与えられた数より小さな素数の個数について

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse
BERNHARD RIEMANN

ベルンハルト・リーマン　（鈴木治郎訳）
（ベルリン学士院月報，1859 年 11 月）

学士院が私を通信会員に迎え入れてくれた栄誉に感謝の意を示すとともに，与えられたこの機会に，素数の密度に関する研究報告にすみやかに表すことが最も適切であると私は信じます．ガウスやディリクレが長い間興味を持っていたように，この主題はここでの報告にけっして不適当ではないと思われます．

この研究を私は，オイラーの調べた積

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

から始めたい．ここで p はすべての素数をとり，n はすべての正の整数をとる．この式の両辺が収束するときに定義される複素変数 s の関数を $\zeta(s)$ で表す．両辺とも s の実部が 1 より大きいときにのみ収束するが，いつでも成り立つこの関数の表示が容易に求められる．関係式

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

を適用すれば，まずは

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

がわかる．$+\infty$ から $+\infty$ までの積分

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

を，被積分関数の不連続点を 0 以外には内部に含まない領域の境界を正の向きに回るようにとれば，

$$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

に等しいことが容易にわかる．ただし多価関数 $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ における $-x$ の対数は，x の負の値に対して実数になるように定める．このとき上で定義された積分は

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

になる．

この式により，すべての複素数 s に対する関数 $\zeta(s)$ の値が与えられ，それは一価関数であり，1 でないすべての s の値に対して有限であることがわかる．また s が負の偶数であるときは 0 であることもわかる．

s の実部が負であるとき，積分路を与えられた領域の境界を正の向きに回る代わりに，この領域を除いた残りの境界を負の向きに回ったものとみなしてよい．なぜなら，このとき無限に大きい絶対値上の積分は無限に小さいからである．しかしこの領域の内部では，被積分関数は $\pm 2\pi i$ の整数倍だけで不連続点をもち，したがって，この積分はこれらの値を負の向きに回った積分の和に等しい．値 $n2\pi i$ の周りの積分は $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$ なので，これより

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}\big((-1)^{s-1} + i^{s-1}\big)$$

が得られ，したがって $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の間の関係は，関数 Π の既知の性質を用いて

$$\Pi\Big(\frac{s}{2}-1\Big)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

と表せて，s を $1-s$ で置き換えても不変である．

この関数の性質は $\sum n^{-s}$ の一般項にある積分 $\Pi(s-1)$ の代わりに積分 $\Pi(s/2-1)$ を考察する動機となり，これにより関数 $\zeta(s)$ のたいへん便利な表示を得る．実際に

$$\frac{1}{n^s}\Pi\Big(\frac{s}{2}-1\Big)\pi^{-s/2} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{s/2-1}dx$$

であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

とおけば

$$\Pi\Big(\frac{s}{2}-1\Big)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{s/2-1}dx$$

である．また

$$2\psi(x)+1 = x^{-1/2}\left(2\psi\Big(\frac{1}{x}\Big)+1\right) \quad (Jacobi, Fund., p.184),$$

なので

$$\begin{aligned}\Pi\Big(\frac{s}{2}-1\Big)\pi^{-s/2}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)\, x^{s/2-1}dx + \int_1^\infty \psi\Big(\frac{1}{x}\Big)x^{(s-3)/2}dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (x^{(s-3)/2} - x^{s/2-1})\, dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)(x^{s/2-1} - x^{-(1+s)/2})\, dx\end{aligned}$$

である．

ここで $s = \frac{1}{2} + ti$ かつ

$$\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)(s-1)\,\pi^{-s/2}\zeta(s) = \xi(t)$$

とおけば

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (tt + \tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-3/4}\cos\big(\tfrac{1}{2}t\log x\big)\, dx$$

であり，また

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\bigl(x^{3/2}\psi'(x)\bigr)}{dx} x^{-1/4}\cos\bigl(\tfrac{1}{2}t\log x\bigr)\,dx$$

でもある．

この関数は有限なすべての t の値に対して有限であり，たいへん速く収束する tt のべき級数に展開できる．s の実部の値は 1 より大きいとき $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ は有限であり，$\xi(t)$ の他の因子でも同じことが成り立つので，関数 $\xi(t)$ は t の虚部が $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にあるときのみ 0 になる．$\xi(t)=0$ の根でその実部が 0 と T の間にある個数はおよそ

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

である．なぜなら積分 $\int d\log\xi(t)$ の虚部は $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にあり，実部は 0 と T の間にあるすべての値からなる領域の周りを正の向きに回るので，（$1/T$ の大きさの部分は除いて）$\bigl(T\log(T/2\pi)-T\bigr)i$ に等しく，その一方でこの積分は，この領域における $\xi(t)=0$ の根の個数に $2\pi i$ を乗じたものに等しいからである．この境界内の実根の個数がおおよそ求まり，根のすべてが実数となることがたいへんもっともらしい[*1]．厳密な証明を与えることが望ましいのはもちろんである．私は証明を試みたが無駄に終わったので，証明の探求はしばらく脇に追いやっておく．なぜならこの研究報告の次の目的にとって必要ではないからである．

α で式 $\xi(\alpha)=0$ の根を表すとき，$\log\xi(t)$ は

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

と表すことができる．大きさが t である根の密度は，t が増大するとき $\log(t/2\pi)$ に過ぎないので，この式は収束し，無限大の t に対しては $t\log t$ に過ぎない．よって $\log\xi(t)$ との違いは，有限の t に対しては連続かつ有限であり，tt で割れば，無限に大きい t に対して無限に小さくなるような tt の関数である．この違いはしたがって定数となり，この値は $t=0$ とおけば決定できる．

これらの方法の準備のもとに，x より小さな素数の個数をここに決定できる．

x が素数ではないときに，$F(x)$ をこの個数とする．x が素数のときは $\frac{1}{2}$ だけ大きい値であるとする．そのとき飛躍する x においては，$F(x)$ は

$$F(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

だけ増える．

恒等式

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

において，以下のように置き換える．

$$p^{-s}\ \text{を}\ s\int_p^\infty x^{-s-1}dx,\quad p^{-2s}\ \text{を}\ s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx,\quad \ldots$$

[*1] 訳注：この文章がリーマン予想を指す．ドイツ語の原文は “Man findet nun in der Tat etwa so viel reelle Wurzeln reell sind” である．全集では Tat のつづりは That であるが，現在のドイツ語つづりではない．

すると

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)\,x^{-s-1}dx$$

が得られる．ただし $f(x)$ は

$$F(x) + \frac{1}{2}F\bigl(x^{1/2}\bigr) + \frac{1}{3}F\bigl(x^{1/3}\bigr) + \cdots$$

を表す．

この式は $a > 1$ であるすべての複素数 s の値 $a + bi$ に対して成り立つ．しかしながら式

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)\,x^{-s}d\log x$$

がこの範囲で成り立つとき，フーリエの定理を用いれば，関数 h は関数 g を用いて表せる．$h(x)$ が実数であれば

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b)$$

と 2 つの式

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x,$$
$$ig_2(b) = -i\int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x$$

に分解できる．

両方の式に

$$\bigl(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y)\bigr)db$$

を乗じてから $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すれば，2 つの式とも右辺は，フーリエの定理から $\pi h(y)y^{-a}$ を得るので，それらの和をとって iy^a を乗じれば

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds$$

が得られる．ただし積分は s の実部が定数として計算する．

$h(y)$ の値が飛躍する y の値に対しては，この積分は，飛躍する点の両側の関数 h の値の平均とする．関数 f も同じように定義されたので，同じ性質をもつことがわかる．よって一般に

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}y^s ds$$

である．

$\log\zeta$ にすでに求めた式

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\mathit{\Pi}\Bigl(\frac{s}{2}\Bigr) + \sum_\alpha \log\biggl(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\biggr) + \log\xi(0)$$

を代入する．しかしながら，この式の個々の項は無限大にもっていくとき収束しない．このため，部分積分によって上の式を

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\dfrac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^s ds$$

と書き直しておくと扱いやすい．

$m=\infty$ に対して

$$-\log \mathit{\Pi}\left(\frac{s}{2}\right) = \lim\left(\sum_{n=1}^{m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac{s}{2}\log m\right)$$

なので，

$$-\frac{d\dfrac{1}{s}\log \mathit{\Pi}\left(\dfrac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\dfrac{1}{s}\log\left(1+\dfrac{s}{2n}\right)}{ds}$$

であり，このとき $f(x)$ の項全体から

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s ds = \log\xi(0)$$

を除けば

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\dfrac{1}{s}\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds$$

の形になる．

しかし

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{s}\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

であり，s の実部が β の実部よりも大きいとき，β の実部が負または正に応じて

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_{\infty}^{x}x^{\beta-1}dx$$

または

$$= \int_{0}^{x}x^{\beta-1}dx$$

になる．その結果は負の場合に

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\dfrac{1}{s}\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds\\
&\quad= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds\\
&\quad= \int_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx + (\text{定数})
\end{aligned}$$

であり，正の場合に

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + (\text{定数})$$

である．

負の場合の積分定数は β の実部を負の無限大にとれば定まる．正の場合に 0 から x までの積分は，上半平面または下半平面かに応じて $2\pi i$ だけ異なる値になる．上半平面に対しては β の i の係数が正の無限大になるとき，積分は無限に小さい．しかし下半平面に対してはこの係数が負の無限大になる．このことから左辺 $\log(1 - s/\beta)$ に積分定数が現れないように定める方法がわかる．

これらの値を先の $f(x)$ の式に代入すれば，

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha} \Big(\mathrm{Li}\big(x^{1/2+\alpha i}\big) + \mathrm{Li}\big(x^{1/2-\alpha i}\big) \Big) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0)$$

であり，和 $\sum_{\alpha}$ は式 $\xi(\alpha) = 0$ のすべての正の根（あるいは正の実部をもつすべての根）を，その大きさの順にとる．この関数 ξ をより詳しく検討すれば，この根の順序のもとで，級数

$$\sum \Big(\mathrm{Li}\big(x^{1/2+\alpha i}\big) + \mathrm{Li}\big(x^{1/2-\alpha i}\big) \Big) \log x$$

は b が無限に大きくなるときに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \frac{1}{s} \sum \log \left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha} \right)}{ds} x^s ds$$

は収束し，この極限と一致することが容易に示される．しかしながら根の順序を入れ変えれば，任意の実数値をとることができる．

$f(x)$ から $F(x)$ を求めることは反転公式により式

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F(x^{1/n})$$

から

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f(x^{1/m})$$

が得られる．ここで級数における m は 1 以外の平方数では割れない整数をとり， μ は m の素因数の個数を表す．

$\sum_{\alpha}$ を有限個までに制限すれば， $f(x)$ に対する式の微分は，x が増大するときにたいへん速く減少する項を除けば

$$\frac{1}{\log x} - 2 \sum_{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x)\, x^{-1/2}}{\log x}$$

であり，これは x の大きさに関する近似式，それは素数の密度 $+\frac{1}{2}$ 倍の素数の平方の密度 $+\frac{1}{3}$ 倍の素数の 3 乗の密度 $\cdots$ を与える．

よって既知の近似式 $F(x)=\mathrm{Li}(x)$ は $x^{1/2}$ の位数まででのみ成り立ち，いくらか大きすぎる値を与えている．なぜなら $F(x)$ に対する式の周期的でない項は x が増大するときに有界な値を除いて

$$\mathrm{Li}(x)-\tfrac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2})-\tfrac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3})-\tfrac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5})+\tfrac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6})-\tfrac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{1/7})+\cdots$$

となるからである．

実際に $\mathrm{Li}(x)$ と x よりも小さな素数の個数との比較において，ガウスとゴールドシュミットによって $x=300$ 万まで調べられており，素数の個数は最初の 10 万まででも $\mathrm{Li}(x)$ よりも常に小さく，x が増大するときに少しずつの変動とともに増大している．素数の密度の増減はここでおおいに注目した周期的項に依存している．しかしながらそれを統括する法則は何も見いだせていない．今後の問題として素数の密度に関する式において，個別の周期的項の影響を調べることは興味深い．$F(x)$ の振る舞いよりも $f(x)$ の振る舞いのほうが，最初の 100 のところでも平均して $\mathrm{Li}(x)+\log\xi(0)$ と一致しており，より規則的である．

訳者ノート

記述に関する注意

記号 $\Pi(x)$ は現代の記号ではガンマ関数 $\Gamma(x+1)$ を表す．記号 $nn, tt, \alpha\alpha$ 等はそれぞれ n^2, t^2, α^2 等を表す．3 乗以上はべき指数の形で表されている．

後年の研究でリーマンの計算ミスあるいは全集への収録時のミスと言われているところもあるが，基本的に修正はしていない．一方でリーマンの記述自体があいまいなどによりわかりにくいとされているところを，なるべく原文の雰囲気を残して訳出したので，意味をとりにくい表現のところもある．その点，翻訳では訳者の能力不足の故か，原文の問題かわかりにくい箇所のあるところはご容赦いただきたい．解釈の不明なところは，以下の和書 2 冊および拙訳『明解リーマン予想とゼータ関数』（講談社，2012 年）を参照されたい．

さて，リーマンの原論文 “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröse” の翻訳を，わたし鈴木治郎が公開する経緯は以下の通りである．

公開への経緯

縁あって，講談社より Edwards の著作 “Riemann's Zeta Function” の翻訳を出版する機会に恵まれた．その際に，同書の巻末にあるリーマンの原論文の翻訳をどうするかという問題にぶつかった．邦訳ではすでに

- 『リーマン論文集』（朝倉書店），杉浦光夫訳
- 『リーマン予想』（日本評論社），平林幹人訳

に解説付きのものが収録される形で出版されており，新たに屋上屋を重ねるような拙訳を，しかも Edwards の英訳をもとに後列に加えることに訳者は価値を見いだせなかった．一方で，リーマンの手書き原稿の写真も，数学のミレニアム問題（クレイ研究所）のサイトで公開され，またウィキペディア等を通じて，ドイツ語版および英訳版も閲覧できる時代となっている．またリーマン全集収録のドイツ語論文は Google ブックサーチを通じて閲覧できる時代となっていた．そこで，これらの公開文書の列に日本語訳も加えたい，という訳者の希望を出版元の講談社でも快諾してくれたこともあり，Edwards の著書の翻訳を出版するにあたり，それに収録される拙訳である元原稿を（リーマン全集にあるドイツ語論文をもととしたものであるが）翻訳書の出版に先立ち公開することとした次第である．なお翻訳文書の扱いはクリエイティブ・コモンズのライセンスにしたがい，著作権記述の継承のみを要請する．つまり営利利用や改変も構わないが，その際に著作権者の記述の削除は許可しないものである．

2012 年，鈴木治郎