論　説

有限群のコホモロジー論

奥　山　哲　郎
佐々木洋城
飛　田　明　彦

1　はじめに

有限群のコホモロジーは代数的位相幾何学の立場と有限群の表現論 (特に，モデュラー表現論) の立場という側面をもつ．代数的位相幾何学の立場では有限群 G が与えられれば，その分類空間とよばれる位相空間が定まり，そのコホモロジーとして，G のコホモロジーが捉えられる．代数的位相幾何学の様々の領域の強力な手法が用いられ，深い結論が得られてきた．代数的な枠組みでは，関手 Hom の導来関手として関手 Ext が得られ，その特別な場合として群のコホモロジーが捉えられる．筆者らは有限群の表現論の立場からコホモロジー論と関わってきた．

代数的位相幾何学の立場では有限群の分類空間が議論の場であるように，有限群の表現論では群環 (の加群の圏) が議論の場である．有限群のコホモロジーは，可換環[1)] を係数環とする群環上の加群を係数加群とするコホモロジーを考察する．G を有限群とし，R を可換環とする．群環 RG は係数環への添加写像 $\varepsilon : RG \to R; \sum_{x\in G} a_x x \mapsto \sum_{x\in G} a_x\ (a_x \in R)$ という多元環準同型をもつ．この添加写像を通して，R を自明な RG-加群[2)] とみる．群環 RG は G の部分群 H の群環 RH という特別な部分多元環をもち，RG は RH-加群として自由である．このことから，部分群のコホモロジーとの間，剰余群のコホモロジーとの間に制限写像 (res)，トレース写像 (tr)，膨張写像などいくつかの写像が定義される．群環 RG は添加写像 $\varepsilon : RG \to R$ と $\Delta : RG \to RG \otimes_R RG; \sum_{x\in G} a_x x \mapsto \sum_{x\in G} a_x x \otimes x$ によって Hopf 代数でもあり，その構造によりコホモロジー群 $H^*(G, R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(G, R)$ にはカップ積が定義され，可換次数付多元環となる．これらのことから有限群のコホモロジーは非常に多くの性質をもつ．次はわれわれの議論の出発点である．

定理 1.1 (Evens [56] 1961，Venkov [101] 1959)　G を有限群とする．R をネーター的可換環とする．RG-加群 M が R 上ネーター的ならばコホモロジー群 $H^*(G, M)$ はコホモロジー環 $H^*(G, R)$ 上ネーター的である．

従って，R がネーター的可換環ならば $H^*(G, R)$ は R 上有限個の斉次元で生成される．

本稿では係数環として標数 $p > 0$ の代数的閉体 k をとる[3)]．群環 kG はアルティン的であり，特に，有限生成 kG-加群の直既約加群への直和分解の一意性が成り立つ (Krull–Remak–Schmidt の定理)．群環 kG は対称多元環[4)] であり，kG は kG-加群として入射的である．

最近 30 年あまりの発展は Quillen [87, 88, 89] 1971 によるコホモロジー環 $H^*(G, k)$ における代数幾何の導入から始まる．その後，J. L. Alperin, L. Evens, J. F. Carlson, D. J. Benson らをはじめとして多くの研究者の非常な努力によって今日の隆盛を見ることとなった．

本稿では，コホモロジー環 $H^*(G, k)$ における加群の代数的多様体を主役として，有限群の表現論に

おけるコホモロジー論をはじめとするホモロジー代数的手法の有効性やコホモロジー環の研究において表現論の用いられる様子の一端を紹介したい．第 2 節では加群のコホモロジー環における代数的多様体の理論を述べる．第 3 節以下の話題は以下のとおりである：第 3 節 べき等加群，第 4 節 フュージョン，第 5 節 endotrivial 加群.

筆者らは代数的位相幾何学の立場からの研究と有限群論の立場からの研究の交流，刺激の場として，1994 年以降，ほぼ隔年に京都大学数理解析研究所において，短期共同研究や研究集会を実施してきた．この場をかりて研究所ならびに代数的位相幾何学の仲間，有限群論の仲間にお礼を申し上げたい．本稿はこの研究会の成果である．しかしながら，筆者らの力では代数的位相幾何学の立場での研究までも含んだ論考はもとより不可能であり，専ら有限群の表現論の立場からの考察にとどまることを率直にお詫びする．他日，代数的位相幾何学の立場に焦点をあてた，あるいは両者を包含する論説を期待する．

以下，本稿では記号 G は有限群を表す．

2 コホモロジー環と加群

2.1 Bockstein 写像と Serre の定理

定義 2.1 自明な G-加群の短完全列 $0 \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/p^2\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \to 0$ が導く連結準同型

$$\Delta : H^m(G, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}) \to H^{m+1}(G, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$$

を Bockstein 写像とよぶ．この写像は $H^m(G,k) \to H^{m+1}(G,k)$ に拡張され，やはり Bockstein 写像とよばれる．

H を G の指数 p の正規部分群とする．$G/H \simeq \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ であるから，0 でない元 $\lambda \in \mathrm{Hom}(G,k) \simeq H^1(G,k)$ で H を核としてもつものが存在する．$\Delta(\lambda) \in H^2(G,k)$ を H に対応する Bockstein 要素とよぶ．この元に対応する拡大は，$x \in G \setminus H$ を一つとって，

$$0 \to k \to kG \otimes_{kH} k \overset{(x-1)}{\to} kG \otimes_{kH} k \to k \to 0$$

で与えられる．Bockstein 要素はスカラー倍を除いて一意的に定まる．

例 2.1 位数 p の巡回群の直積に同型な群を基本可換 p-群といい，その直積因子の個数を階数とよぶ．基本可換 p-群は有限群のコホモロジー論において特に重要である．$E = C_1 \times \cdots \times C_n$, $C_j \simeq \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ とし，C_j 以外の直積因子の直積の極大部分群を H_j とおく．$\lambda_j \in H^1(E,k)$ を $\ker \lambda_j = H_j$ をみたすものとし，$\mu_j = \Delta(\lambda_j) \in H^2(E,k)$ とおくと，μ_j は 0 でなく，E のコホモロジー環は

$$H^*(E,k) = \begin{cases} k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \quad \mu_j = \lambda_j^2, & p = 2 \\ \bigwedge(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \otimes k[\mu_1, \ldots, \mu_n], & p > 2 \end{cases}$$

と記述される．

次の定理は基本可換 p-群を特徴付けるもので，現代のコホモロジー論の土台を支えるものである．

定理 2.1 (Serre [95] 1965) p-群 G が基本可換群でなければ，$H^1(G, \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ の 0 でない元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ で，$p = 2$ のときは $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 0$，$p > 2$ のときは $\Delta(\alpha_1) \cdots \Delta(\alpha_n) = 0$ をみたすもの

が存在する．

Serre の定理は [95] では Steenrod 作用素を用いて示された．その後いくつかの証明が知られているが, Kroll [66] 1986 は複素表現の Chern 類を用いる証明を与えた．ほとんど同時に, Okuyama–Sasaki [82] 1990[5] では Evens のノルム写像 ([57], 1963) を用いる証明を与えた．これらでは，$H_1, \dots, H_n$ を p-群 G のすべての極大部分群とし，$H^1(G,k)$ の対応する元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は定理の結論を満たすことを示した[6]．

Evens のノルム写像は乗法的移送写像ともいうべきもので，コホモロジー理論の整備に重要な役割を果たしているだけでなく，興味深いコホモロジー元を豊かに生産する貴重な道具である．ノルム写像を定義するために，部分群上の加群 (複体) のテンサー誘導加群 (複体) を定義しなければならない．H を G の部分群とする．kH-加群 N の誘導加群 $kG \otimes_{kH} N$ は $kG \otimes_{kH} N = \bigoplus_{gH \in G/H} g \otimes N$ と直和分解され，G は加群 $kG \otimes_{kH} N$ に集合 $\{ g \otimes N \mid gH \in G/H \}$ 上の置換を引き起こしながら作用している．このしくみにより，テンサー積版 $N^{\otimes G} = \bigotimes_{gH \in G/H} g \otimes N$ に kG-加群の構造が入り，kH-加群 N の G へのテンサー誘導とよばれる．特に，$k_H^{\otimes G} = k_G$ である．さらに押し進めて kH-加群の複体の G へのテンサー誘導が定義される．

定義 2.2　m を偶数とする[7]．H を G の部分群とする．元 $\zeta \in H^m(H,k)$ が表す kH 加群の拡大

$$0 \to k \to N_{m-1} \to N_{m-2} \to \cdots \to N_0 \to k \to 0$$

の右端の k を除いた複体 $\mathrm{E} : 0 \to k \to N_{m-1} \to N_{m-2} \to \cdots \to N_0$ の kG-加群の完全系列へのテンサー誘導 $\mathrm{E}^{\otimes G}$ は kG-加群の長さ $m|G:H|$ の拡大

$$0 \to k \to kG \otimes_{kH} N_{m-1} \to \cdots \to N_0^{\otimes G} \to k \to 0$$

を定め，$m|G:H|$ 次のコホモロジー群の元を表す．この元を $\mathrm{norm}_{H,G}\,\zeta$ と書き，写像 $\mathrm{norm}_{H,G} : H^m(H,k) \to H^{m|G:H|}(G,k)$ を Evens のノルム写像とよぶ．Evens のノルム写像は乗法的であり，トレース写像 $\mathrm{tr}_{H,G} : H^*(H,k) \to H^*(G,k)$ におけると同様の乗法的な Mackey 分解公式が成り立つ．

2.2　コホモロジー環の極大イデアルスペクトラム

Quillen [87, 88] 1971 はコンパクト Lie 群の同変コホモロジー環とその素イデアルスペクトラムを考察し，今日のコホモロジー環における加群の代数的多様体の理論への道を開いた．引き続き，Quillen [89] 1971 では，Evens のノルム写像を用いて，有限群のコホモロジー環についての事実をより簡明に理解することを可能にした．さらに，Quillen–Venkov [90] 1972 は Bockstein 要素を用いて，議論を完全に代数化した．

定義 2.3　有限群 G のコホモロジー環 $H^*(G,k)$ の全ての極大イデアルのなす集合を $V_G(k)$ とおく．$H^*(G,k)$ のイデアル I を含む極大イデアルの集合を $V_G(I)$ と書く．この $V_G(I)$ と表される部分集合を閉集合として $V_G(k)$ に Zariski 位相を導入し，この位相空間を $H^*(G,k)$ の極大イデアルスペクトラムとよぶ．

コホモロジー環 $H^*(G,k)$ の正の斉次元 $\xi_1, \dots, \xi_n$ がコホモロジー環を生成し，生成関係の斉次イデアルを I とすると

$$H^*(G,k) \simeq k[\xi_1, \dots, \xi_n]/I$$

である．無縁イデアル $H^+(G,k)=\bigoplus_{i>0}H^i(G,k)$ を $V_G(k)$ の原点とみなす．スカラー $t\in k$ に対して，環準同型写像 $m_t: H^*(G,k)\to H^*(G,k)$ を i 次の斉次元を t^i 倍することで定義する．写像 m_t が引き起こす $V_G(k)$ の写像 $m_t^*: V_G(k)\to V_G(k)$ を dilation とよぶ．極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $m_t^*(\mathfrak{m})=t\mathfrak{m}$ と記す．無縁イデアルでない $\mathfrak{m}$ に対して，集合 $\{\,t\mathfrak{m}\mid t\in k\,\}$ は部分多様体をなし，原点 $H^+(G,k)$ と $\mathfrak{m}$ を通る '直線' とみなされる．対応するイデアルは極大イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれる最大の斉次イデアルである．

$H^*(G,k)\simeq k[\xi_1,\ldots,\xi_n]/I$ により，極大イデアル $\mathfrak{m}$ は重み付多項式環 $k[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ の極大イデアル $(\xi_1-t_1,\ldots,\xi_n-t_n)$ で斉次イデアル I を含むものと 1 対 1 に対応する．これをアフィン空間 $A^n(k)$ の点 $(t_1,\ldots,t_n)$ と同一視する．このとき，$V_G(k)$ はアフィン空間 $A^n(k)$ の閉集合であり，$V_G(k)$ は $A^n(k)$ の原点をとおる直線，すなわち斉次閉集合の和集合である．そこで，$V_G(k)$ は斉次アフィン多様体であるといわれる．

G の部分群 H に対して，制限写像 $\mathrm{res}_{G,H}: H^*(G,k)\to H^*(H,k)$ は環準同型であり，今，k は代数的閉体であるから，$H^*(H,k)$ の極大イデアルの $\mathrm{res}_{G,H}$ による逆像もまた $H^*(G,k)$ の極大イデアルである[8)]．よって，写像 $\mathrm{res}^*_{G,H}: V_H(k)\to V_G(k)$ が引き起こされる．極大イデアル $\mathfrak{n}\in V_H(k)$ の $\mathrm{res}^*_{G,H}$ による像を $\mathfrak{n}$ の G への '引き戻し' とよぶ．Quillen は次を示した．

定理 2.2 (Quillen [87, 88, 89]，Quillen–Venkov [90])　G を有限群とする．$\mathrm{EA}(G)$ を G の基本可換 p-部分群全体のなす集合とすれば

$$V_G(k)=\bigcup_{E\in\mathrm{EA}(G)}\mathrm{res}^*_{G,E}V_E(k)$$

が成り立つ．E が極大基本可換 p-部分群のとき，$\mathrm{res}^*_{G,E}\,V_E(k)$ は $V_G(k)$ の既約成分である．

有限群 G の基本可換 p-部分群の最大階数を G の p-階数という．定理から，特に $H^*(G,k)$ の Krull 次元は G の p-階数に等しいことが結論される．そこで，上の定理は '次元定理' と通称されている．

定理 2.2 は次のようにも述べられる．すなわち，コホモロジー環 $H^*(G,k)$ の元 ζ は，どの基本可換 p-部分群 E についても $\mathrm{res}_{G,E}\,\zeta=0$ ならば，べき零である．基本可換 p-部分群 E に対して $\mathfrak{p}_E=\mathrm{res}^{-1}_{G,E}\sqrt{0}\subset H^*(G,k)$ はコホモロジー環 $H^*(G,k)$ の素イデアルである．特に，極小素イデアルは極大基本可換 p-部分群の共役類と，この対応によって，1 対 1 に対応する．

r を G の p-階数とすれば，$H^*(G,k)$ の Krull 次元は r であるから，r 個の正の斉次元 $\zeta_1,\ldots,\zeta_r\in H^*(G,k)$ で $H^*(G,k)$ が部分環 $k[\zeta_1,\ldots,\zeta_r]$ 上有限生成となるものが存在する．このような $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ を斉次パラメーター系とよぶ．斉次元 $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ がパラメーター系であるためには $\sqrt{(\zeta_1,\ldots,\zeta_r)}=H^+(G,k)$ であること，代数的多様体の言葉では $V_G(\zeta_1,\ldots,\zeta_r)=\{\,0\,\}$ であることが必要十分である．

2.3　extraspecial p-群

extraspecial p-群は有限群論のいたるところに登場するが，コホモロジー論においても同様であって，コホモロジー論におけるさまざまな現象が典型的に現れる．まさに，格別な群である．ここでは，p を奇素数として，位数 p^3，指数 p の extraspecial 群

$$P=\langle\,a,b\mid a^p=b^p=[a,b]^p=1,[[a,b],a]=[[a,b],b]=1\,\rangle$$

のコホモロジー環[9)] の極大イデアルスペクトラムを述べる．

$c=[a,b]$ とおく．$Z(P)=\langle c\rangle$ である．$j=0,\ldots,p-1$ に対し $E_j=\langle ab^j,c\rangle$; $a_j=ab^j$ とおき，$E_\infty=\langle b,c\rangle$; $a_\infty=b$ とおく．集合 $\{E_0,\ldots,E_{p-1},E_\infty\}$ は P の極大基本可換部分群の全体である．$j=0,1,\ldots,p-1,\infty$ に対し，$H^1(E_j,\mathbf{F}_p)$ を $\mathrm{Hom}(E_j,\mathbf{F}_p)$ とみなして，$\lambda_1^{(j)}=a_j^*$，$\mu_1^{(j)}=c^*$ とおき

$$\lambda_2^{(j)}=\mathit{\Delta}(\lambda_1^{(j)}),\ \mu_2^{(j)}=\mathit{\Delta}(\mu_1^{(j)})$$

とおく．ここで $\mathit{\Delta}:H^1(E_j,\mathbf{F}_p)\to H^2(E_j,\mathbf{F}_p)$ は Bockstein 写像である．コホモロジー環 $H^*(P,k)$ の元を定義する．$H^1(P,k)$ を $\mathrm{Hom}(P,k)$ とみなして，

$$\alpha_1=a^*,\beta_1=b^*;\ \alpha_2=\mathit{\Delta}(\alpha_1),\ \beta_2=\mathit{\Delta}(\beta_1)$$

とおく．ここで，$\mathit{\Delta}:H^1(P,k)\to H^2(P,k)$ は Bockstein 準同型である．$(\mu_2^{(j)})^{p-1}\in H^{2p-2}(E_j,k)$ のトレースの和として

$$\chi_{2p-2}=\sum_{j=0,\ldots,p-1,\infty}\mathrm{tr}_{E_j,P}\,(\mu_2^{(j)})^{p-1}\in\sum_{j=0,\ldots,p-1,\infty}\mathrm{tr}_{E_j,P}H^{2p-2}(E_j,k)$$

とおき，さらに

$$\nu=\mathrm{norm}_{E_\infty,P}\,\mu_2^{(\infty)}\in H^{2p}(P,k)$$

とおく．

以下では，コホモロジーの元の下付きの添え字 (斉次数を表している) を省略する．α,β,χ,ν はべき零でなく，コホモロジー環 $H^*(P,k)$ はこれらとべき零元で生成され，関係式も明らかになっている (Leary [69] Theorem 6)．大事なことは次である．

(1) ν は零因子でない．

(2) $\{\chi,\nu\}$ は $H^*(P,k)$ の斉次パラメーター系[10)] である．

(3) 剰余環 $H^*(P,k)/\sqrt{0}$ の構造は以下のとおりである:

$$H^*(P,k)/\sqrt{0}\simeq k[\alpha,\beta,\chi,\nu]/I,$$
$$I=\bigl(\alpha^p\beta-\alpha\beta^p,\alpha(\alpha^{p-1}+\chi),\beta(\beta^{p-1}+\chi),(\alpha^{p-1}+\chi)(\beta^{p-1}+\chi)\bigr).$$

元 α,β,χ,ν の極大基本可換部分群への制限は表のようである：

ζ	α	β	χ	ν
$\mathrm{res}_{P,E_j}\,\zeta,\ j\in\mathbf{F}_p$	$\lambda^{(j)}$	$j\lambda^{(j)}$	$-(\lambda^{(j)})^{p-1}$	$-(\lambda^{(j)})^{p-1}\mu^{(j)}+(\mu^{(j)})^p$
$\mathrm{res}_{P,E_\infty}\,\zeta$	0	$\lambda^{(\infty)}$		

極大イデアルスペクトラムを，根基 $\sqrt{0}$ による剰余環の極大イデアルと同一視して記述しよう．

$H^*(E_j,k)/\sqrt{0}\simeq k[\lambda^{(j)},\mu^{(j)}]$ である．例えば，$j=0,\ldots,p-1$ のとき，$H^*(E_j,k)$ の極大イデアル $\bigl(\lambda^{(j)}-s,\mu^{(j)}-t\bigr)$ の res_{P,E_j}^* による像は，$\bigl(\alpha-s,\beta-js,\chi+s^{p-1},\nu-(s^{p-1}t-t^p)\bigr)$ である．$t\in k$ が全ての元を動くとき，$u=s^{p-1}t-t^p$ も k の全ての元を動くから，アフィン空間の閉集合として，$\mathrm{res}_{P,E_j}^*\,V_{E_j}(k)=\{\bigl(s,js,-s^{p-1},u\bigr)\mid s,u\in k\}$ である．定理 2.2 により次を得る：

$$V_P(k) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \{\, \bigl(s, js, -s^{p-1}, u\bigr) \mid s, u \in k \,\} \bigcup \{\, \bigl(0, s, -s^{p-1}, u\bigr) \mid s, u \in k \,\}.$$

例えば，点 $(s, js, -s^{p-1}, u)$ と原点を通る '直線' は $\{\, (v^2 s, v^2 js, -v^{2p-2} s^{p-1}, v^{2p} u) \mid v \in k \,\}$ である．

もう少し詳しく見てみよう．部分群 E_j に対して，$H^*(E_j, k)$ の極大イデアル $(\lambda^{(j)} - s, \mu^{(j)} - t)$ が E_j の真部分群 (つまり，位数 p の巡回部分群) の極大イデアルの引き戻しではないという条件は，$s^p t - s t^p \neq 0$ と同値である．従って，$V^+_{P,E_j} = \mathrm{res}^*_{P,E_j} \bigl(V_{E_j}(k) \setminus \bigcup_{F < E_j} \mathrm{res}^*_{E_j,F} V_F(k)\bigr)$ とおくと

$$V^+_{P,E_j} = \begin{cases} \{\, \bigl(s, js, -s^{p-1}, u\bigr) \mid s, u \in k, su \neq 0 \,\}, & j = 0, 1, \ldots, p-1, \\ \{\, \bigl(0, s, -s^{p-1}, u\bigr) \mid s, u \in k, su \neq 0 \,\}, & j = \infty \end{cases}$$

である．次に，位数 p の部分群のコホモロジー環の極大イデアルからの引き戻しを調べる．巡回部分群 C に対して $V^+_{P,C} = \mathrm{res}^*_{P,C} \bigl(V_C(k) \setminus \{\, 0 \,\}\bigr)$ とおく．P の位数 p の部分群の共役類の代表系として，$\{\, \langle a \rangle, \langle ab \rangle, \ldots, \langle ab^{p-1} \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle \,\}$ を採用する．$V^+_{P,C}$ は以下のように記述される：

$$V^+_{P,C} = \begin{cases} \{\, \bigl(s, js, -s^{p-1}, 0\bigr) \mid s \in k, s \neq 0 \,\}, & C = \langle ab^j \rangle,\ j = 0, 1, \ldots, p-1, \\ \{\, \bigl(0, s, -s^{p-1}, 0\bigr) \mid s \in k, s \neq 0 \,\}, & C = \langle b \rangle, \\ \{\, (0, 0, 0, u) \mid u \in k, u \neq 0 \,\}, & C = \langle c \rangle. \end{cases}$$

このように，$V_P(k)$ は $V^+_{P,Q}\ (Q \in \mathrm{EA}(P))$ という階層に分けられる．これは一般の有限群 G の極大イデアルスペクトラム $V_G(k)$ についても同様である (Quillen [87, 88, 89])．

さて，関係式 $\alpha^p \beta - \alpha \beta^p = 0$ が成り立つが，左辺は P のすべての極大部分群に対応する Bockstein 要素の積である (Serre の定理)．また，$\nu = \mathrm{norm}_{E_\infty,P}\, \mu_2^{(\infty)} \in H^{2p}(P, k)$ は長さ $2p$ の拡大

$$0 \to k \to X_{2p-1} \to \cdots \to X_0 \to k \to 0$$

で表されるが，$X_0, X_p, X_{2p-2}, X_{2p-1}$ 以外は射影的で，これらについては次のように直和分解する：

$$X_0 \simeq \bigoplus_{j=0}^{p-1} kP \otimes_{k\langle ab^j \rangle} k \oplus (\text{射影加群}), \quad X_p \simeq \bigoplus_{j=0}^{p-1} kP \otimes_{k\langle ab^j \rangle} k \oplus (\text{射影加群}),$$
$$X_{2p-2} \simeq kP \otimes_{k\langle b \rangle} k \oplus (\text{射影加群}), \quad X_{2p-1} \simeq kP \otimes_{k\langle b \rangle} k.$$

この拡大については第 5 節で詳しく考察する．

2.4 有限生成 kG-加群のコホモロジー環における代数的多様体

Serre の定理を用いて，Chouinard [51] 1976 は kG-加群は，それが任意の基本可換 p-部分群 E 上射影的であるとき，しかもそのときに限って射影的であることを示した[11)]．5 年後，Alperin–Evens [6] 1981 は加群の complexity という非負整数の不変量をその加群の極小射影分解を用いて定義した．有限生成 kG-加群が射影的であることはその加群の complexity が 0 ということである．有限生成直既約 kG-加群が周期的である[12)] ことはその加群の complexity が 1 ということである．[6] では有限生成 kG-加群の complexity はその加群の基本可換 p-部分群 E 上の加群としての complexity の最大値に等しいことを示し，有限生成 kG-加群についての Chouinard の定理を導いた．自明な kG-加群に

彼らの定理を適用すれば，自明な kG-加群の complexity はコホモロジー環 $H^*(G,k)$ の Krull 次元であるので，Quillen の次元定理を得る．直後，Alperin–Evens [7] 1982，Avrunin [10] 1981 は [6] の結果を，コホモロジー環における加群の Ext 群の零化イデアルによる剰余環の素イデアルスペクトラムの命題に拡張した．次の定義は当初のものとは若干異なり，Carlson によるものである．

定義 2.4 有限生成 kG-加群 M の Ext 群 $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ はネーター的 $H^*(G,k)$-加群である．その $H^*(G,k)$ における零化イデアルを $J_G(M)$ とし，$V_G(k)$ の閉集合

$$V_G(M) = \{\, \mathfrak{m} \in V_G(k) \mid \mathfrak{m} \supset J_G(M) \,\}$$

を M の台多様体 (support variety) とよぶ．$J_G(M) = \{\, \xi \in H^*(G,k) \mid \xi \mathrm{Id}_M = 0 \,\}$ とも表される．

M が射影的ならば，$J_G(M)$ は無縁イデアルであるから，$V_G(M) = \{\, 0 \,\}$ である．逆に，$V_G(M) = \{\, 0 \,\}$ ならば十分大きな i に対して $\mathrm{Ext}^i_{kG}(M,M) = 0$ であり，M が射影的であることがわかる．

簡単にわかる性質を述べる．

命題 2.3 L, M, N を有限生成 kG-加群とする．

(1) $0 \to L \to M \to N \to 0$ が完全ならば L, M, N のどの多様体も他の二つの多様体の和集合に含まれる．

(2) $V_G(M \oplus N) = V_G(M) \cup V_G(N)$.

(3) $V_G(\Omega^m M) = V_G(M) = V_G(M^*)$ [13)]，ここで，m は任意の整数である．

(4) 部分群 $H \leqslant G$ に対して $V_H(M) \subset (\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1} V_G(M)$.

(5) $V_G(M \otimes_k N)$ [14)] $\subset V_G(M) \cap V_G(N)$.

(4) の証明には Eckmann–Shapiro の同型が必要である．実は (4)，(5) において等号が成立するが，これらは深い事実である．

次は基本定理であり，最近の発展の出発点となった．

定理 2.4 (Alperin–Evens [7]，Avrunin [10]) M を有限生成 kG-加群とすると

$$V_G(M) = \bigcup_{E \in \mathrm{EA}(G)} \mathrm{res}^*_{G,E} V_E(M)$$

である．

これは Sylow の定理によってまず G が p-群である場合に帰着させ，基本可換 p-群でなければ，Serre の定理によって $V_G(M) = \bigcup_{H<G} \mathrm{res}^*_{G,H} V_H(M)$，ここで和集合は G の極大部分群 H について和をとる，を示し，帰納法によって得られる．

台多様体 $V_G(M)$ は極大イデアルスペクトラム $V_G(k)$ におけると同様の階層構造を持つ (Avrunin–Scott [11] 1982)．この事実から，次の定理 2.5 が導かれ，さらに，定理 2.6 が得られる[15)]．

定理 2.5 H を G の部分群とする．有限生成 kG-加群 M に対して，$V_H(M) = (\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1} V_G(M)$ が成り立つ．

定理 2.6 有限生成 kG-加群 M, N に対して，$V_G(M \otimes_k N) = V_G(M) \cap V_G(N)$ が成り立つ．

定理 2.4 により，加群の台多様体は基本可換 p-群の加群の台多様体に帰着されるわけであるが，これを考察するために，Carlson によるランク多様体が有用である．

2.5 基本可換 p-群とランク多様体

$E = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ を階数 n の基本可換 p-群とする．

ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in k^n$ に対して $u_{\boldsymbol{t}} = 1 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - 1)$ とおく．$\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$u_{\boldsymbol{t}}$ は kE の位数 p の単元である．

定義 2.5　有限生成 kE-加群 M に対して

$$V_E^r(M) = \{\, \boldsymbol{t} \in k^n \mid \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0},\ M \text{ は } k\langle u_{\boldsymbol{t}} \rangle\text{-加群として自由でない} \,\} \cup \{\, \boldsymbol{0} \,\}$$

とおき，これを M のランク多様体 (rank variety) とよぶ．これは，$\boldsymbol{t} \in k^n$ ($\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$) は，$u_{\boldsymbol{t}} - 1$ の M 上の線形変換としてのランクが $(1 - 1/p) \dim M$ より小であるとき，しかもそのときに限って，$V_E^r(M)$ に属するということから名づけられている．この条件はまた，線形変換 $u_{\boldsymbol{t}} - 1$ の表現行列のしかるべき小行列式の値が 0 であるということであるから，$\boldsymbol{t} \in V_E^r(M)$，$\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$，は斉次多項式の根であるので，集合 $V_E^r(M)$ は斉次代数的多様体である．

k^n の Frobenius 写像 φ を

$$\varphi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \begin{cases} (t_1, \ldots, t_n), & p = 2 \text{ のとき}, \\ (t_1^p, \ldots, t_n^p), & p > 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義すると，

定理 2.7 (Avrunin–Scott [11] 1982，Carlson [32][16)]1985)　$V_E(M)$ をアフィン空間 $A^n(k)$ の閉集合と同一視して，Frobenius 写像 φ は 1 対 1 対応

$$V_E(M) \to V_E^r(M)$$

を引き起こす．

ランク多様体の源は Dade の定理 ([54] 1978)，Kroll [65] 1984 に求められる．Dade の定理はランク多様体の言葉では次のように述べられ，定理 2.7 の系として捉えられる．

定理 2.8 (Dade [54])　E を基本可換 p-群とする．有限生成 kE-加群 M は $V_E^r(M) = \{\, 0 \,\}$，つまりどの $\langle u_{\boldsymbol{t}} \rangle$ 上の加群としても射影的であるとき，しかもそのときに限って，射影的である．

2.6　コホモロジー環の斉次元が定める加群

定義 2.6　有限生成 kG-加群 M の極小射影分解を考えることによって，S が既約 kG-加群ならば，正の整数 m に対して同型 $\mathrm{Ext}_{kG}^m(M, S) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega^m M, S)$ が成り立つことがわかる．特に，$H^m(G, k) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega^m k, k)$ である．よって，$\rho \in H^m(G, k)$ が 0 でなければ，これは，kG-準同型 $\widehat{\rho} : \Omega^m k \to k$ と対応する．その核を L_ρ と書き，Carlson 加群とよぶ．一方，$\rho = 0$ のとき，$L_\rho = \Omega^m k \oplus \Omega k$ と定義する．いずれの場合にも短完全列

$$0 \to L_\rho \to \Omega^m k \oplus (\text{射影加群}) \xrightarrow{\widehat{\rho}} k \to 0$$

が得られる．上の直和因子の射影的 kG-加群は，$\rho \neq 0$ のときは 0 であり，$\rho = 0$ のときは k の射影被覆である．

同型 $H^m(G, k) \simeq \mathrm{Ext}_{kG}^1(\Omega^{m-1} k, k)$ により，$\rho \neq 0$ は次の拡大に対応する：

$$0 \to k \to \Omega^{-1} L_\rho \to \Omega^{m-1} k \to 0$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & L_\rho & & L_\rho & & & & \\
0 & & \Omega^m k & & P_m & & \Omega^{m-1}k & & 0 \\
 & & & \mathrm{PO} & & & & & \\
0 & & k & & \Omega^{-1}L_\rho & & \Omega^{m-1}k & & 0 \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

ここで，$P_m \to \Omega^{m-1}k \to 0$ は射影被覆である．

次の命題を確かめることは難しくないが，大事な性質である．

命題 2.9　(1) 正の斉次元 $\rho \in H^m(G,k)$ の Carlson 加群 L_ρ を部分群 $H \leqslant G$ 上の加群とみると，$\mathrm{res}_{G,H}\,\rho$ の Carlson 加群 $L_{\mathrm{res}_{G,H}\,\rho}$ と射影的 kH-加群の直和に分解する．

(2) 正の斉次元 $\rho \in H^m(G,k)$, $\sigma \in H^l(G,k)$ の積 $\rho\sigma$ の Carlson 加群について，短完全列

$$0 \to \Omega^m L_\sigma \to L_{\rho\sigma} \oplus (\text{射影加群}) \to L_\rho \to 0$$

が得られる．これは，$\rho, \sigma, \rho\sigma$ のいずれかが 0 の場合も成り立つ．

0 でない $\rho \in H^m(G,k)$ の $V_G(L_\rho)$ を調べよう．拡大 $0 \to L_\rho \to \Omega^m k \xrightarrow{\widehat{\rho}} k \to 0$ が導くコホモロジー完全列

$$\cdots \to H^i(G,L_\rho) \to H^i(G,\Omega^m k) \xrightarrow{\widehat{\rho}_*} H^i(G,k) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(G,L_\rho) \to \cdots$$

において，$i > m$ のとき，同型 $H^i(G,\Omega^m k) \simeq H^{i-m}(G,k)$ により写像 $\widehat{\rho}_*$ は元 ρ による積であることに注意しよう．斉次元 $\xi \in J_G(L_\rho)$ について，$\delta\xi H^i(G,k) = \xi\delta H^i(G,k) \subset \xi H^{i+1}(G,L_\rho) = 0$ を得る．よって，十分大きな i について $\xi H^i(G,k) \subset \rho H^*(G,k)$ である．それゆえ，$J_G(L_\rho) \subset \sqrt{(\rho)}$ であることがわかる[17)]．逆に，コホモロジー完全列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_{kG}(L_\rho,L_\rho) \to \mathrm{Ext}^i_{kG}(L_\rho,\Omega^m k) \to \mathrm{Ext}^i_{kG}(L_\rho,k) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{kG}(L_\rho,L_\rho) \to \cdots$$

を用いて，$\rho^2 \in J_G(L_\rho)$ が確かめられる[18)]．すなわち，$\sqrt{J_G(L_\rho)} = \sqrt{(\rho)}$ である．

命題 2.10　(1) 正の斉次元 $\rho \in H^*(G,k)$ に対して $V_G(L_\rho) = V_G(\rho)$ が成り立つ．

(2) $V_G(k)$ のどの斉次閉部分集合も有限生成 kG-加群の台多様体として表される．

この命題によって，コホモロジー論とモデュラー表現論が直接結びつくのである．Carlson 加群は様々な場面で活躍するコホモロジー論のヒーローである．例えば次の定理の証明に用いられる．

定理 2.11 (Carlson [31] 1984)　有限生成 kG-加群 M の台多様体が $\{0\}$ でない斉次閉部分集合 V_1, V_2 によって $V_G(M) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{0\}$ と分解されるならば，$M = M_1 \oplus M_2$, $V_G(M_1) = V_1$, $V_G(M_2) = V_2$ と直和分解される．

例を extraspecial p-群で見てみよう．

例 2.2　2.3 節の記号を用いる．$\nu \in H^{2p}(P,k)$ の Carlson 加群 L_ν を調べよう．命題 2.10 により，

$$V_P(L_\nu) = V_P(\nu) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \{\,(s, js, -s^{p-1}, 0) \mid s \in k\,\} \bigcup \{\,(0, s, -s^{p-1}, 0) \mid s \in k\,\}$$

である．$V_j = \{\,(s, js, -s^{p-1}, 0) \mid s \in k\,\}$, $j = 0, \dots p-1$, $V_\infty = \{\,(0, s, -s^{p-1}, 0) \mid s \in k\,\}$ とおくと，異なる $i, j \in \{\,0, \dots, p-1, \infty\,\}$ に対して $V_i \cap V_j = \{\,0\,\}$ であるから，定理 2.11 により，

$$L_\nu = L_0 \oplus \cdots \oplus L_{p-1} \oplus L_\infty, \quad V_P(L_j) = V_j$$

と直和分解する．各 $j = 0, 1, \dots, p-1, \infty$ について $V_j = \mathrm{res}^*_{P,\langle\, a_j\,\rangle} V_{\langle\, a_j\,\rangle}(k) = V_P(\mathfrak{p}_{\langle\, a_j\,\rangle})$ は既約，特に連結であるから，直和因子 L_j は直既約である[19]．

直和因子 L_j を調べておこう．$\{\,\chi, \nu\,\}$ はコホモロジー環 $H^*(P,k)$ のパラメーター系であった[20] が，これは $L_\chi \otimes_k L_\nu$ が射影的であることと同値である[21]．$\chi \in \sum_{j=0,\dots,p-1,\infty} \mathrm{tr}_{E_j,P} H^{2p-2}(E_j, k)$ であることと，$L_\chi \otimes_k L_\nu$ が射影的であることから，L_ν は

$$\bigoplus_{j=0,\dots,p-1,\infty} kP \otimes_{kE_j} L_\nu = \bigoplus_{j=0,\dots,p-1,\infty} kP \otimes_{kE_j} \left(L_{\mathrm{res}_{P,E_j}\nu} \oplus (\text{射影加群})\right)$$

の直和因子である[22] ことがわかる．このことから，$j = 0, \dots, p-1, \infty$ について $L_j = kP \otimes_{kE_j} L_{\mu^{(j)}}$ であることが結論される．

Carlson 加群は群環の表現環 (Green 環) における 0 でないべき零元の構成 (Benson–Carlson [18] 1986) にも用いられた．また, p-階数 2 のいくつかの有限群のコホモロジー環の計算 (Okuyama–Sasaki [83] 2001，Sasaki [94] 2000) では本質的には自明な加群 k の Carlson 加群に関する相対射影被覆 (入射包絡) の理論が用いられた．

2.7　基本可換部分群と加群のフィルター付け

Carlson [40] 2000 は有限群のコホモロジー論と表現論における基本可換部分群の重要性を改めて浮き彫りにする次の定理を示した．証明には Serre の定理は使うものの表現論の基本的な事実とホモロジー代数しか用いない．定理とそのいくつかの系は多くの事実を含んでおり，例えば，Chouinard の定理，Alperin–Evens，Avrunin の定理 2.4 らをこれから導くことができる．

定理 2.12　有限群 G のみに依存する自然数 $n = n(G)$ と有限生成 $\boldsymbol{Z}G$-加群 V で次を満たすものが存在する．すなわち，直和 $\boldsymbol{Z} \oplus V$ は

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = \boldsymbol{Z} \oplus V$$

とフィルター付けられ，各 $j = 1, \dots, n$ について，剰余加群 L_j / L_{j-1} は基本可換部分群 E_j 上の加群 W_j の G への誘導加群 $\boldsymbol{Z}G \otimes_{\boldsymbol{Z}E_j} W_j$ に同型である．加群 $V, W_1, \dots, W_n$ は $\boldsymbol{Z}$ 上自由にとることができる．

定理 2.13　定理 2.12 の記号の下で，R を可換環とする．$X_0, X_1, \dots, X_n$ を RG-加群とし，斉次元 $\zeta_j \in \mathrm{Ext}^{d_j}_{RG}(X_j, X_{j-1})$ が各 $j = 1, \dots, n$ について $\mathrm{res}_{G,E_j} \zeta_j = 0$ を満たすならば，$\zeta_n \cdots \zeta_1 = 0 \in \mathrm{Ext}^d_{RG}(X_n, X_0), d = d_1 + \cdots + d_n$，が成り立つ．

Carlson [29] 1981 は，Quillen–Venkov [90] の方法により，有限生成 kG-加群 M の $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M, M)$ の正の斉次元は，任意の基本可換 p-部分群への制限がべき零であるとき，しかもそのときに限ってべき

零であることを示した．従って，両側イデアル $I = \{\,\zeta \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M) \mid \mathrm{res}_{G,E}\,\zeta = 0,\ E \in \mathrm{EA}(G)\,\}$ はべき零であるが，定理 2.13 によれば，$I^n = \{\,0\,\}$ であることがわかる．

さて，Carlson [40] ではコホモロジー論の特別な道具立てなしに，複体のホモロジー群を考察するのみで結論が得られている．それゆえ，係数環についての制限や加群の有限生成性さえも必要としていない．しかし，最近の Altunbulak–Yalçin [8] 2007 によれば，係数環を標数 p の体とする場合には，コホモロジー論により密着した証明が可能である．Carlson においてもそうであるが，証明はまず G が p-群の場合に帰着させ，帰納法による．その鍵は次の命題である．

命題 2.14 p-群 G が基本可換群でなければ，G の極大部分群 $H_1,\ldots,H_n$ を適当に選んで，加群 $k \oplus \Omega^{1-n}k$ が次のようにフィルター付けられる：

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = k \oplus \Omega^{1-n}k \oplus (\text{射影加群}).$$

ここで，各 $j = 1,\ldots,n$ について $L_j/L_{j-1} \simeq kG \otimes_{kH_j} \Omega^{1-j}(k_{H_j})$ である．

まず Serre の定理 2.1 の結論をみたす $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in H^1(G,\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ をとり，これらを G から $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ への準同型とみたときの核を $H_1,\ldots,H_n \leqslant G$ とおく．今，$p > 2$ としよう．$\zeta = \Delta(\alpha_1)\cdots\Delta(\alpha_n) = 0$ である．$\zeta = 0 \in H^{2n}(G,k)$ であるから，$L_\zeta = \Omega k \oplus \Omega^{2n}k$ である．一方，$\zeta = \Delta(\alpha_1)\cdots\Delta(\alpha_n)$ であるから，命題 2.9 (2) により，$L_\zeta = \Omega k \oplus \Omega^{2n}k$ は $L_{\Delta(\alpha_j)}, j = 1,\ldots,n$ の syzygies によりフィルター付けられる．次の命題と適切に Ω を作用させることにより結論が得られる．

命題 2.15 (Altunbulak–Yalçin [8, Lemma 2.5]) G を p-群とする．$\alpha \in H^1(G,\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ に対応する極大部分群を H とおく．Bockstein $\Delta(\alpha)$ の Carlson 加群 $L_{\Delta(\alpha)}$ は適当に射影的 kG-加群との直和をとれば，次のようにフィルター付けられる：

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 = L_{\Delta(\alpha)} \oplus (\text{射影加群}).$$

ここで，$M_2/M_1 \simeq kG \otimes_{kH} \Omega(k_H)$, $M_1 \simeq kG \otimes_{kH} \Omega^2(k_H)$ である．

命題 2.14 は Carlson–Thévenaz [46] 2000，[48] 2005 において，‘critical’ な endotrivial 加群の次元を評価することに用いられた．

3 べき等加群

これまで主に有限生成 kG-加群のコホモロジーについて述べてきたが，ここで有限生成とは限らない加群のコホモロジーの理論 (Benson–Carlson–Rickard [21] 1996) に触れておきたい．まず，ランク多様体を考える出発点ともいえる Dade の定理 2.8 をみてみよう．k 上のアフィン多様体，つまりランク多様体 $V^r_E(k)$ だけでは加群の射影性を測ることができず，有限生成加群との違いがはっきりと現れている．

例 3.1 (cf. [21, Lemma 4.1]) $p = 2$ として，$E = \langle\, x, y \mid x^2 = y^2 = [x,y] = 1\,\rangle$ を階数 2 の基本可換 2-群[23) とする．S を不定元とし，$M = k(S) \oplus k(S)$ とおく．M への E の作用を $f, g \in k(S)$ に対して

$$x(f,g) = (f, f+g), \quad y(f,g) = (f, Sf+g)$$

により定義する．ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_1,t_2)(\neq \boldsymbol{0}) \in k^2$ に対して $u_{\boldsymbol{t}} - 1 = t_1(x-1) + t_2(y-1)$ の作用は

$$(u_{\boldsymbol{t}}-1)(f,g)=(0,(t_1+t_2S)f)$$

である．t_1+t_2S は $k(S)$ の可逆元であることから，M は $k\langle u_{\boldsymbol{t}}\rangle$-加群としては自由加群である．よって $V_E^r(M)=\{0\}$ であるが，M は kE-加群としては射影的ではない．一方，k を真に含む体 K に対して，$K\otimes_k M$ の KE-加群としてのランク多様体を考えると，$V_E^r(K\otimes_k M)\neq\{0\}$ となっている．

有限生成とは限らない加群についての Dade の定理は次の様になる．

定理 3.1 ([21])　E を基本可換 p-群とし，K を k の拡大体である代数的閉体で k 上の超越次数が十分に大きいものとする．このとき (有限生成とは限らない) kE-加群 M が射影的であるためには KE-加群としてのランク多様体について，$V_E^r(K\otimes_k M)=\{0\}$ となることが必要十分である．

一般の有限群 G に対しては，$V_G(k)$ の斉次既約閉部分集合の適当な集合を考えることにより，有限生成とは限らない加群に対しても台多様体の類似物 $\mathcal{V}_G(M)$ が定義され[24)]，定理 2.4，定理 2.5，定理 2.6 等が成立するのであるが，そこで本質的な役割を果たすものが Rickard によるべき等加群の理論[25)] である．

有限生成とは限らない全ての kG-加群のなす圏 Mod-kG の安定圏 StMod-kG は，有限生成加群の圏の安定圏と同様，三角圏の構造を持っている．

定理 3.2 (Rickard [91] 1997)　V を $V_G(k)$ の斉次閉部分集合とすると，StMod-kG における triangle

$$\mathcal{E}(V)\to k\to\mathcal{F}(V)\to\Omega^{-1}(\mathcal{E}(V))$$

で次を満たすものが存在する：

(1)　$\mathcal{E}(V)$ は加群の多様体が V に含まれる有限生成 kG-加群の極限[26)] である，

(2)　$V_G(M)\subseteq V$ である有限生成 kG-加群 M に対しては，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{StMod}\text{-}kG}(M,\mathcal{F}(V))=0$.

この triangle はこの二つの条件によって特徴づけられる．

$V_G(M)\subseteq V$ である有限生成 kG-加群 M に対しては，安定圏 StMod-kG において

$$\mathcal{E}(V)\otimes_k M\simeq M$$

が成り立つ．さらに，やはり安定圏 StMod-kG において

$$\mathcal{E}(V)\otimes_k\mathcal{E}(V)\simeq\mathcal{E}(V)$$

でもあり，この性質から $\mathcal{E}(V)$ はべき等加群とよばれている．この加群はほとんどの場合，有限生成ではないが，有限生成加群の研究にも有効に用いられる．次に述べる部分群からの誘導に関する結果，有限生成加群の安定圏の部分圏の研究 (Benson–Carlson–Rickard [22] 1997)，endotrivial 加群の構成に関する gluing method (Balmer–Benson–Carlson [13] 2007) などである．

Benson [16] 1994 は部分群のべき等加群との関係について次を証明した．

定理 3.3 (Benson [16])　l を $V_G(k)$ の原点を通る直線とする．定理 2.2 により基本可換 p-部分群 E で，$l\subseteq\mathrm{res}^*_{G,E}V_E(k)$ だが E の真部分群 F については $l\not\subseteq\mathrm{res}^*_{G,F}V_F(k)$ となるものが存在する．$V_E(k)$ の原点を通る直線 l_0 で $l=\mathrm{res}^*_{G,E}l_0$ となるものをとり，$D=\{\,g\in N_G(E)\mid g(l_0)=l_0\,\}\geqslant E$ とおく．このとき l_0 の D への引き戻し $l_1=\mathrm{res}^*_{D,E}l_0\subset V_D(k)$ で定められるべき等加群 $\mathcal{E}(l_1)$ の G

への誘導加群は，l で定められるべき等加群 $\mathcal{E}(l)$ と射影加群との直和に分解する：

$$kG \otimes_{kD} \mathcal{E}(l_1) \simeq \mathcal{E}(l) \oplus (\text{射影加群}).$$

$V_G(L) = l$ となる有限生成 kG-加群 L に対して，べき等加群とのテンサー積を考えることによって，StMod-kG において $L \simeq \mathcal{E}(l) \otimes_k L \simeq (kG \otimes_{kD} \mathcal{E}(l_1)) \otimes_k L \simeq kG \otimes_{kD} (\mathcal{E}(l_1) \otimes_k L)$ となることから，誘導加群に関する次の結果が得られる．これはある加群が部分群からの誘導加群の直和因子となるとき，残りの直和因子が全て射影加群となる，ということを主張しており，非常に強い結果である．[16] ではこの結果を用いて，主ブロック[27) に属する加群のコホモロジーの消滅[28) に関する Benson–Carlson–Robinson [23] 1990 の予想を証明している．次節においても，自明なソースを持つ加群のコホモロジーの消滅に関する結果の証明に有効に用いられる．

系 3.4 ([16])　定理 3.3 の記号の下で，L を有限生成[29)kG-加群で $V_G(L) = l$ とすると，有限生成 kD-加群 X で

$$kG \otimes_{kD} X \simeq L \oplus (\text{射影加群})$$

となるものが存在する．

例 3.2　P を位数 p^3，指数 p の extraspecial p-群とする．例 2.2 での記号を用いる．$l = V_j = \operatorname{res}^*_{P,\langle a_j \rangle} V_{\langle a_j \rangle}(k)$ として系 3.4 を適用すると，$D = N_P(\langle a_j \rangle) = E_j$ であるから，$V_G(M) = l$ である有限生成加群 M は E_j から誘導される．特に，例 2.2 でみたように $L_j = kP \otimes_{kE_j} L_{\mu^{(j)}}$ を得る．

なお，$V_G(k)$ の直線とは限らない一般の斉次閉部分集合に対しても，類似した結果が Carlson [37] 1996 により得られている．

一方，対象を有限生成加群に限定してしまうならば，系 3.4 の有限生成加群の枠内での証明が，Carlson [39] 1999 で得られている．これはトレース写像を用いるもので，extraspecial p-群の例では，例 2.2 での χ が部分群からのトレース写像の像に入ることから L_ν の直和因子が部分群から誘導される，という議論に相当するものである．

4　フュージョンとコホモロジー

4.1　Mislin の定理とその表現論的証明

P を G の Sylow p-部分群とする．合成 $\operatorname{tr}_{P,G} \circ \operatorname{res}_{G,P} : H^*(G,k) \to H^*(G,k)$ は $|G:P|$ 倍で同型であるから，$\operatorname{res}_{G,P}$ は単射であるが，その像はどうなるであろうか．元 $\zeta \in H^*(P,k)$ は，任意の $g \in G$ に対して，$\operatorname{res}_{G,{}^gP\cap P}\,\zeta = c_g \operatorname{res}_{G,P\cap P^g}\,\zeta$[30) となるとき，$G$-安定であるという．$\operatorname{res}_{G,P}$ の像は安定元の全体となる[31)．

H を P を含む G の部分群とする．P の任意の部分群 Q と $g \in G$ に対して，${}^gQ \subseteq P$ ならば $g \in HC_G(Q)$ となるとき，H は G でのフュージョンを統制するという．上記の安定元の理論より，このとき，制限写像 $\operatorname{res}_{G,H} : H^*(G,k) \to H^*(H,k)$ は同型写像であることが容易にわかる．しかし，驚くべきことに Mislin は逆も成立することを証明した．

定理 4.1 (Mislin [76] 1990)　G の Sylow p-部分群を含む部分群 H について，次は同値である．

(1) H は G でのフュージョンを統制する．

(2) 制限写像 $\operatorname{res}_{G,H} : H^*(G,k) \to H^*(H,k)$ は同型である．

[76] での証明はホモトピー論の深い結果を用いるものであったため，有限群のモデュラー表現論に基づく証明が模索されてきた．その後得られた Snaith [96] 2001，Symonds [97] 2004 の証明もホモトピー論からの結果によるものである．最近，懸案であったモデュラー表現論による証明が Okuyama [81] 2006，Hida [60] 2007 により独立に得られた．ここではその概略を紹介したい．

定理 4.1 の (2) から (1) の証明は，自明なソースを持つ加群のコホモロジーに関する命題に帰着させることができる．これは Robinson [92] 1998 によるアイディアである．部分群の自明な加群の G への誘導加群の直和因子である直既約加群を，自明なソースを持つ加群とよぶ．Q が自明なソースを持つ加群 M のヴァーテックスならば，M の $N_G(Q)$ における Green 対応[32] は既約 $k[N_G(Q)/Q]$-加群 V の $k[N_G(Q)/Q]$-加群としての射影被覆である．そこで，この M を $M^G_{Q,V}$ と表すことにする．

H を G の部分群で G の Sylow p-部分群を含むものとする．誘導加群 $kG\otimes_{kH}k$ の直既約直和因子は自明なソースを持つ加群である．H が G のフュージョンを統制していないと仮定すると，Alperin のフュージョン定理から，$kG\otimes_{kH}k$ の直和因子に現れる $M^G_{Q,V}$ で $C_G(Q)$ が V に自明に作用しているものがあることがわかる．もし，このような $M^G_{Q,V}$ に対して $H^*(G,M^G_{Q,V})\neq 0$ であれば

$$H^*(H,k)\simeq H^*(G,kG\otimes_{kH}k)\supseteq H^*(G,k)\oplus H^*(G,M^G_{Q,V})\neq H^*(G,k)$$

となり，制限写像 $\mathrm{res}_{G,H}$ は同型ではないこととなる．よって，次が示されればよい．

定理 4.2 ([97]，[81]，[60])　p-部分群 $Q\leqslant G$ と既約 $kN_G(Q)$-加群 V について，次は同値である．

(1)　$H^*(G,M^G_{Q,V})\neq 0$.

(2)　$C_G(Q)$ は V に自明に作用する．

これはモデュラー表現論の命題といえるであろう．(2) から (1) の証明は G の位数についての帰納法によるが，その主要な部分である位数 p の巡回部分群 E の正規化群 $N_G(E)$ に帰着させる議論 [60] を紹介する．ここで，系 3.4 が用いられ，また，各所で Carlson 加群 L_ζ の性質が使われる．

E を Q の中心に含まれる位数 p の部分群とし，$H=N_G(E)$ とおく．条件 (2) を仮定すると，$M^G_{Q,V}$ の kH-加群としての直和因子には $M^H_{Q,W}$ の形の加群で $C_H(Q)$ は W に自明に作用しているものが現れる．$H^*(H,M^H_{Q,W})\neq 0$ と仮定しよう．$H^*(G,M^G_{Q,V})\neq 0$ であることを示したい．さて，$\ker\mathrm{res}_{G,E}$ の斉次生成元 $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ をとり，対応する Carlson 加群 L_{ζ_j} のテンサー積を $L=\bigotimes_{j=1}^r L_{\zeta_j}$ とおく．$V_G(L)=\mathrm{res}^*_{G,E}V_E(k)$ であり系 3.4 により $L\oplus(\text{射影加群})=kG\otimes_{kH}X$ となる kH-加群 X が存在する．多少修正が必要だが，X もほぼ ζ_j の H への制限の Carlson 加群のテンサー積と同型であり

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(L,M^G_{Q,V})\simeq\mathrm{Ext}^*_{kG}(kG\otimes_{kH}X,M^G_{Q,V})\supseteq\mathrm{Ext}^*_{kH}(X,M^H_{Q,W})$$

となる[33]．E が Q の中心に含まれることから，$H^*(H,k)$ における $H^*(H,M^H_{Q,W})$ の零化イデアルは，素イデアル $I=\sqrt{\ker\mathrm{res}_{H,E}}$ に含まれることがわかる．さらに $\mathrm{Ext}^*_{kH}(X,M^H_{Q,W})$ の零化イデアルも I に含まれることが導かれ，特に $0\neq\mathrm{Ext}^*_{kH}(X,M^H_{Q,W})\subseteq\mathrm{Ext}^*_{kG}(L,M^G_{Q,V})$ を得る．一方，$\deg\zeta_j=m_j$, $j=1\ldots,r$ とおくと，短完全列

$$0\to L_{\zeta_j}\to\Omega^{m_j}k\to k\to 0$$

により，$H^*(G,M^G_{Q,V})=\mathrm{Ext}^*_{kG}(k,M^G_{Q,V})$ と $\mathrm{Ext}^*_{kG}(L,M^G_{Q,V})$ がコホモロジー完全列を用いて関連付けられ，$H^*(G,M^G_{Q,V})\neq 0$ であることが示される．

4.2 フュージョンシステムとコホモロジー

P を p-群とする．Broto–Levi–Oliver [27] 2003 において，P 上のフュージョンシステムのコホモロジー[34] が考察されている．P 上のフュージョンシステム[35] とは，P の部分群を対象とする圏 $\mathcal{F}$ で，部分群 Q_1，Q_2 の間の射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1, Q_2)$ は Q_1 から Q_2 への単射準同型全体の集合 $\mathrm{Inj}(Q_1, Q_2)$ の部分集合であり，さらにいくつかの条件を満たすものである．詳しくは [27]，Linckelmann [74] 2007，Puig [86] 2006 を，特に歴史的な経緯については [86] を参照していただきたい．P が有限群 G の Sylow p-部分群であるとき，G の元の共役によって引き起こされる準同型を射としてフュージョンシステム $\mathcal{F}_P(G)$ が定義される．$\mathcal{F}_P(G)$ は G の Frobenius 圏とよばれる．あるいは P が G の p-ブロックの不足群であるとき，そのブロックに付随する P における Brauer 対によっても P 上のフュージョンシステムが定義される．

p-ブロックのコホモロジーを考えようとする場合，一般の p-ブロック多元環には添加写像が存在しないため，群環 kG の場合と同様の定義はできない．しかし不足群 P のコホモロジー環の安定元として p-ブロックのコホモロジーとよぶべきもの[36] が捉えられるのである．

P 上のフュージョンシステム $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}$-安定な $H^*(P, k)$ の元全体，すなわち $\zeta \in H^*(P, k)$ で，任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, P)$ に対して，$\varphi^*(\zeta) = \mathrm{res}_{P,Q}\,\zeta$ を満たすものの全体を $H^*(\mathcal{F})$ とおく．P が G の Sylow p-部分群であるとき，$H^*(\mathcal{F}_P(G)) \simeq H^*(G, k)$ である．また，$\mathcal{F}$ が P を不足群に持つ p-ブロックに付随するフュージョンシステムのときは，$H^*(\mathcal{F})$ は Linckelmann [71] 1999 により定義された p-ブロックのコホモロジー環である[37]．

Mislin の定理 4.1 はフュージョンシステムの言葉で述べることができる．P を G の Sylow p-部分群，H は P を含む G の部分群とする．定理 4.1 は，二つの条件

(1) $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ すなわち G と H の Frobenius 圏は一致する

(2) $H^*(\mathcal{F}_P(G)) = H^*(\mathcal{F}_P(H))$

が同値である，ということであるが，これを，一般のフュージョンシステムに拡張した設定で考えることができる．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ を P 上のフュージョンシステムとし，P の任意の部分群 Q_1，Q_2 について $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1, Q_2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}'}(Q_1, Q_2)$ となっていると仮定する．このとき

(1′) $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$

(2′) $H^*(\mathcal{F}) = H^*(\mathcal{F}')$

は同値であるか，という問題である．この場合，対応する群が存在しないため，定理 4.2 のように，自明なソースを持つ加群のコホモロジーの問題に帰着させるということはできない．別の方針，例えば [97] にあるように Mackey 関手の理論を用いることが必要となるのではないだろうか．また，包含関係 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1, Q_2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}'}(Q_1, Q_2)$ を仮定せず，一般に P 上のフュージョンシステム $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ について，$H^*(\mathcal{F}) = H^*(\mathcal{F}')$ のとき，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ との関係を調べよ，という問題も非常に興味深い．

5 p-群の群環上の endotrivial 加群

Dade [53, 54] 1978 により初めて考察された endo p-置換加群とよばれる加群は有限群の表現論において，重要な役割を果たしている．これらは，p-可解群の既約加群のソースとして，またブロック間の種々の圏同値の構成に関わって現れる．endotrivial 加群は endo p-置換加群の基本構成要素というべきものである．

有限生成 kG-加群 M は，$\mathrm{End}_k(M)=\mathrm{Hom}_k(M,M)\simeq k\oplus(p\text{-置換加群})$ [38] となるとき，endo p-置換加群とよばれる．また，$\mathrm{End}_k(M)\simeq k\oplus(\text{射影加群})$ となるとき，endotrivial 加群とよばれる．自明な kG-加群 k の相対 syzygy $\Omega^m_{\mathcal{H}}k$，syzygy $\Omega^m k$, $m\in\boldsymbol{Z}$ はその典型例である．G が可換 p-群のとき，endotrivial 加群は $\Omega^m k$ に限ることが Dade [53, 54] により示されている．

Chouinard [51] の結果から導かれる次の事実は，基本可換 p-部分群と endotrivial 加群との関係を示し，endotrivial 加群についての基本定理である．

定理 5.1　有限生成 kG-加群 M は，どの基本可換 p-部分群 E についても kE-加群として endotrivial であるとき，しかもそのときに限って endotrivial である．

endotrivial 加群 M は直既約 endotrivial 加群 M_0 と射影加群との直和に分解される．そこで，endotrivial 加群 M, N は $M\oplus(\text{射影加群})\simeq N\oplus(\text{射影加群})$ が成り立つとき，同値であるという．この同値関係の同値類の全体を $T(G)$ とおく．endotrivial 加群 M の同値類を $[M]$ と書く．$[M],[N]\in T(G)$ に対して $[M]+[N]=[M\otimes_k N]$ と定義すれば，$T(G)$ はアーベル群となり，$0=[k]$，$-[M]=[M^*]$ である．$[\Omega^m k]=m[\Omega k]$ であるから，群 $T(G)$ を用いれば Dade の定理は次のように述べられる．

定理 5.2 (Dade [53, 54])　G が可換 p-群ならば，$T(G)=\langle\,[\Omega k]\,\rangle$ である．

一般に，kG-加群 M を部分群 $H\leqslant G$ 上の加群とみる (‘H へ制限する’ という) とき，M_H と書く．

G を p-群とする．アーベル群 $T(G)$ は有限生成であることが Puig [85] 1990 により証明された．ここでも基本可換 p-部分群の役割が大きな位置を占めている．

定理 5.3 (Puig [85])　アーベル群 $T(G)$ は有限生成で，写像

$$\prod_{E\in\mathrm{EA}(G)}\mathrm{res}_{G,E}:T(G)\to\prod_{E\in\mathrm{EA}(G)}T(E)$$

の核はトーション群である．ここで，$[M]\in T(G)$ に対して $\mathrm{res}_{G,E}[M]=[M_E]\in T(E)$ である．

この後，しばらくの年月をおいて，Alperin [5] 2001 は，ある設定の下で k の相対 syzygy が endotrivial 加群を生産し，それらが $T(G)$ の有限指数の自由な部分群を生成することを示して $T(G)$ の自由階数を与えた．$T(G)$ のトーション部分が Carlson–Thévenaz [46] 2000，[48] 2005 の大作により解明され，そしてついに，Carlson–Thévenaz [47] 2004 により $T(G)$ の生成元が構成され，endotrivial 加群の分類が完結した．そこでは，コホモロジー論，特に加群の代数的多様体の理論が決定的役割を果たしていた．Carlson [43] 2006 は，その議論をより統一的，利便性に富んだ方法として整理し，endotrivial 加群を $\Omega^m k$ のセクション (部分加群の剰余加群) として，あるいは適当な斉次コホモロジー元の Carlson 加群に関わる pushout として構成している．また，Balmer–Benson–Carlson [13] 2007 は，Carlson の pushout 構成方法が Balmer–Favi [12] 2007 の加群の gluing の一つであることを注意し，有限生成とは限らない加群のコホモロジー論から解釈している．

この節では，Alperin [5] の結果，Carlson [43] での endotrivial 加群の構成方法を紹介し，Carlson–Thévenaz の労作の雰囲気を伝えたい．群環上の加群はすべて有限生成である．

5.1　加群の相対射影被覆

kG-加群の射影被覆の概念の拡張として，部分群の族に関する相対射影被覆が考えられる．手軽だが巧みな道具で，有限群のコホモロジー論に限ってもきらりと光る活躍[39] をしている．

H を G の部分群とする．写像 $\varepsilon_H : kG \otimes_{kH} k \to k; \sum_{xH\in G/H} a_x x \otimes 1 \mapsto \sum_{xH \in G/H} a_x (a_x \in k)$ は kH-準同型としては分裂全射である．kG-加群 X は $\varepsilon_H \otimes \mathrm{Id}_X : kG \otimes_{kH} X \to X$ が分裂全射であるとき，H-射影的とよばれる．これは，X がある kH-加群 Y の G への誘導加群 $kG \otimes_{kH} Y$ の直和因子に同型であることと同値であり，H-入射的ともいってよい．短完全列 $0 \to \ker \varepsilon_H \to kG \otimes_{kH} k \to k \to 0$ に kG-加群 M をテンサーすると，$0 \to N \to X \xrightarrow{\sigma} M \to 0$ の形の短完全列が得られ，

(1) X は H-射影的,

(2) kH-加群の列として分裂

の二つの条件をみたす．この二条件をみたす列を M の H-射影分解とよぶ．H-射影分解のうち極小なものが (列の同型を除いて) 一意的に存在することが確かめられ，それを M の (相対)H-射影被覆とよぶ．$0 \to N \to X \xrightarrow{\sigma} M \to 0$ が M の H-射影被覆のとき，$N = \Omega_H M$ と書く．双対的に，kG-加群の H-入射包絡が定義される．例えば上の列は N の H-入射包絡でもあり，$M = \Omega_H^{-1} N$ と書く．帰納的に $\Omega_H^m M$, $m \in \boldsymbol{Z}$ が定義される．$H = 1$ のとき通常の射影被覆，入射包絡に一致している．

$K \leqslant G$ の共役部分群が H に含まれるならば，$0 \to N' \to X' \xrightarrow{\sigma'} M \to 0$ を M の K-射影被覆とするとき，σ' は σ を通過し，自然に kG-準同型 $\tau : \Omega_K M \to \Omega_H M$ が誘導される．

例 5.1 H が G の指数 p の正規部分群のとき，$p = 2$ なら $\Omega_H k = k$，$p > 2$ なら $\Omega_H^2 k = k$ となることが容易に確かめられる．実際，相対射影被覆を 1 回，または 2 回とり，H に対応する 1 次のコホモロジー元，H に対応する Bockstein 要素を与える次の拡大が得られる：

$$0 \to k \to kG \otimes_{kH} k \to k \to 0 \quad (p = 2),$$
$$0 \to k \to kG \otimes_{kH} k \to kG \otimes_{kH} k \to k \to 0 \quad (p > 2).$$

$\mathcal{H}$ を G の部分群からなる族とする．写像 $\sum \varepsilon_H : \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} kG \otimes_{kH} k \to k \to 0$ を考えることにより，kG-加群 M の $\mathcal{H}$-射影性，$\mathcal{H}$-射影被覆，$\mathcal{H}$-入射包絡，$\Omega_{\mathcal{H}}^m M$ などが定義される．$\Omega_{\mathcal{H}}$ を相対 Heller 作用素とよぶ．次の事実は容易に確かめられる：

$$(\Omega_{\mathcal{H}}^m k)^* \simeq \Omega_{\mathcal{H}}^{-m} k, \quad \Omega_{\mathcal{H}}^m k \otimes_k \Omega_{\mathcal{H}}^{-m} k \simeq k \oplus (\mathcal{H}\text{-射影的 } p\text{-置換加群}).$$

相対射影被覆は部分群との相性もよい．kG-加群 M の $\mathcal{H}$-射影被覆の部分群 $K \leqslant G$ への制限は，K の部分群の族 $K \wedge_G \mathcal{H} = \{ K \cap {}^g H \mid g \in G, H \in \mathcal{H} \}$ に関する相対射影分解である．

$\mathcal{K}$ を G の部分群のもうひとつの族とし，$\mathcal{K} \wedge_G \mathcal{H} = \{ K \cap {}^g H \mid g \in G, K \in \mathcal{K}, H \in \mathcal{H} \}$ とおく．$\mathcal{K} \wedge_G \mathcal{H}$ に属する部分群は $\mathcal{H} \wedge_G \mathcal{K}$ に属する部分群と G-共役で，また逆も同様であって，$\Omega_{\mathcal{K}\wedge_G\mathcal{H}} M \simeq \Omega_{\mathcal{H}\wedge_G\mathcal{K}} M$ である．次の相対 Heller 作用素の交換法則[40) は相対射影被覆のもつ威力を示す：

$$\Omega_{\mathcal{H}} \circ \Omega_{\mathcal{K}} M \simeq \Omega_{\mathcal{K}\wedge_G\mathcal{H}} \circ \Omega_{\mathcal{H}\cup\mathcal{K}} M \simeq \Omega_{\mathcal{H}\wedge_G\mathcal{K}} \circ \Omega_{\mathcal{K}\cup\mathcal{H}} M \simeq \Omega_{\mathcal{K}} \circ \Omega_{\mathcal{H}} M.$$

例 5.2 階数 2 の基本可換 p-群 E で例をみてみよう．E の位数 p の相異なる部分群を任意に $s\,(1 \leqslant s \leqslant p+1)$ 個とりその集合を $\mathcal{H}_s$ とおく．例 5.1 ($s = 1$ の場合) と交換法則を繰り返し用い，次の事実を得る：

$$\Omega_{\mathcal{H}_s} M = \Omega^{-(s-1)} M \,(p = 2), \quad \Omega_{\mathcal{H}_s}^2 M = \Omega^{-2(s-1)} M \,(p > 2).$$

部分群 H とその部分群の族 $\mathcal{K}$ と kH-加群 N について，$(\Omega_{\mathcal{K}} N)^{\otimes G}$ の解釈が Bouc [24] 2000 によ

り考察されているが，ここでは，2.3 節の extraspecial p-群 P の考察における $\nu \in H^{2p}(P,k)$ を与える長さ $2p$ の拡大の性質をみるにとどめる．

例 5.3　2.3 節と同じ記号を用いる．$E = E_\infty = \langle b, c \rangle$ を考え，$\mathcal{H} = \{ \langle a \rangle, \langle ab \rangle, \ldots, \langle ab^{p-1} \rangle \}$，$\mathcal{K} = \{ \langle a \rangle, \langle ab \rangle, \ldots, \langle ab^{p-1} \rangle, \langle b \rangle \}$ とおく．$\mu = \mu_2^{(\infty)} \in H^2(E,k)$ を与える 2 次の拡大 $0 \to k \to kE \otimes_{k\langle b \rangle} k \to kE \otimes_{k\langle b \rangle} k \to k \to 0$ は $\Omega^2_{\langle b \rangle} k_E = k_E$ であることを示す．ノルム $\nu = \mathrm{norm}_{E,P}\, \mu \in H^{2p}(P,k)$ が表す $2p$ 次の拡大 $0 \to k \to X_{2p-1} \to \cdots \to X_0 \to k \to 0$ において，0, p 次で $\mathcal{H}$-射影被覆が，$2p-2$，$2p-1$ 次で $\langle b \rangle$-射影被覆がとられていて，$\Omega^{2(p-2)} \circ \Omega^2_{\langle b \rangle} \circ \Omega^2_{\mathcal{H}} k = k$ が得られる．これは $k = k_E^{\otimes P} = (\Omega^2_{\langle b \rangle} k)^{\otimes P}$ の Bouc [24] による解釈で，Sasaki [93] でも知られている．この事実は相対 Heller 作用素の交換法則を用いて，次のように整理される：

$$\Omega^2_{\mathcal{K}} k = \Omega^{-2(p-1)} k, \quad \Omega^2_{\langle a \rangle} \circ \Omega^2_{\langle ab \rangle} \cdots \circ \Omega^2_{\langle ab^{p-1} \rangle} \circ \Omega^2_{\langle b \rangle} k = \Omega^2 k.$$

後の考察のため，次の事実を注意しておく．$1 < \langle b \rangle \in \mathcal{K}$ であることから，kP-準同型の列 $\Omega^2 k \xrightarrow{\rho'} \Omega^2_{\langle b \rangle} k \xrightarrow{\sigma'} \Omega^2_{\mathcal{K}} k$ が自然に生じる．$\Omega^2_{\mathcal{K}} k = \Omega^{-2(p-1)} k$ であったから，一斉に $\Omega^{2(p-1)}$ をとって，$N_0 = \Omega^{2(p-1)} \circ \Omega^2_{\langle b \rangle} k$ とおけば，写像列 $\Omega^{2p} k \xrightarrow{\rho} N_0 \xrightarrow{\sigma} k$ が得られる．作り方から，$\mathrm{Hom}_{kP}(\Omega^{2p} k, k)$ と $H^{2p}(P,k)$ を同一視して[41]，$\sigma \circ \rho = \nu$ となることがわかる．

5.2　相対射影被覆と endotrivial 加群

唐突ではあるが，$p > 2$ とし，extraspecial p-群 P を例として，相対 syzygy が endotrivial 加群となる例を挙げよう．

例 5.4　2.3 節と同じ記号を用いる．相対 syzygy $M = \Omega^2_{\langle b \rangle} k$ を考えよう．M は endotrivial である．実際，基本可換部分群 E_j, $j \neq \infty$ に対しては M は kE_j-加群としては，$E_j \wedge_P \{ \langle b \rangle \} = \{ 1 \}$ であるから，$M_{E_j} \simeq \Omega^2 k \oplus$ (射影加群) と直和分解する．$E_\infty = \langle b, c \rangle$ に対しては，$E_\infty \wedge_P \{ \langle b \rangle \} = \{ \langle bc^j \rangle \mid 0 \leqslant j \leqslant p-1 \}$ が p 個からなる族であるから, 例 5.2 より, $M_{E_\infty} \simeq \Omega^{-2(p-1)} k \oplus$ (射影加群) と直和分解することがわかる．よって，定理 5.1 により，M は endotrivial 加群である．

Alperin [5] はさらに一般的に論じた．以下，5.2，5.3 節では G を p-群とし，$m(G)$ でその階数を表す．

Alperin の議論を紹介しよう．部分群 $E \leqslant G$ は次の条件 (*) をもつと仮定する．

条件 (*)：E は階数 2 の極大基本可換部分群で，$E \not\leqslant \Phi(G)$, $N_G(E) > C_G(E)$ をみたす．

このとき，E は $E \cap Z(G) = \langle z \rangle$, $E = \langle y, z \rangle$ の形に書け，また階数 1 の部分群 K があって次が成り立つ：

$$N_G(\langle y \rangle) = C_G(E) = \langle y \rangle \times K, \quad E \wedge_G \{ \langle y \rangle \} = \{ \langle yz^j \rangle \mid 0 \leqslant j \leqslant p-1 \}.$$

階数 1 の群 K は，位数 p^n の巡回群 C_{p^n}，あるいは $p = 2$ で位数 2^n $(n \geqslant 3)$ の (一般) 四元数群 Q_{2^n} に同型である．これらの群では，自明な加群 k は周期的でその周期は，C_2，C_{p^n} $(p^n > 2)$，Q_{2^n} にしたがって，1, 2, 4 である．

自明な kG-加群 k の $\langle y \rangle$-相対 syzygy $\Omega_{\langle y \rangle} k$ を考える．次の命題の前半は階数 1 の群 K での k の射影被覆の形と周期から，後半の主張 (1)，(2) は例 5.4 のように証明される．

命題 5.4 (Alperin [5])　上述の設定で，$K \simeq C_2$, C_{p^n} $(p^n > 2)$, $Q_{2^{n+1}}$ のそれぞれの場合にした

がって，$e = 1, 2, 4$ とおく．このとき，$\Omega^e_{\langle y \rangle}k$ は endotrivial 加群である．$M = \Omega^{-e} \circ \Omega^e_{\langle y \rangle}k$ とおくと，次の事実が成り立つ：

(1) $M_E \simeq \Omega^{-ep}k \oplus$ (射影加群),

(2) $F \leqslant G$ を E に共役でない極大基本可換部分群とすると，$M_F \simeq k \oplus$ (射影加群).

$m(G) \geqslant 2$ とし，G の階数 2 以上の基本可換部分群のすべてからなる集合に，階数 2 の基本可換部分群を共有するという関係の生成する同値関係を考える．階数 3 以上の基本可換部分群は同じ同値類に属することが群構造論的に示される．従って，Dade の定理 5.2 により，endotrivial 加群がすべての基本可換部分群に制限して自明となるのは，すべての階数 2 の基本可換部分群へ制限して自明となるときである．

また，階数 2 の極大基本可換部分群は $m(G) \geqslant 3$ のときは全てが，$m(G) = 2$ のときは多くともひとつの G-共役類を除いて，上述の条件 (*) をみたすことがわかる．階数 2 の極大基本可換部分群の共役類の個数を r とし，その代表系 $E_1, \dots, E_r$ を，$m(G) = 2$ の場合は $E_1, \dots, E_{r-1}$ は条件 (*) をみたすようにとる．$m(G) = 2$ のとき $s = r - 1$ とおき，$m(G) \geqslant 3$ のとき $s = r$ とおく．E_j で定まる命題 5.4 の endotrivial 加群を M_j とおく．Puig の定理 5.3 とこの命題をもとに，Alperin [5] は，$[\Omega k], [M_1], \dots, [M_s]$ が $T(G)$ の有限指数の自由な部分群を生成することを示し，次の定理を得た．

定理 5.5 (Alperin [5]) $T(G)$ の自由階数は次で与えられる．

(1) $m(G) = 1$ のとき，0.

(2) $m(G) = 2$ のとき，極大基本可換部分群の共役類の個数 r.

(3) $m(G) \geqslant 3$ のとき，階数 2 の極大基本可換部分群の共役類の個数 r に 1 を加えた数 $r + 1$.

Carlson–Thévenaz [47] で完結した endotrivial 加群の分類は，Alperin の構成した endotrivial 加群 $\Omega(k), M_1, \dots, M_s$ の同値類が実際に，$T(G)$ の自由部分を生成することをいっている．

定理 5.6 (Carlson–Thévenaz [47]) 上述の記号の下，$[\Omega k], [M_1], \dots, [M_s]$ は $T(G)$ の自由部分を生成する．

例 5.5 (1) 位数 2^n の 2 面体群 $D_{2^n} = \langle y, x \mid y^2 = x^{2^{n-1}} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ における $E = \langle y, z \rangle$，また，位数 2^{n+1} の準 2 面体群 $SD_{2^{n+1}} = \langle y, x \mid y^2 = x^{2^n} = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-1}-1} \rangle$ における $E = \langle y, z \rangle$ は，$K \simeq C_2$ の例である．ここで，z は中心に属する位数 2 の元を表す．$SD_{2^{n+1}}$ において，極大基本可換部分群の共役類は唯一であるから，$T(SD_{2^{n+1}})$ の自由階数は 1 である．$\Omega_{\langle y \rangle}k$ は endotrivial 加群で，元 $[\Omega_{\langle y \rangle}k] \in T(SD_{2^{n+1}})$ は自由である．extraspecial p-群に対して行った考察と同様に，$\Omega^2_{\langle y \rangle} \circ \Omega^2 k = k$ が得られ，群 $T(SD_{2^{n+1}})$ において関係式 $2([\Omega_{\langle y \rangle}k] + [\Omega k]) = 0$ が成り立つ．従って，$N = \Omega \circ \Omega_{\langle y \rangle}k$ の同値類は位数 2 のトーション元を与える．

(2) 2.3 節の extraspecial p-群 P における E_j, $j = 0, 1, \dots, p-1, \infty$, は，$K \simeq C_p\,(p > 2)$ の例である．加群 $M_j = \Omega^{-2} \circ \Omega^2_{\langle ab^j \rangle}k$, $j = 0, \dots, p-1$，$M_\infty = \Omega^{-2} \circ \Omega^2_{\langle b \rangle}k$ は endotrivial である．$m(P) = 2$ で，先に述べた $\Omega^2_{\langle a \rangle} \circ \Omega^2_{\langle ab \rangle} \circ \cdots \circ \Omega^2_{\langle ab^{p-1} \rangle} \circ \Omega^2_{\langle b \rangle}k = \Omega^2 k$ という事実は，アーベル群 $T(P)$ において等式

$$[M_0] + \cdots + [M_{p-1}] + [M_\infty] = -2p[\Omega k]$$

が成り立つことを意味し，定理において G の階数が 2 のときと 3 以上のときとで結論が違うことの典型的現象である．

(3) 中心積 $D_8 * Q_8$ における極大基本可換 2-部分群 E は，$K \simeq Q_8$ の例である．

結果として，Alperin の構成した加群が $T(G)$ の自由部分の生成系のひとつであることがわかったが，その証明には大変な議論が必要であった．自由部分に先がけ，$T(G)$ のトーション部分の解明が Carlson–Thévenaz [46, 48] でなされている．そこでは，'critical' な endotrivial 加群，すなわち，任意の真部分群 $H < G$ に対し $M_H = k \oplus$ (射影加群) となる endotrivial 加群 M の (非) 存在を示すために，そのような M から新しい endotrivial 加群を構成する方法が考察されている．より整理された構成方法が Carlson [43] により与えられている．次にこれをみてみよう．

5.3 $\Omega^m k$ のセクションと endotrivial 加群

上にみたように，endotrivial 加群は $\Omega^m k$ の何がしかに関わっている．Carlson [43] 2006 の主方法は，適当な $\Omega^m k$ のセクションとしてそれを構成するものである．$\langle z \rangle = Z \leqslant Z(G)$ を位数 p の部分群とし，$\overline{G} = G/Z$ とおく．kG-加群 X に対し $\overline{X} = (z-1)^{p-1}X$ とおくと，これは $k\overline{G}$-加群となる．kG-加群 M が $M_Z = k \oplus$ (射影加群) をみたすとし，$k\overline{G}$-加群 $\overline{M}$ が次の条件をもつと仮定する：

$$V_{\overline{G}}(k) \text{ の斉次閉部分集合 } V_1, V_2 \text{ で，} V_{\overline{G}}(\overline{M}) = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2 = \{\,0\,\} \text{ をみたすものがある．}$$

このとき，定理 2.11 により，$\overline{M} = \widetilde{S}_1 \oplus \widetilde{S}_2$, $V_{\overline{G}}(\widetilde{S}_j) = V_j$ をみたす $k\overline{G}$-加群としての直和分解があるが，Carlson [43] は，kG-加群の直和分解 $(z-1)M = T_1 \oplus T_2$ で，$(z-1)^{p-2}T_j = \widetilde{S}_j$ なるものを構成する．そこで，$S_j = \{\, u \in M \mid (z-1)^{p-1}u \in \widetilde{S}_j \,\}$, $N_1 = S_1/T_2$, $N_2 = S_2/T_1$ とおく．

定理 5.7 (Carlson [43]) 上述の設定，記号の下で，M が endotrivial 加群であれば，N_1, N_2 も endotrivial 加群となり，$N_1 \otimes_k N_2 \simeq M \oplus$ (射影加群) が成り立つ．

Carlson [43] では，N_j の極大基本可換部分群 $E \leqslant G$ への制限 ${N_j}_E$ についての考察もなされているが，ここでは省略する．まず，位数 8 の四元数群 Q_8 で例をみる．四元数群は相対 syzygy では構成できない endotrivial 加群をもつ唯一の例で不思議な振る舞いをする．

例 5.6 $Q = Q_8 = \langle y, x, z \mid x^2 = y^2 = z, [x, y] = z, z^2 = 1 \rangle$ を考える．$Z(Q) = \langle z \rangle$ であり，これを Z とおく．$\overline{Q} = Q/Z$ は四元群である．$M = \Omega^2 k$ とおく．$H^1(\overline{Q}, k)$ を $\mathrm{Hom}(\overline{Q}, k)$ と同一視して，$\lambda_1, \lambda_2 \in H^1(\overline{Q}, k)$ をそれぞれ $\overline{x}^*$, $\overline{y}^*$ と定義すれば，$k\overline{Q}$-加群 $\overline{M}$ は $\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \in H^2(\overline{Q}, k)$ の Carlson 加群 $L_{\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}$ に同型であることが，k の kQ-加群としての極小射影分解および $k\overline{Q}$-加群としての極小射影分解をつぶさに調べることにより，みてとれる．$\omega \in k$ を 1 の原始 3 乗根とすると，$L_{\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2} \simeq L_{\lambda_1+\omega\lambda_2} \oplus L_{\lambda_1+\omega^2\lambda_2}$ と分解され，$V_1 = V_{\overline{Q}}(\lambda_1 + \omega\lambda_2), V_2 = V_{\overline{Q}}(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2)$ として定理の設定がみたされる．生じる endotrivial 加群 N_1, N_2 はともに $T(Q)$ のトーション元を表し，$N_2 \simeq \Omega^2(N_1)$ である．

一般四元数群 $Q_{2^{n+1}}$，$n \geqslant 3$ においても，$D_{2^n} \simeq Q_{2^{n+1}}/Z(Q_{2^{n+1}})$ のコホモロジー環の構造を用い，$\Omega^2 k$ で全く同じ結論が得られる．$n \geqslant 3$ のときは，素体上で議論ができる．四元数群 Q_8 のときの N_1 およびその syzygy $\Omega^j N_1$ $(0 \leqslant j \leqslant 3)$ は素体上では実現できない endotrivial 加群の唯一のもので，最も不思議なものである．

例 5.7 例 2.2 の記号を用いる．extraspecial p-群 P において，$M = \Omega^{2p} k$ を考えよう．$L = L_\nu \subset M$ とおく．$\widetilde{S}_1 = \overline{L_\infty}$, $\widetilde{S}_2 = \bigoplus_{j=0}^{p-1} \overline{L_j}$ とおくと，$\overline{M} = \overline{L} = \widetilde{S}_1 \oplus \widetilde{S}_2$ となる．$\overline{L_j}$ は $\overline{E_j}$-射影的で，$\overline{E_j} \cap \overline{E_\infty} = 1$, $j \neq \infty$ より，$V_1 = V_{\overline{P}}(\widetilde{S}_1)$，$V_2 = V_{\overline{P}}(\widetilde{S}_2)$ として定理の設定がみたされる．ここで生じる endotrivial 加群の解釈は次の 5.4 節での考察でより簡明になされる．

$T(G)$ のトーション部分に関わる Carlson–Thévenaz [46, 48] の定理を述べておこう．$Q_{2^{n+1}}$ については Dade [53, 54] も参照されたい．

定理 5.8 (Carlson–Thévenaz [46, 48])　$T(G)$ のトーション部分群が自明でないのは次のいずれかのときである．

(1)　$G = C_{p^n}$，$p^n > 2$．$T(C_{p^n}) = \langle\, [\Omega k]\,\rangle \simeq \boldsymbol{Z}_2$ である．

(2)　$G = Q_{2^{n+1}}$．$T(Q_{2^{n+1}}) = \langle\, [\Omega k]\,\rangle \times \langle\, [N_1]\,\rangle \simeq \boldsymbol{Z}_4 \times \boldsymbol{Z}_2$ である．ここで，N_1 は例 5.6 で与えたものである．

(3)　$G = SD_{2^{n+1}}$．$T(SD_{2^{n+1}}) = \langle\, [\Omega k]\,\rangle \times \langle\, [\Omega \circ \Omega_{\langle\, y\,\rangle} k]\,\rangle \simeq \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}_2$ である．

5.4　コホモロジー的 pushout と endotrivial 加群

前節の定理 5.7 を適用して具体的に endotrivial 加群を構成するには，注意深く部分加群をとる必要がある．Carlson [43] はつづけて，より便利で議論の楽な構成方法を定理 5.7 のひとつの変種として考察している．以下では，G を一般の有限群とする．正の斉次元 $\zeta \in H^m(G,k)$ が次の条件をもつと仮定する：

$V_G(k)$ の閉部分集合 V_1, V_2 で，$V_G(\zeta) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{\,0\,\}$ をみたすものがある．

このとき，命題 2.10，定理 2.11 により，Carlson 加群 L_ζ は，$L_\zeta = L_1 \oplus L_2, V_G(L_j) = V_j$ と直和分解される．写像 $\pi : L_\zeta \to L_1$ をこの分解の射影とし，$0 \to L_\zeta \to \Omega^m k \xrightarrow{\zeta} k \to 0$ とで pushout を作り，kG-加群 N を次の短完全列からなる可換図式の中に構成する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_\zeta \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \Omega^m k \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\rho"] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\sigma"'] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$E \leqslant G$ を極大基本可換 p-部分群とする．Carlson [43] は，斉次元 $\gamma_1, \gamma_2 \in H^*(E,k)$ で，

(1)　$\mathrm{res}_{G,E}\,\zeta = \gamma_1\gamma_2$

(2)　$V_E(L_\zeta) = V_E(L_{\gamma_1}) \cup V_E(L_{\gamma_2}), V_E(L_{\gamma_1}) \cap V_E(L_{\gamma_2}) = \{\,0\,\}$

(3)　$\mathrm{res}^*_{G,E}\, V_E(L_{\gamma_j}) \subseteq V_j$

をみたすものの存在を示し，次の定理を得た．

定理 5.9 (Carlson [43])　上述の設定，記号の下で，N は endotrivial 加群となり，$d = \deg \gamma_1$ とおけば，$N_E = \Omega^d k \oplus$ (射影加群) となる．

この定理の構成方法ではできない endotrivial 加群があるが，p-群でない群にも適用できる[42)] こと，前節の定理と比べてしくみが簡明であること，この話題の本質的対象である階数 2 の極大基本可換 p-部分群をもつ群に有用であることなどの利点をもつ．

有限 p-群 G が階数 2 の極大基本可換部分群 E をもつとき，定理の設定をみたす $\zeta \in H^*(G,k)$ が例えば次のように構成される．$Z = E \cap Z(G)$ とおくと，$E = A \times Z$ と直積分解される．$\mu \in H^2(E,k)$ を A に対応する Bockstein 要素とし $\zeta = \mathrm{norm}_{E,G}\,\mu \in H^{2|G:E|}(G,k)$ とおけば，これが定理の設定をみたすことを確かめてみよう．ノルム写像の Mackey の分解公式から $\zeta' = \mathrm{res}_{G,E}\,\zeta$ について $V_E(\zeta') \subset \bigcup_{Z \neq B < E} \mathrm{res}^*_{E,B}\, V_B(k)$ であることがわかる．従って，命題 2.9 から $V_E(L_\zeta) = V_E(\zeta') \subset$

$\bigcup_{Z\neq B<E}\mathrm{res}^*_{E,B}V_B(k)$ を得る．$\mathrm{EA}(G)'$ を E に共役でない極大基本可換部分群の集合とし，

$$V_1=\mathrm{res}^*_{G,E}V_E(L_\zeta),\quad V_2=\bigcup_{F\in\mathrm{EA}(G)'}\mathrm{res}^*_{G,F}V_F(L_\zeta)$$

とおく．定理 2.4 により，$V_G(L_\zeta)=V_1\cup V_2$ となる．また $F\in\mathrm{EA}(G)'$ について，$F\cap E=Z$ であるから，$V_1\cap V_2=\{0\}$ となる．再び，2.3 節の extraspecial p-群 P で例をみてみよう．

例 5.8 例 2.2 の記号を用いる．$E=E_\infty$, $\nu=\mathrm{norm}_{E,P}\,\mu^{(\infty)}$ が上に述べた理由から定理 5.9 の設定をみたし，endotrivial 加群 N が構成される．定理の V_1 は例 2.2 の V_∞ であり，V_2 は $\bigcup_{j\neq\infty}V_j$ である．また，$L'=\bigoplus_{j\neq\infty}L_j\subset\Omega^{2p}k$ とおけば，$N=\Omega^{2p}k/L'$ のことである．

例 5.7 で述べたセクションとして得られる endotrivial 加群との関係をみてみる．定理 5.7 の前段の記号を用いると，$T_2=(c-1)L'$ で，$S_1\supset L_1$ は $\Omega^{2p}k=S_1+L'$, $S_1\cap L'=T_2$ をみたしていることがわかり，$N=\Omega^{2p}k/L'\simeq S_1/T_2=N_1$ となる．

最後に，相対射影被覆から得られた endotrivial 加群との関係をみてみる．$N_0=\Omega^{2(p-1)}\circ\Omega^2_{\langle b\rangle}k$ を考えよう．例 5.3 でみた準同型列 $\Omega^{2p}k\xrightarrow{\rho}N_0\xrightarrow{\sigma}k$ において，$L=\ker\sigma$ とおくと，$\nu=\sigma\circ\rho$ であることから，準同型 $\pi: L_\nu\to L$ が誘導され次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_\nu \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \Omega^{2p}k \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\rho"] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "\sigma"'] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

準同型 π が分裂する全射であることが確かめられ，N_0 が定理 5.9 の構成方法でも実現される．

6 Cohomology is representation theory

1986 年アメリカ数学会主催の Summer Research Institute “Representations of Finite Groups and Related Topics” において，Alperin は “Cohomology is representation theory” という講演を行い ([4])，表現論におけるコホモロジー論の重要性を訴えた．およそ 20 年を経た今日，この原理はいっそう深化され，広く浸透してきている．筆者らはこの原理を多少なりとも実感できるような内容を試みようとしたが，どこまで達成できたか全く自信はない．幸い，Carlson による解説 [41] 2001, [42] 2005, [44] 2007，教科書 [36] 1996，[49] 2003 などがあるのであわせて参照していただきたい．より深い理解が得られることはいうまでもないが，この分野を主導してきた泰斗の情熱に触れることができる．

コホモロジー環がネーター的可換次数付多元環であるということから，コホモロジー環における代数的多様体の理論が展開された．しかし，可換環としての特徴はまだまだ未解明であるといえるようである．Carlson，Benson らもいくつもの問題提起を行っている．Carlson [42]，Benson [17] 2004 を参照していただきたい．

Benson は Carlson とともにこの分野の偉大な先導者である．Benson [14] 1995, [15] 1992 は代数的位相幾何学，有限群の表現論を含む代数学の双方に詳しい．Evens [58] 1991 はこの分野のもう一人の泰斗による簡潔ではあるが奥の深い教科書といえる．それでは，巨人 Alperin はどのような書物を著してくれるのだろうか．

有限群のコホモロジー論についての踏み込んだ記述も含むホモロジー代数学の日本語の書物は中山正，服部 昭 [77] 1957 以外にないといえよう．絶えて久しいが，是非とも復刊してほしいものである．

注　釈

1)　本稿では単位元をもつと仮定する．
2)　この自明な RG-加群はしばしば R_G とも書かれる．
3)　標数が 0 または考えている有限群の位数と素のときは Maschke の定理により，群環は完全可約である．
4)　無限群の群環は対称的ではない．
5)　preprint は実は 1986 年に完成していた．
6)　その後も，Evens ほか多くによる改良がなされている．
7)　$p=2$ のとき，m は任意の自然数でよい．また，$p>2$ のときにも符号を適当に定めて，任意の自然数 m に対しても norm 写像を定義できる．[15] を参照．
8)　極大イデアル $\mathfrak{m}\in V_G(k)$ に対して，$\mathrm{res}_{G,H}^{-1}\,\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$ を満たす $\mathfrak{n}\in V_H(k)$ は有限個である．
9)　整数係数のコホモロジー環 $H^*(P,\boldsymbol{Z})$ は G. Lewis [70] 1968 で決定された．その後，多くの努力が払われ (例えば，Benson–Carlson [19] 1992 を見られたい)，$H^*(P,k)$ が決定されたのは，I. J. Leary [67] 1990 によってである ([69])．$p=3$ のときは $H^*(P,k)$ は Cohen–Macauley 環である．一方，$p>3$ のとき，Cohen–Macauley 環ではない．
10)　Carlson [35] の例である．
11)　有限生成であることは仮定していないことに注意．また，係数環も体に限定しないで議論している．
12)　直既約加群が周期的であるとは，Ω を Heller 作用素としてある整数 $m>0$ について $\Omega^m M\simeq M$ となることをいう．
13)　kG-加群 M，N に対して $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ を次のようにして kG-加群とする．$f:M\to N$，$g\in G$ に対して，$(gf)(a)=gf(g^{-1}a)$ $(a\in M)$．$M^*=\mathrm{Hom}_k(M,k_G)$ である．
14)　$M\otimes_k N$ を次のようにして kG-加群とする：$a\in M, b\in N$ と $g\in G$ に対して $g(a\otimes b)=ga\otimes gb$.
15)　Carlson は 2.5 節で述べるランク多様体について同様の事実を示していた ([28, 30])．定理 2.7 とあわせても，この定理は得られる．
16)　kG-加群 M の Ext 環 $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ を考察した．この環は本質的に非可換であり，難しい．この論文で，この Ext 環の既約加群に関連して予想を立てたが，Niwasaki [79] によって解決された．ICM90 における Carlson の講演記録 [34] を参照されたい．
17)　ランク多様体を用いる証明が Benson, Carlson らの論文，書物にある
18)　[15, Proposition 5.9.6]
19)　Carlson [31, Lemma 4.1]
20)　$\{\chi,\nu\}$ がパラメーター系であることは，これの階数 2 の基本可換部分群への制限がそのコホモロジー環のパラメーター系であることに注意すれば，Quillen の次元定理 2.2 からわかる．
21)　一般に，$\zeta_1,\ldots,\zeta_r\in H^*(G,k)$ がパラメーター系であるためにはテンサー積 $L_{\zeta_1}\otimes_k\cdots\otimes_k L_{\zeta_r}$ が射影的であることが必要十分である．
22)　相対射影性の言葉で述べると，kP-加群 L_ν は $\{E_0,\ldots,E_\infty\}$ に関して相対射影的である．相対射影性については永尾，津島 [78] 第 IV 章を参照されたい．この理論は第 5 節で重要な役割を果たす．
23)　一般に四元群 (four group) とよばれている．
24)　つまり $\mathcal{V}_G(M)$ は $\mathbf{Proj}H^*(G,k)$ の部分集合．M が有限生成ならば $\mathcal{V}_G(M)$ は $V\subseteq V_G(M)$ である斉次既約閉部分集合の全体となる．
25)　詳しくは原論分 [91] の他，[36]，[59] 等を参照していただきたい．
26)　filtered colimit.
27)　群環 kG を両側イデアルの直和として分解したときの直既約因子を p-ブロック多元環という．ブロックイデアルあるいは，単にブロックともよぶ．ただひとつのブロックのみが添加写像により零化されない．このブロックを主ブロックとよぶ．直既約な kG-加群はいずれかの p-ブロック多元環上の加群となる．自明な kG-加群は主ブロックに属する．ブロックの理論はモデュラー表現論の中心課題である．詳しくは永尾，津島 [78] V 章を参照されたい．
28)　kG-加群 M が主ブロックに属さなければ $H^*(G,M)=0$ である．また，主ブロックに属する直既約加群 N でも $H^*(G,N)=0$ となることがある．しかし，既約加群では　このような例は見つかってなく，‘主ブロックに属する既約 kG-加群 S のコホモロジー群 $H^*(G,S)$ は自明でない’ という古くからの予想がある．Ogawa [80] はノルム写像を用いて 0 でないコホモロジー元をつくるという議論で特別な場合にこの予想を解いた．その後多くの試みがあり，部分的な解決，[23] など関連する貢献が報告されているが未だ解決されていない．
29)　[16] では有限生成とは限らない加群も含めて述べられている．
30)　$g\in G$ と $H\leqslant G$ に対して，${}^gH=gHg^{-1}$, $H^g=g^{-1}Hg$ とおく．写像 $c_g:H^*(H,k)\to H^*({}^gH,k)$ は共役写像 $x\mapsto g^{-1}xg$ $(x\in {}^gH)$ が導く写像である．
31)　しばしば安定元定理 (stable elements theorem) とよばれる．この定理によって，コホモロジー環 $H^*(G,k)$ を求めるには原理的には $H^*(P,k)$ の G-安定な部分環を求めればよいのであるが，直接これを実行することは，一般に，極めて困難である．コホモロジー環を求めることは，対象とする有限群の性質を調べるのみならずコホモロジー理論を発展させるためにも重要であって，さまざまの貢献がある．Adem–Milgram [2]，Adem [1] などを参照されたい．また，extraspecial p-群を Sylow 群にもつ有限群のコホモロジーの研究では Tezuka, Yagita らの貢献が著しい ([75], [99], [102] ほか)．筆者らも加群の相対射影性の理論を用いていくつかのコホモロジー環の計算を行った．
32)　直既約 kG-加群のヴァーテックス，ソース，Green 対応については永尾，津島 [78] IV 章を参照されたい．
33)　正確には次数 0 のところは $\widehat{\mathrm{Ext}}$ を考える必要が

ある．

34) 分類空間など代数的位相幾何学的な側面に関しては [27] を参照.

35) [27] では saturated fusion sysytem，[86] においては Frobenius P-圏とよばれている．

36) 主ブロックのコホモロジーが, 群 G のコホモロジーとなっている．

37) ブロックのコホモロジー環についても多様体の理論があり，階層構造をもつ (Linckelmann [72, 73])．Kawai [61]，Kawai–Sasaki [62, 63] 等もある．

38) 自明なソースを持つ加群の直和である加群を p-置換加群とよぶ.

39) Asai [9] は相対射影被覆の理論のコホモロジー論への最初の応用例であろう．

40) Bouc [24] 5 節によれば Thévenaz の結果であるという．実際，Thévenaz [100] 1985 にはこの特別な場合が述べられている．

41) 5 節を通じて同様の同一視を行う．

42) Carlson–Mazza–Nakano [45] 2006 では，一般の有限群 G についてこの方法で構成された endotrivial 加群が p-群の場合に Alperin の命題 5.4 の方法で構成された endotrivial 加群と同じ役割を果たし，$T(G)$ の自由階数が定理 5.5 と同じように記述されることが示された．

文　献

[1] A. Adem, Recent developments in the cohomology of finite groups, Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), 806–812.

[2] A. Adem and R. Milgram, Cohomology of finite groups, Grundlehren der math. Wissenshaften, vol. 309, Springer-Verlag, Berlin/New York/London, 1994.

[3] ———, The mod 2 cohomolgy rings of rank 3 simple groups are Cohen-Macaulay, Prospects in topology, Ann. of Math. Stud., vol. 138, Princeton Univ. Press, Princeton, 1995, pp. 3–12.

[4] J. L. Alperin, Cohomology is representation theory, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata 1986) (P. Fong ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 47, Amer. Math. Soc., 1987, pp. 3–11.

[5] ———, A construction of endo-permutation modules, J. Group Theory **4** (2001), 3–10.

[6] J. L. Alperin and L. Evens, Representations, resolutions and Quillen's dimension theorem, J. Pure Appl. Algebra **22** (1981), 1–9.

[7] ———, Varieties and elementary abelian subgroups, J. Pure Appl. Algebra **26** (1982), 221–227.

[8] F. Altunbulak and E. Yalçin, A theorem of Jon F. Carlson on filtrations of modules, J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), 15–28.

[9] T. Asai, A dimension formula for the cohomology rings of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Comm. Algebra **19** (1991), 3173–3190.

[10] G. S. Avrunin, Annihilators of cohomology modules, J. Algebra **69** (1981), 150–154.

[11] G. S. Avrunin and L. Scott, Quillen stratification for modules, Invent. Math. **66** (1982), 277–286.

[12] P. Balmer and G. Favi, Gluing techniques in triangulated geometry, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **58** (2007), 415–441.

[13] P. Balmer, D. J. Benson and J. F. Carlson, Gluing representations via idempotent modules and constructing endotrivial modules, preprint, 2007.

[14] D. J. Benson, Representations and cohomology I: Cohomology of groups and modules, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[15] ———, Representations and cohomology II: Cohomology of groups and modules, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[16] ———, Cohomology of modules in the principal block of a finite group, New York J. Math. **1** (1994/95), 196–205.

[17] ———, Commutative algebra in the cohomology of groups, Trends in commutative algebra, Math. Sci. Res. Inst. Publ. vol. 51, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 1–50.

[18] D. J. Benson and J. F. Carlson, Nilpotent elements in the Green ring, J. Algebra **104** (1986), 329–350.

[19] ———, The cohomology of extraspecial groups, Bull. London Math. Soc. **24** (1992), 209–235. Erratum:Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 498.

[20] D. J. Benson, J. F. Carlson and J. Rickard, Complexity and varieties for infinitely generated modules, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **118** (1995), 223–243.

[21] ———, Complexity and varieties for infinitely generated modules II, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **120** (1996), 597–615.

[22] ———, Thick subcategories of the stable module category, Fund. Math. **153** (1997), 59–80.

[23] D. J. Benson, J. F. Carlson and G. R. Robinson, On the vanishing of group cohomology, J. Algebra **131** (1990), 40–73.

[24] S. Bouc, Tensor induction of relative syzygies, J. Reine Angew. Math. **523** (2000), 113–171.

[25] ———, The Dade group of a p-group, Invent. Math. **164** (2006), 189–231.

[26] S. Bouc and J. Thévenaz, The group of endo-permutation modules, Invent. Math. **139** (2000), 275–349.

[27] C. Broto, R. Levi and B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 779–856.

[28] J. F. Carlson, The complexity and varieties

of a modules, Integral representations and applications (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math. 882, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 415–422.

[29] ———, Complexity and Krull dimension, Representations of Algebras, Lecture Notes in Math., 903, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 62–67.

[30] ———, The varieties and the cohomology ring of a module, J. Alebra **85** (1983), 104–143.

[31] ———, The variety of an indecomposable module is connected, Invent. Math. **77** (1984), 291–299.

[32] ———, The cohomology ring of a module, J. Pure Appl. Algebra **36** (1985), 105–121.

[33] ———, Varieties and transfers, J. Pure Appl. Algebra **44** (1987), 99–105.

[34] ———, Cohomology and modules over group algebras, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 317–324, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[35] ———, Depth and transfer maps in the cohomology of groups, Math. Z. **218** (1995), 461–468.

[36] ———, Modules and group algebras, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1996.

[37] ———, Varieties and induction, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **2** (1996), 101–114.

[38] ———, Parameters in cohomology, Group Representations: Cohomology, Group Actions and Topology (Seatle 1996) (A. Adem and et.al., eds.), Proc. Sympos. Pure Math. vol. 63, Amer. Math. Soc. 1998, pp.$\tilde{5}$22–523.

[39] ———, Varieties for cohomology with twisted coefficients, Acta Math. Sinica **15** (1999), 81–92.

[40] ———, Cohomology and induction from elementary abelian subgroups, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **51** (2000), 169–181.

[41] ———, Connections between group representations and cohomology, Algebra—representation theory (Constanta, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. vol.$\tilde{2}$8, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 2001, pp. 23–46.

[42] ———, Cohomology, computations, and commutative algebra, Notices Amer. Math. Soc. **52** (2005), 426–434.

[43] ———, Constructing endotrivial modules, J. Pure Appl. Algebra **206** (2006), 83–110.

[44] ———, Cohomology and representation theory, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 3–45.

[45] J. F. Carlson, N. Mazza and D. Nakano, Endotrivial modules for finite groups of Lie type, J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 93–119.

[46] J. F. Carlson and J. Thévenaz, Torsion endotrivial modules, Algebr. Represent. Theory **3** (2000), 303–335.

[47] ———, The classification of endo-trivial modules, Invent. Math. 158 (2004), 389–411.

[48] ———, The classification of torsion endotrivial modules, Ann. of Math. (2) **162** (2005), 823–883.

[49] J. F. Carlson, L. Townsley, L. Valeri-Elizondo and M. Zhang, Cohomology rings of finite groups, Algebras and Applications, vol. 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[50] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[51] L. G. Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, J. Pure Appl. Algebra **7** (1976), 287–302.

[52] E. C. Dade, Une extension de la theorie de Hall et Higman, J. Algebra **20** (1972), 278–302.

[53] ———, Endo-permutation modules over p-groups, I, Ann. of Math. (2) **107** (1978), 459–494.

[54] ———, Endo-permutation modules over p-groups, II, Ann. of Math. (2) **108** (1978), 317–346.

[55] J. Duflot, Depth and equivariant cohomology, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 627–637.

[56] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239.

[57] ———, A generalization of the transfer map in the cohomology of groups, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 54–65.

[58] ———, The cohomology of groups, Oxford Mathematics Monograph, Oxford University Press, New York, 1991.

[59] 飛田 明彦, Idempotent modules in stable module categories, 有限群のコホモロジー論の研究, 数理解析研究所講究録 1251, 京都大学数理解析研究所, 2002, pp. 16–30.

[60] A. Hida, Control of fusion and cohomology of trivial source modules, J. Algebra **317** (2007), 462–470.

[61] H. Kawai, Varieties for modules over a block of a finite group, Osaka J. Math. **40** (2003), 327–344.

[62] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, Algebr. Represent. Theory **9** (2006), 497–511.

[63] ———, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), 301–321.

[64] R. Knörr, Relative projective covers, Proc. Symp. Modular Representations of Finite Groups, Various Publication Series, vol. 29, Aarhus University, 1978, pp. 28–32.

[65] O. Kroll, Complexity and elementary abelian p-groups, J. Algebra **88** (1984), 155–172.

[66] ———, A representation theoretical proof of a theorem of Serre, Arhus preprint, 1986.

[67] I. J. Leary, The cohomology of certain finite

groups, Ph. D. thesis, University of Cambridge, 1990.

[68] ——, The integral cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **110** (1991), 25–32.

[69] ——, The mod-p cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **112** (1992), 63–75.

[70] G. Lewis, The integral cohomology rings of groups of order p^3, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 501–529.

[71] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[72] ——, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[73] ——, Quillen stratication for block varieties, J. Pure Appl. Algebra **172** (2002), 257–270.

[74] ——, Introduction to fusion systems, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113.

[75] R. Milgram and M. Tezuka, The geometry and cohomology of M_{12}:II, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **1** (1995), 91–108.

[76] G. Mislin, On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 454–461.

[77] 中山 正 服部 昭, ホモロジー代数学, 現代数学講座 3, 共立出版株式会社, 東京, 1957.

[78] 永尾 汎 津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 東京, 1987.

[79] T. Niwasaki, On Carlson's conjecture for cohomology rings of modules, J. Pure Appl. Algebra **59** (1989), 265–277.

[80] Y. Ogawa, An application of Evens' norm mapping, Hokkaido Math. J. **11** (1982), 295–300.

[81] 奥山 哲郎, On a theorem of Mislin on cohomology isomorphism and control of fusion, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 1466, 京都大学数理解析研究所, 2006, pp. 86–92.

[82] T. Okuyama and H. Sasaki, Evens' norm map and Serre's theorem on the cohomology algebra of a p-group, Arch. Math. (Basel) **54** (1990), 331–339.

[83] ——, Relative projectivity of modules and cohomology theory of finite groups, Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 405–444.

[84] ——, Homogeneous systems of paramters in cohomology algebras of finite groups, Arch. Math. (Basel) **82** (2004), 110–121.

[85] L. Puig, Affirmative answer to a question of Feit, J. Algebra **131** (1990), 513–526.

[86] ——, Fobenius categories, J. Algebra **303** (2006), 309–357.

[87] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 549–572.

[88] ——, The spectrum of an equivariant cohomology ring: II, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 573–602.

[89] ——, A cohomological criterion for p-nilpotence, J. Pure Appl. Algebra **1** (1971), 361–372.

[90] D. Quillen and B. B. Venkov, Cohomology of finite groups and elementary abelian subgroups, Topology **11** (1972), 317–318.

[91] J. Rickard, Idempotent modules in the stable category, J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), 149–170.

[92] G. R. Robinson, Arithmetical properties of blocks, Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. vol. 517, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1998, pp. 213–232.

[93] H. Sasaki, Periodic modules of large periods for extra-special p-groups, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 461–479.

[94] ——, Mod p cohomology algebras of finite groups with extraspecial Sylow p-subgroups, Hokkaido Math. J. **29** (2000), 263–302.

[95] J. -P. Serre, Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, Topology **3** (1965), 413–420.

[96] V. P. Snaith, On a theorem of Mislin, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 275–278.

[97] P. Symonds, Mackey functors and control of fusion, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 623–632.

[98] M. Tezuka and N. Yagita, The mod p cohomology of $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$, J. Algebra **81** (1983), 295–303.

[99] ——, On odd prime components of cohomologies of sporadic simple groups and the rings of universal stable elements, J. Algebra **183** (1996), 483–513.

[100] J. Thévenaz, Relative projective covers and almost split sequences, Comm. Algebra **13** (1985), 1535–1554.

[101] B. B. Venkov, Cohomology algebras for some classifying spaces (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** (1959), 943–944.

[102] N. Yagita, On odd degree parts of cohomology of sporadic simple groups whose Sylow p-subgroup is the extra-special p-groups of order p^3, J. Algebra **201** (1998), 373–391.

(2008 年 3 月 28 日提出)

(おくやまてつろう・北海道教育大学教育学部旭川校)
(ささきひろき・信州大学全学教育機構)
(ひだあきひこ・埼玉大学教育学部)