表記上の習慣ではないのである。ある生徒が答えとして $x^2 6$ と書いたとしても，これはもちろん正解なのである。

数の概念は，数学で人類が初めて得た抽象化であると言える。この観点に立って，19世紀後半から発展した現代数学では，数の公理化に取り組み，数概念が確立されたのは20世紀になってからである。算数で数の四則演算を指導するとき，この数学者達の努力を知り，数の演算法則という基本まで戻らないと，誤った指導がなされてしまうのである。

分数の概念の確立や，負の数の実在性とその間の演算が正しく理解されるようになったのは，19世紀後半のことであったという事実が，数概念の確立に大きな困難があったことを示している。

論文 [1] では，著者達は 3×2 と 2×3 を共に作用と捉えたために，加群の概念が算数を教える教師には必要な数学的素養であると考えたのであろう。「リンゴと皿」のような問題は，作用という立場まで踏み込まなくても，２項演算の範囲で処理されるのである。

現行の教科書では，上記の問いの解決に，一方の考え方しか提供せず，また，指導書では，乗数・被乗数という言葉を用いるのは甚だ不適切であり，数学の自由な考え方，

発想を疎外している。数学を勉強するときに重視するべき観点は，結論される答えは唯1つであるが，そこに到達する方法は多様なことである。算数・数学の指導では，この点を念頭に置いてなされることが必要不可欠である。

論文 [2] の 5.1「算数教師 A はどうすべきだったのか」において，著者が述べている教師の指導例は，数学の考え方の自由性を著しく疎外するものであることは，もはや明らかであろう。そこで，著者が述べている『言わずもがなのことであるが，教え方が重視されるのにはそれなりの理由があるのである。』は，この意味でこそ意義ある主張といえる。

第２節　論文 [2] における問題提起に答える試み

論文 [2] において提起された問題は，以下の通りである。

問題点１：環と加群についての知識が算数を教えるのに本当に必要であるかどうか；

問題点２：算数を教えるための最小限の数学的素養とは何か，どう決めるのか；

問題点３：そもそも，何かを教えるための最小限の素養を決定できるか；

問題点４：数学を十分に理解するとはどういうことか。

これらの問題提起は，教員養成学部で教職関係ではない教科専門科目の講義を担当している者が，真剣に考えなければならない重要なものである。しかしながら，それらの解答を与えることはそれほど困難なものとは筆者は考えていい。以下で，問題点１～４について論じるが，最初に断ったように，取り上げる内容はその範囲を代数学に限定している。それは，議論を算数・数学で教えられる具体的な項目を対象にして，抽象的な議論を避けるためであり，ここで論じられたことは数学一般に広げられるものと考えている。

2.1　問題点１について

結論については，第１節ですでに述べた通りであるが，もう少し詳細に説明しておく。小学校における算数では，いわゆる積に当るものとしては２項演算だけであり，作用の考えが必要になる内容はなく，環と加群の知識が算数を教えるのに必要ないと言える。

しかしながら，中学校の数学では，関数が登場するので，作用という観点からの考察は必要である。具体的に説明すると，関数は通常 $f(x)$ という記号で表される。ここで注意しなければならないことは，$f(x)$ は実は関数ではなく関数値であって，f が関数なのである。英語では，$f(x)$ を「f of x」と読み，関数値であることが認識されるようになっている。日本の数学教育では，関数は常に $f(x)$ と書かれ，$(x)f$ と書かれることはない。しかし，関数は数に作用する機能を持ったものであり，ここに左作用と右作用の違いが現れる。２つの関数 $f(x), g(x)$ に対して，それらの積が次の２通りの方法で定義される：

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(g(x)) \qquad (*)$$

どちらも関数の２項演算であるが，前者は関数値の積で関数の積の定義が与えられており，後者は合成関数と呼ばれるもので，数への作用を２回施したものである。関数を $(x)f$ と書いたとき，前者の場合，数の積であるから，

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x)$$

であるのに対して，後者の場合には，

$$(x)(fg) = ((x)f)g$$

となるから，左作用と右作用は当然異なっている。

$(*)$ は関数の集合に２種類の２項演算が定義されたことを意味し，一方は交換法則を満たすが，他方は合成関数であるから，一般には交換法則を満たさない。集合に作用する代数系が交換法則を満たさない２項演算を持っているときには，左作用と右作用は一般には異なることに注意しなくてはならないのである。しかし，交換法則を満たす代数系 A が，集合 X に作用するときには，左作用

$$a \cdot x \quad (a \in A,\ x \in X)$$

が定義されているなら，右作用が

$$x \cdot a = a \cdot x \quad (a \in A,\ x \in X)$$

と定められ，A における演算の交換法則が，作用に左右の区別がなくなることを保証しているのである。これが，論文 [1] で説明された内容にほかならない。

それでは，中学校で数学を教えるときに，環と加群の知識が必要であるかと言えば，中学校の指導では，関数を作用と見る考え方は採用されておらず，本質的には，関数値しか問題にしていないのが現状であるから，加群の概念まで踏み込む必要性はないであろう。

さらに，高等学校の数学では，積に関して交換法則を満たさない「行列」という概念が取り上げられる。行列は，作用という観点で扱われるべきであり，実際に「１次変換」の表現という形で扱われている。

2.2 問題点２について

算数における代数的な内容は，整数・分数・小数の性質とそれらの四則演算であるから，この範囲に限定して，話しを進める。

最初に，これらの内容についての指導で，しばしば取り上げられる具体的な問題を列挙してみよう。

(1) どんな数に零をかけても，零になるのはなぜか？

(2) なぜ，零で割ることはできないのか？

(3) 分数について，「約分」という操作がなぜあって，「既約分数」の概念はなぜ必要なのか？

(4) 分数の割り算は，なぜ逆数をかければよいのか？

(5) 分数の足し算は

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

と複雑なのに対して，かけ算は

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

とやさしい理由は何なのか？

(6) 小数の概念はなぜ必要なのか，そして，無限小数は数なのか？

これだけのごく初歩的な問題に対してさえも，明確な説明を与えるためには，代数学における環の概念が必要になるのである。(1), (2), (4), (5) については，数の演算を支えている公理まで戻らなければならないのであり，(3) については，分数が導入される理由とその構成方法を知らなければ，解決は不可能である。

分数は，算数の中でも学習および指導が最も難しい内容であり，分数ができない大学生を生み出す原因は，教える教師が分数の難しさを理解していないことにある。従って，指導する教師は，分数に対する十分な知識と理解を持っていなければならない。分数の加法に関する指導方法が論じられることは多いが，その多くは分数の意味を理解してい

ないのが現状である。『$\frac{1}{2}$と$\frac{1}{3}$の足し算を$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}$とできない理由は，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$は明らかなのだから，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}$とはならない』というような，誤った説明がまかり通っている。

上記 (1)〜(5) のような問題の解決には，環という代数的概念の知識が必要であると述べたが，それでは，算数を教える教師にとって，環の知識が必要であるかというと，それは必要ないと言える。算数を教える教師に，環の知識に基づいた算数の指導法がなされればよいのであって，それは教員養成学部での指導で実現されるはずである。参考論文３には，算数における数に関する内容の部分については，指導に必要な最小限の数学的素養が述べられている。

環の概念は，数の体系を根本にまで立ち返って考察することにより，多くの数学者の努力によって得られたものである。この成果によって，数の演算の仕組みも解明されたのであり，分数の概念は Weber によって確立されたが，それは 19 世紀末のことである。このような現代数学の成果は算数の指導法にも生かされるべきであり，算数の指導法を論じる立場の人達は現代数学の知識を持つ必要がある。また，算数を教える教師には，それに基づいた指導法を理解することが，求められる数学的素養であると考える。さらに，生徒が算数・数学を理解する仕方は多様であるから，数学の考え方の自由性を重んじる教育を行うためには，現場で教える教師は現代数学に基づいた指導法を自ら考案できる能力を持たなければならず，環の知識がその手助けになることは確実である。

論文 [2] の著者が，『算数を教えるための数学的素養の集合が，数学的根拠に基づいて定義されれば，それを学んでおくことにより，安心して算数を教えられる』と述べているが，この仕事は数学者が積極的に取り組むべきものである。最近の数学教育に対する数学者あるいは自然科学者の批判の多くは，彼等が過去に受けた教育経験にのみ基づいている。米国における数学教育への取り組み方（参考文献１）や，志賀浩二による，中高一貫を考えた数学の教科書作り（参考文献２）は参考になるものである。

2.3　問題点３について

論文 [2] で，著者は『数学のようなきちんと秩序だった世界を研究対象とする学問では，それを教えるための最小限の素養が明示的に決定できるのかも知れない。しかし，他の学問，少なくとも著者が専門とする心理学では，それを教えるための最小限の素養を決定することは不可能である。標準的な教科書に取り上げられているような事柄も，教科書によってまちまちであり，一時的には最小限の素養と思われた事柄も，時代が変われば変化する。』そして『もし数学の分野において，その最小限の素養が決定できるのだとすれば，それがどのようなものであり，なぜそう言えるのかの根拠を示して頂きたい。』と述べている。

この疑問に対する肯定的な解答の概略は，すでに 2.2 で述べた。そもそも学問は常に発展しているものだから，初等教育学校での教育内容といえども，時代とともに変化するのは当然である。しかし，数学では証明された事実は，時代が変わって，その存在価値が低減する場合があっても，真実であることは永遠に変わらない。数学の分野でいえば，ギリシャ時代の教育内容は現代とは大きく異なっているであろうが，ギリシャ時代に得られた幾つかの数学的成果は，中学校・高等学校の数学にも取り入れられている。研究面でも，フェルマー予想の解決が重要な問題であった時代もあったが，20 世紀以後の現代数学ではそうではなく，予想の解決を果たしたワイルズ (Andrew Wiles) の仕事では，志村-谷山予想の解決の方が現代数学的価値はずっと高く，フェルマー予想はこの予想の解決から導かれる。すでに，現代数学に基づいた数学教育の必要性を強調したように，指導方法も変化すべきなのである。その時代の教育内容に対して，各学問分野で最適の指導法を考え，教師にとって必要最小限の素養を決定すればよいと考える。教育

学部の大学院は，現場の教師が新しい学問成果に基づいた指導法を学ぶ場として，その存在価値があるのではないだろうか。米国の数学教育では，そのような取り組みは時代の要求に合わせて行われている。

2.4 問題点４について

「数学を十分に理解する」とは，研究面でいえば，研究を進められる能力があれば，それは数学を十分に理解している証拠であり，論文 [2] の著者が「大学で教えるのには十分なだけ理解している」と述べているのは甚だしい誤解である。現代数学では，その研究レベルは大学院での教育レベルに比較してもずっと高く，この程度の数学の理解では，研究は進められない。

これもすでに述べたことであるが，初等教育で取り上げられている算数・数学の内容は学習指導要項で定められている。従って,「どんなことを教える場合にもできるだけ深く理解していることが望ましい」という表面的なものではなく，算数・数学を教えるのに十分な数学への理解の程度（数学の素養）を具体的に指摘できるのである。

参考文献

１．"An Action Strategy Inproving Achievement in Mathematics and Sciences", America Counts, U. S. Department of Education, 1998

２． 志賀浩二,『中高一貫数学コース』, １学年用，２学年用，岩波書店，2002

３．岩永恭雄,『算数科指導法の講義内容を検討する』, 信州大学教育学部附属実践総合センター紀要, No. 7，2005

(2006年12月15日 受理)