

# 代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み, II

飯田 洋市

キーワード：AHP Weighted summation 評価比表 最適化問題 尺度調整係数

## 1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は 1970 年代に Thomas L. Saaty により創始された意思決定法であり、日本では階層分析法と呼ばれることもある。AHP が発展する中で、その構造上の問題に関してたびたび議論されてきたが、それらが反映されている Saaty 教授自身によるテキストとしては[5]が挙げられる。

AHP はその名の通り、与えられた問題を階層図により「見える化」するところに特徴がある。基本的な階層構造は、一つの目標 (goal)、二つ以上の評価基準 (criteria)、そして二つ以上の代替案 (alternatives) よりなる三階層からなるものである。問題が複雑な場合は、各評価基準を更にいくつかの下位評価基準 (subcriteria) に分けることができる。理論面から AHP を議論する場合は、三階層を扱えば十分とされている。実際、四階層以上になる場合、一番下位に位置づけられる下位評価基準 (あるいは評価基準) を三階層でいうところの評価基準として扱えばよい。なお、このときの評価基準の重みについては、AHP の手法により上の階層からの重みを配分したものを用いることになる。以上のことから、本論文では三階層で表現される問題のみを扱うが、四階層以上の場合にも適用することができる。

さて、[2]で代替案間の評価比を復元できる AHP を提案した。そしてその論文の最後で、6 つの課題を提示した。それらは (1) 一対比較における尺度 (2) 得られた総合評価値の妥当性 (3) 行の調整と列の調整を組み合わせた手法 (4) ANP (Analytic Network Process)<sup>[6]</sup>による結果との差別化 (5) ソフトウェアと実用化 (6) WS (Weighted summation : 加重総和法) の一般化としての特徴づけ、であった。本論文では主に (6) を扱う。

本論文の目的は二つある。本論文では、まず第 2 節で WS の適用範囲を拡張する視点からの一般化の概念について整理し、第 3 節で[2]で提案した手法を簡単に示す。そして第 4 節で、それらを踏まえて最適化問題を設定し、[2]で提案した手法はその解 (最適解) を与えるものであることを示す。これが、本論文の一つ目の目的である。

ところで、この手法は、そのままでは現実の問題への適用が難しいという短所がある。そこで、第 5 節で本手法についての使用上の注意を列挙した上で、それらを解消するための修正手順を提案する。ここで尺度調整係数というものを導入する。これに

より使い勝手がかなり克服される。また副産物として、本手法と AHP を橋渡しする視点を得ることができるようになる。実用面での簡便性を重視する改良バージョンを提案することが、本論文のもう一つの目的である。第 6 節で、このバージョンの数値例としてカラオケ大会を取り上げる。最終章となる第 7 節では、今までの議論を総括した上で、理論面ではオリジナルバージョンが優れているが、実用面を考慮すると改良バージョンが適していることを再度言及する。

## 2. WS（加重総和法）について

まず WS について説明する。ある企業への就職を希望する 4 人の大学生（ $A_1$  さん、 $A_2$  さん、 $A_3$  さん、 $A_4$  さん）が、その企業の採用試験を受けるとし、試験問題は教養問題、時事問題、一般社会常識問題（以下、それぞれ  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  とする）の 3 種類とする。ここでは、全ての試験は 100 点満点で実施されると仮定する。

ところで、WS により評価することを考える場合、これらの評価は、全てが同じ、あるいは同等と見なせる尺度によりなされる必要がある。たとえば、金額で評価するのであれば、全てを円、あるいはドルならドルで評価することが求められる。ましてや、円と長さを表すメートルを混在することはできない。今の場合、評価基準  $C_3$  として、正解した問題数を評価値にすることはできない。実際、 $C_1$  の評価値として 80 点、 $C_2$  の評価値として 95 点、そして  $C_3$  の評価値として 5 問を得た場合、それらの総和を計算しても意味が無いことは明らかである。

さて、これらを階層で表現すると図 1 のようになる。WS であればこのような階層図は必要ないが、評価基準が更に分岐されるような複雑な問題では評価基準を特定することは難しく、階層図を活用することは大いに役立つ。ヌケ・モレ・ダブリなどを防ぐことにも役立つ。

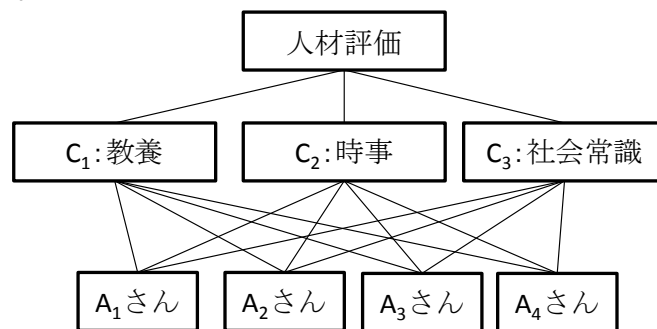


図 1 階層図

次に、この企業は自社の今後の戦略を考慮して WS を採用することにし、表 1 を作成したとする。

表 1 評価基準の重み付け

	$C_1$ : 教養問題	$C_2$ : 時事問題	$C_3$ : 一般社会常識
重み	$c_1$	$c_2$	$c_3$

(ただし、 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ )

たとえば、この企業がサービス産業分野における海外進出を検討しているのであれば、今回の新規採用では時事問題に強い人材をもっとも重要視し、続いて高い一般社会常識を重要視することが考えられる。この場合、 $c_1 = 0.1$ 、 $c_2 = 0.6$ 、 $c_3 = 0.3$ などが考えられる。通常のコ合点で評価するのであれば、 $c_1 = c_2 = c_3 = 1/3$ とおけばよい。なお、 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ という条件は必ずしも必要では無いが、後で説明するように、付加しておくとも表現が簡単になる。

ここでまで準備ができたところで、実際に試験を行う。その結果、表2を得たとする。

表2 試験結果 (単位: 点)

	C <sub>1</sub> : 教養問題	C <sub>2</sub> : 時事問題	C <sub>3</sub> : 一般社会常識
A <sub>1</sub> さん	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
A <sub>2</sub> さん	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$
A <sub>3</sub> さん	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$
A <sub>4</sub> さん	$x_{41}$	$x_{42}$	$x_{43}$

以上のことから、次の式により各大学生 $A_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) の評価点を決定できる:

$$A_i \text{ の評価値} = \sum_{j=1}^3 c_j x_{ij}.$$

評価基準の重み付けのところで条件 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ を付加しない場合は、ここで加重算術平均を取ることによればよい。以上が、WSによる評価法である。

WS を評価法として採用する場合、評価基準の選び方、あるいは評価基準の評価尺度に制約があることは既に触れた通りである。そして、本論文で扱う代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組みは、これらの制約条件を引き継ぐことになる。いわば、AHP のような自由さは失われることになる。

さて、最終的に大学生の評価点の相対的な比さえ得られれば良い場合について考える。たとえば、今の例がそれに相当する。実際、この人材評価に関して、以下を得れば十分である。

$$A_1 \text{ の評価値} : A_2 \text{ の評価値} : A_3 \text{ の評価値} : A_4 \text{ の評価値} = \sum_{j=1}^3 c_j x_{1j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{2j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{3j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{4j}.$$

そこで、上の連比に現れる数値の組に何らかの条件を付加し、それを代表値とすることは自然なことである。本論文では、AHP に従い、連比の成分の総和が1となる場合の値をこの代表値とする。ちなみに、AHP では正規化という操作により、必然的に総合評価点 (値) の総和は1となる。

これらの状況を踏まえ、このような正規化された連比で表される評価値を、相対的評価値 (あるいは加重総和比) と呼ぶことにする。[2]で提案した手法は、代替案が点数などの絶対的な数値で評価できない場合に、この加重総和比を求めようというもの

である。このことは、代替案が（評価基準が内蔵する評価尺度により）絶対的な数値での評価ができない場合も、加重総和比であれば求められるという事実に基づいていることを注意しておく。

### 3. 代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組みについて

2 で与えた評価値の相対的評価値（加重総和比）を得るためには、次の表が得られれば十分であることは[2]あるいは[3]で示した通りである。

表 3 評価比

	C <sub>1</sub> : 教養問題	C <sub>2</sub> : 時事問題	C <sub>3</sub> : 一般社会常識
A <sub>1</sub> さん	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>13</sub>
A <sub>2</sub> さん	y <sub>21</sub>	y <sub>22</sub>	y <sub>23</sub>
A <sub>3</sub> さん	y <sub>31</sub>	y <sub>32</sub>	y <sub>33</sub>
A <sub>4</sub> さん	y <sub>41</sub>	y <sub>42</sub>	y <sub>43</sub>

ここで、 $y_{i1} : y_{i2} : y_{i3} = x_{i1} : x_{i2} : x_{i3}$  ( $i=1,2,3$ )、 $y_{1j} : y_{2j} : y_{3j} : y_{4j} = x_{1j} : x_{2j} : x_{3j} : x_{4j}$  ( $j=1,2,3,4$ ) とする。すなわち、表 2 と表 3 の各行と各列に関して、それぞれの成分が作る連比が等しいものとする。実際、このとき次が成り立つことが分かる：

$$\sum_{j=1}^3 c_j y_{1j} : \sum_{j=1}^3 c_j y_{2j} : \sum_{j=1}^3 c_j y_{3j} : \sum_{j=1}^3 c_j y_{4j} = \sum_{j=1}^3 c_j x_{1j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{2j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{3j} : \sum_{j=1}^3 c_j x_{4j}.$$

よって、表 3 が得られれば、目的の相対的評価値を得ることができることになる。

この事実から、絶対的評価値を得られない場合（絶対的評価値が得られる場合は WS を活用すればよい）、何らかの方法で表 3 を推定できれば、相対的評価値が得られることになる。そして、その方法として提案したものが、[2]（あるいは[3]）の「代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み」である。

ここで、具体的な手順を復習する。まず、各評価基準 C<sub>j</sub> に対する代替案間の重要度を評価比として算出する（表 4）。このとき、一対比較を用いる。ただし、AHP のように一対比較表を用いる必要はない。

表 4 各評価基準に関する代替案の重要度の比

	C <sub>1</sub> : 教養問題	C <sub>2</sub> : 時事問題	C <sub>3</sub> : 一般社会常識
A <sub>1</sub> さん	v <sub>11</sub>	v <sub>12</sub>	v <sub>13</sub>
A <sub>2</sub> さん	v <sub>21</sub>	v <sub>22</sub>	v <sub>23</sub>
A <sub>3</sub> さん	v <sub>31</sub>	v <sub>32</sub>	v <sub>33</sub>
A <sub>4</sub> さん	v <sub>41</sub>	v <sub>42</sub>	v <sub>43</sub>

次に、各代替案に関する評価基準の重要度を評価比として算出する（表 5）。このときも一対比較を用いる。

表 5 各代替案の評価基準に関する重要度の比

	A <sub>1</sub> さん	A <sub>2</sub> さん	A <sub>3</sub> さん	A <sub>4</sub> さん
C <sub>1</sub> : 教養問題	w <sub>11</sub>	w <sub>21</sub>	w <sub>31</sub>	w <sub>41</sub>
C <sub>2</sub> : 時事問題	w <sub>12</sub>	w <sub>22</sub>	w <sub>32</sub>	w <sub>42</sub>
C <sub>3</sub> : 一般社会常識	w <sub>13</sub>	w <sub>23</sub>	w <sub>33</sub>	w <sub>43</sub>

ここで改めて、この手続きは、あくまでも表 3 を推定することを目的としていることを強調しておく。いわゆる「代替案から見た評価基準の重要度」という相互評価の意味合いは無く、代替案からの影響度というものを考慮しているわけでもない。これらは AHP や ANP で、外部従属性あるいはフィードバックと呼ばれるものである。

そして表 3 を推定するために、表 4 と表 5 をミックスさせて表 6 を得る。[2]や[3]では、表 4 と表 5 の成分を入れ替えたり調整 (adjustment) したりすることで、表 3 を推定する方法も示した。その方法でも、結果的に表 6 が得られる。

表 6 表 3 を推定した表

	C <sub>j</sub> (j=1,2,3)
A <sub>i</sub> (i=1,2,3,4)	$v_{ij} \sqrt[4]{\frac{w_{1j}}{v_{1j}} \times \frac{w_{2j}}{v_{2j}} \times \frac{w_{3j}}{v_{3j}} \times \frac{w_{4j}}{v_{4j}}}$

最後に、表 6 と表 1 を WS と同様の方法で組み合わせ、さらにそれらの成分の総和を 1 に調整することで、各代替案の相対的評価 (加重総和比) を得ることができる。

#### 4. 「代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み」の最適化問題としての解釈

[2] (あるいは[3]) の代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組みでは、表 3 を推定するために、表 4 と表 5 から表 6 を計算した。ここでは、基礎的な代数学の理論を適用することで、特に成分ごとに幾何平均を取ることの妥当性を示した。本節では、表 6 にある計算式を、ある種の最適化問題に関する解の公式の視点から特徴づける<sup>[4]</sup>。これにより、[2]の手法の新たな妥当性を得ることになる。

**定理** 表 7 と表 8 を、評価基準 C<sub>j</sub> に関する代替案 A<sub>i</sub> の評価表とする。このとき、列に関して  $s_{1j} : s_{2j} : s_{3j} : s_{4j} = t_{1j} : t_{2j} : t_{3j} : t_{4j}$  (j=1,2,3) が成り立ち、かつ行に関して  $s_{i1} : s_{i2} : s_{i3} = t_{i1} : t_{i2} : t_{i3}$  (i=1,2,3,4) が成り立つとき、またそのときに限り  $s_{ij} = kt_{ij}$  (i=1,2,3,4; j=1,2,3) を満たす k が存在する。

	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	t <sub>11</sub>	t <sub>12</sub>	t <sub>13</sub>
A <sub>2</sub>	t <sub>21</sub>	t <sub>22</sub>	t <sub>23</sub>
A <sub>3</sub>	t <sub>31</sub>	t <sub>32</sub>	t <sub>33</sub>
A <sub>4</sub>	t <sub>41</sub>	t <sub>42</sub>	t <sub>43</sub>

	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	s <sub>11</sub>	s <sub>12</sub>	s <sub>13</sub>
A <sub>2</sub>	s <sub>21</sub>	s <sub>22</sub>	s <sub>23</sub>
A <sub>3</sub>	s <sub>31</sub>	s <sub>32</sub>	s <sub>33</sub>
A <sub>4</sub>	s <sub>41</sub>	s <sub>42</sub>	s <sub>43</sub>

証明 必要条件のみ示せば十分である。 $s_{1j} : s_{2j} : s_{3j} : s_{4j} = t_{1j} : t_{2j} : t_{3j} : t_{4j}$  ( $j=1,2,3$ ) より、 $s_{1j} = p_j t_{1j}$ 、 $s_{2j} = p_j t_{2j}$ 、 $s_{3j} = p_j t_{3j}$ 、 $s_{4j} = p_j t_{4j}$ を満たす $p_j$  ( $j=1,2,3$ ) と、 $s_{i1} : s_{i2} : s_{i3} = t_{i1} : t_{i2} : t_{i3}$  ( $i=1,2,3,4$ ) より、 $s_{i1} = q_i t_{i1}$ 、 $s_{i2} = q_i t_{i2}$ 、 $s_{i3} = q_i t_{i3}$ を満たす $q_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) が存在する。このとき任意の $i, j$ に対して、 $s_{ij} = p_j t_{ij} = q_i t_{ij}$ が成り立つので $p_j = q_i$ を得る。従って、 $s_{ij} = k t_{ij}$ となる $k$ が存在することが分かる。逆は明らかである。(証明終わり)

この定理より、もし表4と表5について、 $v_{ij} = k w_{ij}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2,3$ ) となる $k$ が存在すれば、推定したい表3は、 $y_{ij} = v_{ij}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2,3$ ) により求められることになる。しかしながら一般的には、表4と表5は一対比較により求められるものなので、このような状況は起こらない。そこで、以下のように考える。

まず、次を満たす $K_1, K_2, K_3$ を考える：

$$\begin{aligned} v_{11} K_1 : v_{12} K_2 : v_{13} K_3 &= w_{11} : w_{12} : w_{13}, \\ v_{21} K_1 : v_{22} K_2 : v_{23} K_3 &= w_{21} : w_{22} : w_{23}, \\ v_{31} K_1 : v_{32} K_2 : v_{33} K_3 &= w_{31} : w_{32} : w_{33}, \\ v_{41} K_1 : v_{42} K_2 : v_{43} K_3 &= w_{41} : w_{42} : w_{43}. \end{aligned}$$

ここで、 $v_{1j} K_j : v_{2j} K_j : v_{3j} K_j : v_{4j} K_j = v_{1j} : v_{2j} : v_{3j} : v_{4j}$  ( $j=1,2,3$ ) であること、すなわち、表4の列に関する連比は維持されていることに注意する。しかしながら、任意の $v_{ij}, w_{ij}$ に対して、そのような $K_1, K_2, K_3$ は一般には存在しないことがわかる。一方で、次の等式は成り立つ：

$$\begin{aligned} v_{11} (w_{11}/v_{11}) : v_{12} (w_{12}/v_{12}) : v_{13} (w_{13}/v_{13}) &= w_{11} : w_{12} : w_{13}, \\ v_{21} (w_{21}/v_{21}) : v_{22} (w_{22}/v_{22}) : v_{23} (w_{23}/v_{23}) &= w_{21} : w_{22} : w_{23}, \\ v_{31} (w_{31}/v_{31}) : v_{32} (w_{32}/v_{32}) : v_{33} (w_{33}/v_{33}) &= w_{31} : w_{32} : w_{33}, \\ v_{41} (w_{41}/v_{41}) : v_{42} (w_{42}/v_{42}) : v_{43} (w_{43}/v_{43}) &= w_{41} : w_{42} : w_{43}. \end{aligned}$$

そこで、誤差 $e_{ij}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2,3$ ) を利用して、以下を満たす実数 $K_1, K_2, K_3$ を考えることにする：

$$K_1 e_{i1} = w_{i1}/v_{i1} \quad (i=1,2,3,4), \quad K_2 e_{i2} = w_{i2}/v_{i2} \quad (i=1,2,3,4), \quad K_3 e_{i3} = w_{i3}/v_{i3} \quad (i=1,2,3,4).$$

これは、一対比較の結果として $w_{ij}/v_{ij}$ を得るが、それは理想値である $K_1, K_2, K_3$ に誤差 $e_{ij}$ を含んだものになっていると考えることに等しい。そして、この式は積の形をしていることから、対数最小二乗法により $K_1, K_2, K_3$ を決定すれば良いことになる。具体的には、誤差 $e_{ij}$ の対数を取り、それを二乗したものの総和である次の値を最小にする $K_1, K_2, K_3$ を推定値として採用する(最小化問題)：

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (\log e_{ij})^2$$

ちなみに、このことは表4と表5から表3を推定するとき、表4の列の成分からなる連比を固定し、表5の列の成分からなる連比を調整することを意味している。これは一般的には各評価基準について代替案を一对比較する方が、各代替案について評価基準の重みを一对比較により求めるより安定している意味で妥当といえる。なお、実際に各代替案について評価基準の重みを一对比較により求めるには、結構な困難が伴うため現実的でないことを付け加えておく。このことに関する検討を第5節で行い、第6節で改良バージョンを数値例で示す。また、列と行を同時に調整する方法も考えられるが、現状では行と列では安定性が異なる点と行の評価比を算出することの困難さから、この方法は現実的でないとしておく。これについては、本論文ではこれ以上深入りしない。

さてここで、上記の問題を解く。 $K_1 e_{i1} = w_{i1}/v_{i1}$  ( $i=1,2,3,4$ ) について考えれば十分であることは容易に分かる。この式は $\log e_{i1} = \log(w_{i1}/v_{i1}) - \log(K_1)$  に等しい。そこで次のように置く：

$$f(K_1) = \sum_{i=1}^4 (\log e_{i1})^2 = \sum_{i=1}^4 \left( \log\left(\frac{w_{i1}}{v_{i1}}\right) - \log(K_1) \right)^2.$$

このとき、 $f(K_1)$  を $K_1$ で微分して以下を得る：

$$\frac{df(K_1)}{dK_1} = \sum_{i=1}^4 2 \left( \log\left(\frac{w_{i1}}{v_{i1}}\right) - \log(K_1) \right) \left( -\frac{1}{K_1} \right).$$

したがって、 $f(K_1) = 0$  より次を得る：

$$\sum_{i=1}^4 \left( \log\left(\frac{w_{i1}}{v_{i1}}\right) - \log(K_1) \right) = \log\left(\frac{w_{11}}{v_{11}} \times \frac{w_{21}}{v_{21}} \times \frac{w_{31}}{v_{31}} \times \frac{w_{41}}{v_{41}}\right) - \log(K_1)^4 = 0.$$

これより、更に次を得る：

$$K_1 = \sqrt[4]{\frac{w_{11}}{v_{11}} \times \frac{w_{21}}{v_{21}} \times \frac{w_{31}}{v_{31}} \times \frac{w_{41}}{v_{41}}}.$$

したがって、任意の $j$  ( $j=1,2,3$ ) に対して次を得たことになる：

$$K_j = \sqrt[4]{\frac{w_{1j}}{v_{1j}} \times \frac{w_{2j}}{v_{2j}} \times \frac{w_{3j}}{v_{3j}} \times \frac{w_{4j}}{v_{4j}}}.$$

よって、表6を得る（各セルは $K_j$ に $v_{ij}$ を乗じたものになる）。これにより、表6は、ある種の最適解であることが示された。

ところで、[2]で双対バージョンとして示したものは、表4の各列の成分による連比が（行のそれより）安定していると考え、各行の成分による連比を調整するものであるといえる。実際、実数 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ を利用して、以下のように書くことができ

る：

$$\begin{aligned} v_{11} : v_{21} : v_{31} : v_{41} &= w_{11}M_1 : w_{21}M_2 : w_{31}M_3 : w_{41}M_4, \\ v_{12} : v_{22} : v_{32} : v_{42} &= w_{12}M_1 : w_{22}M_2 : w_{32}M_3 : w_{42}M_4, \\ v_{13} : v_{23} : v_{33} : v_{43} &= w_{13}M_1 : w_{23}M_2 : w_{33}M_3 : w_{43}M_4. \end{aligned}$$

一方で、

$$\begin{aligned} v_{11} : v_{21} : v_{31} : v_{41} &= w_{11} (v_{11}/w_{11}) : w_{21} (v_{21}/w_{21}) : w_{31} (v_{31}/w_{31}) : w_{41} (v_{41}/w_{41}), \\ v_{12} : v_{22} : v_{32} : v_{42} &= w_{12} (v_{12}/w_{12}) : w_{22} (v_{22}/w_{22}) : w_{32} (v_{32}/w_{32}) : w_{42} (v_{42}/w_{42}), \\ v_{13} : v_{23} : v_{33} : v_{43} &= w_{13} (v_{13}/w_{13}) : w_{23} (v_{23}/w_{23}) : w_{33} (v_{33}/w_{33}) : w_{43} (v_{43}/w_{43}). \end{aligned}$$

である。ここで、 $w_{i1}M_i : w_{i2}M_i : w_{i3}M_i = w_{i1} : w_{i2} : w_{i3}$  ( $i=1,2,3,4$ ) であること、すなわち、表 5 の列に関する連比は維持されていることに注意する。そこで先ほどと同様にして、誤差 $e_{ij}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2,3$ ) を利用して、以下を満たす実数 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ を考えることにする： $M_1e_{1j} = v_{1j}/w_{1j}$  ( $j=1,2,3$ )、 $M_2e_{2j} = v_{2j}/w_{2j}$  ( $j=1,2,3$ )、 $M_3e_{3j} = v_{3j}/w_{3j}$  ( $j=1,2,3$ )、 $M_4e_{4j} = v_{4j}/w_{4j}$  ( $j=1,2,3$ )。したがって、同様の方法で、これも特徴づけることができる。ここでは証明は省略し、結果（表 4 と表 5 から推定される表 3）だけ記載する。ただし、この方法は現実的ではないことは先に注意した通りである（[2]の表 19 には一部誤りがあるので注意）。

表 9 表 3 を推定した表(双対バージョン)

	$A_i$ ( $i=1,2,3,4$ )
$C_j$ ( $j=1,2,3$ )	$w_{ij} \sqrt[3]{\frac{v_{i1}}{w_{i1}} \times \frac{v_{i2}}{w_{i2}} \times \frac{v_{i3}}{w_{i3}}}$

## 5. 本手法を活用する際の使用上の注意と追加手順

[2]で提案した手法は、WS で扱っていた評価対象の適用範囲を拡張したものと解釈することができる。WS を使用する上で注意することは、第 2 節で指摘したように、複数ある評価基準が同一の評価尺度を持ち、評価される代替案がそれぞれの評価基準のもとで、その評価尺度により評価されるということであった。

たとえば、入学試験により入学者を決定する場合（あるいは受験者を評価する場合）、評価基準として英語や数学などを利用するが、それぞれが 100 点満点の試験により各受験者が評価されることになる。もちろん、WS の適用範囲として、このような状況を少し押し広げることできる。たとえば、入社試験として、筆記試験と面接試験を実施し、それぞれの加重平均した値で評価する方法である。しかし、あくまでも同一の、あるいは同一とみなせる評価尺度であることは譲れないところである。

実際、次のような評価は意味をなさない。中古住宅を購入する状況を考える。いくつかの物件から一つを選ぶ、あるいはそれらを順位付けするために、評価基準として「築年数」「10 - 部屋数」「駅からの距離」を採用したとする（ここで、すべての評価



値は小さいほうが好ましくするために、「部屋数」ではなく、「10 - 部屋数」とした)。さてこのような場合、確かに各代替案についての評価値の総和を比較して、値が小さいものが好ましいといえるが、実際には意味が無いことは明らかである。また別の例として、10点満点の数学の試験と、1000点満点の英語の試験を実施し、それらの加重平均を取った値を比較することも無意味である。

繰り返しになるが、WS を適用する場合、複数ある評価基準は、同一の、あるいは同一とみなせる評価尺度を持っている必要がある。そして各代替案を同等に評価した上で、それぞれの評価基準の重みにより加重総和を取ることで意味を持つことになる。

再び[2]で提案した方法について考えると、それは WS の適用範囲を更に広げ、絶対的な評価尺度を持たない評価基準により代替案を評価したい場合に、工夫して評価する方法ということができる。そこでまず言えることは、絶対的な評価尺度による具体的な評価値として評価結果を表現できないために、一対比較を利用するということがある。よく使われる例ではあるが、歌のうまさを比較する場合、具体的に何点と評価することはできなくても（歌のうまさに関して「1点」は意味を持たない）、2人の歌のうまさを一対比較することはできるという考えによる。これは官能検査の考え方に準じている。従って、その結果から表3を推定することになる。そこで、次の使用上の注意を作る：

**使用上の注意 1.** 与えられた評価基準は、同一の、あるいは同一とみなせる評価尺度を持つと見なすことができる。そしてこの評価尺度を仮定して、一対比較により各代替案を評価することができなければならない。

この注意事項は、WS を適用するときと同様の意味での「表3が存在することを認める」と言い換えることができる。この立場から、AHP や ANP と差別化するために、本手法を加重総和比法（WSR: Weighted summation ratio）と呼びたい。

次に、表3の実際の推定方法について検討してみる。表3を推定するためには、2つの表を利用することになる。表4と表5である。表3の列における連比が表4に対応し、行における連比が表5に対応する。列における連比だけで表3と同一視してしまうならAHPと同じ計算方法になる。なお、行の連比を算出することなく、なんらかの方法で表3を推定する方法はいくつか検討されている（Belton-GearモデルやIdealモデルなど）<sup>[5]</sup>。しかし、[2]の手法では、それを直接評価者（あるいは意思決定者）に問い合わせることにしている。ただし、この方法では、AHPの評価尺度（1から9までの整数、及びその逆数）だけでは、十分に評価比を表現することができないという問題が起こる。

実際、AHPの評価尺度を利用する場合、整合的な表を人工的に作成しようとしても、上手く構成することはできない。[2]で示した数値例はかなりテクニカルなものである。あえてANPについて言及するなら、こちらは各クラスター間、あるいはクラスター内の要素間の‘影響 (influence)’を表しているだけなので、AHPの評価尺度を用いることを問題としていないし、実際AHPの評価尺度を採用している。そこで、本手法では、

正の実数であればどのような値を用いても良いものとする。

**使用上の注意 2.** 一対比較における評価尺度として、全ての正の実数を使う。具体的には、まず両者の優劣を決め、劣となる代替案の評価を1とした場合、他方がそれに比べて何倍優れているかを正の実数により表現すればよい。

AHPは形のないものを評価するための同一の評価尺度を提示しているため、いずれの評価基準に関しても同様に評価することができる（したがって同一の尺度を持っている）と考えることができる。しかし、このような考えはWSとはかけ離れたものといえる。本論文では、このあたりの問題については深入りしない。

続いて、実際に評価基準に関して代替案を評価する場面を検討する。容易に分かるように、ある評価基準に関して複数の代替案を比較する方が、ある代替案に関して複数の評価基準を比較するよりも安定的である。たとえば、盆栽を評価する場合を考える。評価基準を「枝ぶり」「葉姿」「幹の肌」「根」「鉢」とするならば、ある盆栽について各評価基準の評価比がどれくらいかを（使用上の注意2に従って）一対比較で算出するよりも、たとえば「枝ぶり」について盆栽を一対比較していった方が安定的に評価できるし、容易である。すなわち、ひとつの評価基準に関して複数の代替案を比較した後に、各代替案に関して複数の評価基準を比較するほうが望ましいと言える。そこで、次を設ける。

**使用上の注意 3.** ひとつの評価基準に関して複数の代替案を比較した後に、各代替案に関して複数の評価基準を比較する。

以上のような使用上の注意を守ることにより、WSの拡張版として、理論上は上手く機能することになる。しかし、実用面からすると問題が残ってしまう。それは、使用上の注意3にある「各代替案に関して複数の評価基準を比較する」は、実際には困難を伴うことである。少々状況は異なるが、カラオケ大会の例で考えてみる。

まず、カラオケ大会での評価基準を「声量」「音程」「発声」「リズム」「表現力」とする。一人目（Aさん）が歌い終わった段階で、全ての評価基準に対して一対比較により相対的に評価値してみる。

表10 Aさんの評価比

	声量	音程	発声	リズム	表現力
Aさん	80	90	75	65	85

そして、二人目（Bさん）が終了したときに、Aさんの評価を意識しながらそれぞれの評価基準の得点（評価比）を決めてみる。ここで表11のような評価をしたとする。

表11 Bさんの評価比

	声量	音程	発声	リズム	表現力
Bさん	85	85	70	70	85

評価方法からすると妥当な感じがするが、このような評価ができる場合、もはや各評価基準に関する A さんと B さんを一対比較することはほぼ意味がなくなる。更に、評価基準「声量」に関して、A さんの音程 : B さんの音程 = 80:85 となるが、これに近い値を一対比較から導出することは困難である。表全体の整合性を考慮すると、もはや調整レベルでは済まないことが容易に分かる。つまり、表 3 の列の連比と行の連比を上手く調整することは、理論上は可能であっても、現実的でないことの方が多いといえる。

そこで、一つの妥協案を与えることにする。それは、評価基準に期待した同一の尺度を持つという条件を一端破棄し、同一の尺度を持つように調整するための係数を設定するというものである。これを「(評価) 尺度調整係数」と呼ぶことにする。もし評価基準が初めから同一の尺度を持つと考えられれば、尺度調整係数は全て 1 に設定すれば良い。このようにして、現実的に利用可能にするために、使用上の注意の代わりに、以下の手順を[2]の手法に組み入れることにする。

手順 a. 与えられた評価基準が、同一の、あるいは同一と見なせる評価尺度を持つように「(評価) 尺度調整係数」を設定する。

手順 b. 各評価基準に関して一対比較により代替案を評価する。一対比較で使う数値は、全ての正の実数を使うものとする。実際には、AHP の尺度と固有ベクトル法が使いやすい。

手順 c. 総合化において、手順 a で求めた尺度調整係数を評価基準間の重みに乗じたものを、改めて評価基準間の重みとする。

もっとも、これらの手順をまとめて、初めから評価基準の重みを算出する方法も考えられる。実際、AHP はそのようにしているかもしれない。しかし、上記のように手順を踏む方がより正確な判断ができる。また感度分析の際などに、尺度調整係数を別途変更することが可能になる。理論上妥当性のある手法を、実務に適用するために改良(修正)することは意義がある。これも理論上の妥当性があればこそその改良と言える。節を改めて、この尺度調整係数を用いた、いわば実用のための改良バージョンを、数値例により説明する。この方法の問題点については、最後の節で言及する。

## 6. 改良バージョンによるカラオケ大会への適用例

本節では、前節で説明した本手法の改良バージョンを、具体例により説明する。例として、前節のカラオケ大会を取り上げる。ここではオリジナルバージョンは示さないが、もしそれを適用するならば、かなり困難なものになることが分かる。

さて、カラオケ大会に 5 名の出場者 (A さん、B さん、C さん、D さん、E さん) があったとする。この中からカラオケチャンピオンを選ぶことにする。評価基準は「声量」「音程」「発声の正確さ」「リズム」「表現力」とする。

(手順 1) まず、図 2 のような階層を作る。

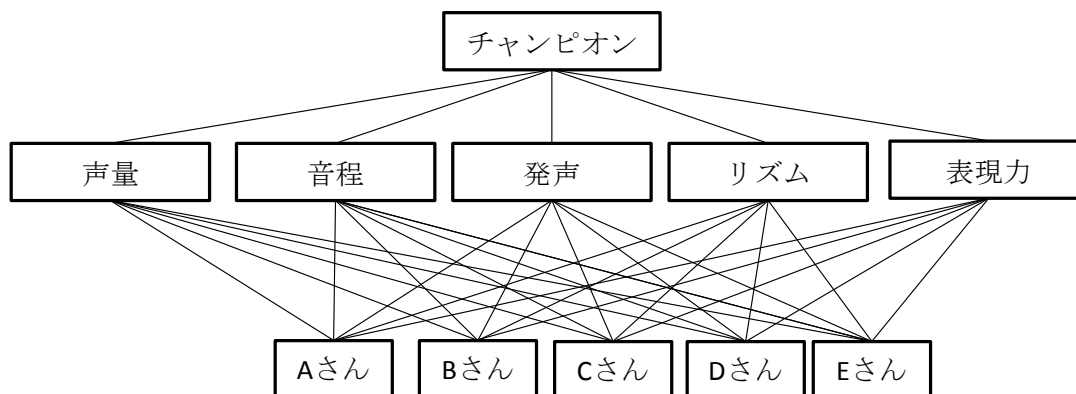


図 2 カラオケ大会の階層図

(手順 2) 次に、この大会では観客を楽しませるという観点から、表 12 のように重み付けする。ここでは AHP のように一対比較表を作成する必要はない。

表 12 評価基準の重み

	声量	音程	発声	リズム	表現力
重み	0.15	0.1	0.15	0.2	0.4

(手順 3) 続いて、評価基準が同一の評価尺度を持つことになるように、尺度調整係数を決定する。基準となりそうなものを 1 と設定することで、大きくなるほど高く評価されることになる。実際の代替案の評価としては小さいものに対応する。10 点レベルで評価される評価基準と、100 点レベルで評価基準があるならば、たとえば 10 点レベルで評価されたものを 100 点レベルに引き上げることを意味する。ただし、あまりにも差がある場合は、そもそも本手法の使用を控えた方が良い。なお、尺度調整係数は感度分析における重要な変数となる。

表 13 評価基準の尺度調整係数

	声量	音程	発声	リズム	表現力
重み	1	1	0.5	1	1.5

(手順 4) 各評価基準に関して一対比較により出場者を評価する。今回は便宜上 AHP の一対比較の方法で、各評価基準における代替案の評価比を算出した。具体的には、1 から 5 までの整数とその逆数を用いて AHP (固有ベクトル法) により計算した。次の手続きに必要となる列に関する評価比は表 14 の通りである。なお、これらの計算は Excel で行い、小数点以下第 4 位で四捨五入したものを転記している。このため、多少の誤差を含んでいる。これ以降の計算及び数値も同様である。

表 14 各評価基準に関する出場者の評価比

	声量	音程	発声	リズム	表現力
A さん	0.076	0.190	0.090	0.058	0.066
B さん	0.409	0.276	0.261	0.310	0.342
C さん	0.220	0.314	0.468	0.161	0.184
D さん	0.220	0.058	0.090	0.161	0.066
E さん	0.076	0.163	0.090	0.310	0.342

さて、WSR の意味で推定される表は、以下のようになる。これは表 13 と表 14 を掛け合わせることで作成される。

表 15 各評価基準に関する出場者の調整済み評価比

	声量	音程	発声	リズム	表現力
A さん	0.076	0.190	0.045	0.058	0.099
B さん	0.409	0.276	0.131	0.310	0.513
C さん	0.220	0.314	0.234	0.161	0.276
D さん	0.220	0.058	0.045	0.161	0.099
E さん	0.076	0.163	0.045	0.310	0.513

(手順 5) ここで、評価基準の重み、尺度調整係数、及び代替案の重みを総合化する。表 12 と表 15 について、WS (あるいは AHP) と同様の方法で総合化する。

$$\begin{pmatrix} 0.076 & 0.190 & 0.045 & 0.058 & 0.099 \\ 0.409 & 0.276 & 0.131 & 0.310 & 0.513 \\ 0.220 & 0.314 & 0.234 & 0.161 & 0.276 \\ 0.220 & 0.058 & 0.045 & 0.161 & 0.099 \\ 0.076 & 0.163 & 0.045 & 0.310 & 0.513 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.15 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.088 \\ 0.376 \\ 0.242 \\ 0.117 \\ 0.302 \end{pmatrix}$$

(手順 6) 最後に、連比の成分の総和を 1 に調整する。表 16 が求めるべき相対評価値 (加重総和比) 及び各出場者の順位である。

表 16 総合判定 (相対的評価値)

	A さん	B さん	C さん	D さん	E さん
評価比	0.078	0.334	0.215	0.104	0.268
順位	5 位	1 位	3 位	4 位	2 位

以上により、B さんがチャンピオンとなる。個別の評価 (表 14) から、B さんは「声量」「リズム」で 1 位の評価、「音程」「発声」で 2 位の評価となっていることがわかる。

ところで、尺度調整係数を利用しない AHP で評価すると、相対的評価値は表 17 のようになる。C さんと E さんの評価比と順位が微妙なところである。このような場合

は、尺度調整係数を考慮し、感度分析を行うのが望ましいと言える。

表 17 総合判定 (相対的評価値)

	A さん	B さん	C さん	D さん	E さん
評価比	0.082	0.327	0.2404	0.111	0.2400
順位	5 位	1 位	2 位	4 位	3 位

また、表 12 と表 13 を組み合わせたもの (セルごとに数値を掛け算したもの) を評価基準の重みとするならば、表 18 のようになる。AHP で直接この値を決めることも可能かもしれないが、そのことを意識する必要があることは明記しておく。

表 18 尺度調整係数と純粹にそれ自体の重みを組み合わせた評価基準の重み

	声量	音程	発声	リズム	表現力
正規化前の重み	0.15	0.1	0.075	0.2	0.6
正規化後の重み	0.133	0.089	0.067	0.178	0.533

## 7. まとめと今後の課題

本論文では、[2]で提案した「代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み」を最適化法により特徴づけし、その手順の妥当性を示した (第 4 節)。その上で、実務上の簡便さを考慮した改良バージョンを提案し (第 5 節)、それを説明するための具体例を示した (第 6 節)。また、[2]で示した双対バージョンは、理論的には妥当なものであるが、現実には活用が難しいことを指摘した (第 5 節)。

本手法は、WS を評価基準が評価尺度として絶対的な数値を持たない場合にも適用できるように拡張したものである。第 5 節でも触れたが、その意味で WSR (Weighted summation ratio) と呼びたい。改良バージョンは AHP とかなり類似した手順になるが、「尺度調整係数」を設定することで、WS の評価値表に相当する評価比表を作成しているところが、AHP との違いである。改良バージョンに至っては、ANP とは異なる手法と言える (supermatrix を用いない簡便法になっている可能性はある)。なお、改良バージョンにより、オリジナルバージョンで問題となっていた、推定した表の行と列の連比に関する整合性の問題は解消されたことになる。

ただし、尺度調整係数では新たに発生する問題がある。それは、尺度調整係数により、評価基準間の評価尺度の差を除去できるものの、そのような評価基準の下でさえ小さい評価を与えられる代替案は、その評価の小ささを反映することができないという問題である。

たとえば、数学と英語の試験を 100 点満点で行ったとき、数学の平均点が 70 点であり、英語の平均点が 10 点だったとする。いずれも 100 点満点で評価されるので、当然、尺度調整係数は 1 である。ところが一対比較によると、数学での 60 点と 80 点は 6:8 で評価され、英語での 6 点と 8 点も 6:8 と評価されてしまうことになる。

たとえば第6節のカラオケ大会の例では、出場者はいずれの評価基準に関しても、同じような数値で評価できると暗黙の裡に仮定していることになる。そしてこのような問題を避けるためには、使用上の困難は伴うものの、やはりオリジナルバージョンを使わなければならない。

改良バージョンにおいてこの問題を解消するためには、尺度調整係数の他に、代替案により影響を受ける係数を新たに設ける必要がある。しかし、これではかえって問題を複雑にしてしまうことになる。しかも、議論が堂々巡りになってしまうことも否めない。よって、上記のような問題があることを配慮した上で、実用的には改良バージョンを活用するのが妥当な態度と言える。今後は、実用面でのブラッシュアップこそが必要である。

以上により、尺度調整係数では新たな問題を生むとしても、AHPの評価方法に対する違和感から始まった一連の研究（直接的には[1]から）は、ここで一区切りがついたと言える。これらの研究により、（1）尺度調整係数を全て1として良い場合にAHPを適用する、あるいは（2）AHPを使う場合に同一の尺度を持つための調整係数を含む評価基準の重みを算出するように心がければ、AHPもWSと同等の評価ができることが確認されたことにもなる。後者については [7]が詳しい。

最後に、前者における尺度調整係数がどのように決定されるかについては、更なる検討が必要になる。これは様々な事例に適用し、その都度検討する課題とも考えられる。応用例の豊富さ、そして、それを活用する人や組織の数こそがツールの妥当性や有用性を証明する、という Saaty 教授の考え方に寄り添うことも重要である。

## 参考文献

- [1] 飯田洋市. (2010) “AHP における絶対評価値を考慮した重要度の統合化法”, 信州大学人文社会科学研究, 第4号, 56-71.
- [2] 飯田洋市. (2012) “代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み”, 信州大学人文社会科学研究, 第6号, 62-77.
- [3] Iida, Youichi. (2012) “A New Way to Make Decisions with Paired Comparisons”, Intelligent Decision Technologies -Proceedings of the 4th International Conference on Intelligent Decision Technologies (IDT' 2012), Vol. 1, Springer-Verlag, 55-66.
- [4] Iida, Youichi. (2013) Issues of Validity of a Method like Weighted Summation and the Analytic Hierarchy Process, Journal of Japanese Symposium on the Analytic Hierarchy Process, No.3, 63-70.
- [5] Saaty, T.L. (1994) Fundamentals of decision making and priority theory with the Analytic Hierarchy Process, RWS Publications.
- [6] Saaty, T.L. (1996) The Analytic Network Process, Pittsburgh, PA, RWS Publications.
- [7] Wedley, W.C. (2009) “Issues in AHP/ANP: Linking and aggregating relative ratio scales” Proceedings of JSAHP2009, 17-37.

(諏訪東京理科大学経営情報学部 准教授  
全学教育機構 非常勤講師)

2013年1月10日受理 2013年2月6日採録決定