代替案間の評価比を復元できる AHP の枠組み

飯 田　洋 市

キーワード：AHP　評価比表　総合化

１．はじめに

1970 年代に Thomas L. Saaty により創始された意思決定法 AHP (Analytic Hierarchy Process) は、世界中で多くの適用事例を持つ実績ある意思決定法である。2011 年 6 月にイタリアソレントで開催された AHP の国際会議 ISAHP (The International Symposium on the Analytic Hierarchy Process)[3] では、42 カ国 96 都市からの参加者があり、約 150 件の成果報告があった。それらの報告の中にはインターネットを活用した事例や現在進行形で進められている取組なども含まれていた。なお、ISAHP は AHP の拡張版である ANP (Analytic Network Process) も対象としており、上記の数値はそれらを合わせたものである。

さて、このような AHP であるが、実際に活用する際に気を付けなければならない注意点が指摘されている[6]。これらは意思決定のあり方に対する考え方の違いに端を発する問題といえるが[4]、AHP の枠組みが我々の日常的な意思決定と完全には合致していないために生じる問題とも解釈できる。本論文の目的は、AHP で扱おうとする問題の切り口に新しい視点を与え、それに基づいた意思決定手法を提案することである。本論文の内容は[2]の第 5 章と第 6 章で扱った課題に対するひとつの回答である。

[2]で紹介したように、AHP はある目標に対して、意思決定者が一番満足できる代替案を選択する（あるいは順位付けする）ための支援法であるが、特に満足度の配分法という視点で解釈することができる。この解釈によると、AHP は、与えられた目標を達成するための代替案を列挙し、それらすべての代替案を選択するときに決定者が 100% 満足できるとの仮定のもとで、そのときの各代替案の持ち分（満足度）を算出する手法となる。[2]では円グラフによりそれを説明した。この解釈による AHP の自然な適用例としては、たとえば資源や資金の配分問題が挙げられる。

しかしながら一般に活用される AHP においては、各評価基準に関する代替案の重要度を正規化するという手続きが問題視されることがある。この正規化の手続きにより、代替案の追加・削除などによる「代替案の順位逆転現象」という問題が生じるためである[1]。現在はいくつかの議論を経て、それを解消するための新しい方法、いわば新しい正規化の方法が提案されている[6]。Saaty 自身も正規化を刷新した Ideal model を別途提案している[4]。ただし、この問題への統一的な解決策は現在も得られていない

といえる[6]。本論文で扱う手法は、この問題への一つの回答を目指している。

さて AHP は大きく分けて次の 3 つのステップで構成される。(1) 階層を構築する、(2) 評価基準や代替案について、一つ上の層にある項目に関する重み付けをする、(3) (2)で求めた重みを総合化し、総合目標に関する代替案の重み（総合評価）を計算する。本論文で提案する手法は (3) に変更を加えるものである。このために (2) で扱う内容に、新しい手続きを加えることになる。この修正により ANP の手続きに似たものになるが、最終的な総合化の手続きの違いにより ANP とは異なる結果が導かれる。

本論文では一対比較表から各項目の重要度を計算するために、AHP/ANP 専用のソフトウェア SuperDecisions（Ver. 2.0.8）を活用する。本手法を遂行するにあたり SuperDecisions で賄えない計算については Excel2010 を活用した。

２．評価基準に関する代替案の評価値表とそれによる代替案の総合評価

本章において、本論文で提案する手法の目的を明らかにする。これを説明するために、次のような問題を考える。ある会社への就職を希望する 3 人の大学生（A さん、B さん、C さん）が、その会社の採用試験を受けた。この会社が 1 名だけ採用する場合、どの大学生を採用するべきか。なおこの会社への採用は 1 回の筆記試験の結果で決まるものとし、その筆記試験は国語、算数、社会の 3 教科があり、いずれも 100 点満点とする。ここでは受験者数を 3 名としたが、それ以上でも同様に考えることができる。

ところで、この会社は、今回の募集で数字に強い人を採用したいと希望しているため、それぞれの教科について表 1 にある重みをつけたとする。重みの合計は 1 とする。

表 1　教科別の重み

科目	国語	算数	社会
重み	0.3	0.5	0.2

また大学生 A さん、B さん、C さんの得点は、それぞれ表 2 のようであったとする。

表 2　得点表

	国語	算数	社会
A さん	90	80	70
B さん	70	100	60
C さん	80	80	90

そこでまず、A さん、B さん、C さんの評価に関する順位はどのようになるか検討する。この問題に対して、以下のように計算するのが自然である。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \text{Aさんの評価} \\ \text{Bさんの評価} \\ \text{Cさんの評価} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 80 & 70 \\ 70 & 100 & 60 \\ 80 & 80 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 83 \\ 82 \end{pmatrix}.$$

これより A さん（81 点）＜C さん（82 点）＜B さん（83 点）となり、B さんが 1 位、2 位が C さん、3 位が A さんとなる。そこでこの会社が 1 名だけを採用するのであれ

ば、B さんを採用するのが妥当という結論が得られる。

さてここで、もし 3 名の評価について具体的な点数は必要ではなく、順位だけがわかれば十分ということであれば、次の連比が得られれば十分であることがわかる。もちろんこのような経過をたどったとしても、先の結果と同じ B さんを選ぶことになる。

A さんの評価 : B さんの評価 : C さんの評価 ＝ 81 : 83 : 82 = 0.329 : 0.337 : 0.333.

最後の式は、評価の割合の合計を 1 に調整したものであり、AHP でいうところの正規化に相当する。そしてこの連比を得るためであれば、表 2 の代わりに、次のような表 3 を得れば十分であることがわかる。

表 3　正規化した得点表

	国語	算数	社会
A さん	0.125	0.111	0.097
B さん	0.097	0.139	0.083
C さん	0.111	0.111	0.125

この表 3 は、表 2 の各列、各行の連比を一定に保ちながら、全体の数値の総和を 1 になるように、それぞれの評価値を調整したものである。具体的には、表 2 と表 3 の各セルにある数値の関係は以下のようなる。

- 国語について　A さん : B さん : C さん ＝ 90 : 70 : 80 = 0.125 : 0.097 : 0.111,
- 算数について　A さん : B さん : C さん ＝ 80 : 100 : 80 = 0.111 : 0.139 : 0.111,
- 社会について　A さん : B さん : C さん ＝ 70 : 60 : 90 = 0.097 : 0.083 : 0.125,
- A さんについて　国語 : 算数 : 社会 ＝ 90 : 80 : 70 = 0.125 : 0.111 : 0.097,
- B さんについて　国語 : 算数 : 社会 ＝ 70 : 100 : 60 = 0.097 : 0.139 : 0.083,
- C さんについて　国語 : 算数 : 社会 ＝ 80 : 80 : 90 = 0.111 : 0.111 : 0.125.

このとき、表 1 と表 2 から各大学生の評価を求めたように、表 1 と表 3 から次のようにして各人の評価を得ることができる。

$$\begin{pmatrix} \text{A さんの暫定評価} \\ \text{B さんの暫定評価} \\ \text{C さんの暫定評価} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.111 & 0.097 \\ 0.097 & 0.139 & 0.083 \\ 0.111 & 0.111 & 0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.115 \\ 0.114 \end{pmatrix}.$$

さらにここで暫定評価を正規化することにより、以下を得る。

A さんの評価 : B さんの評価 : C さんの評価　= 0.113 : 0.115 : 0.114
= 0.329 : 0.337 : 0.333.

これは先ほど求めた各大学生の評価に関する連比に一致している。表 2 から得られる結果と表 3 から得られる結果は一般的に等しくなることが証明できる。本論文で提案する手法の目的は、表 3 と同等な表を推定することにより、最終的な代替案の総合評価に関する連比を求めることで、意思決定を支援することである。

一方で、通常の AHP では、各評価基準に関する代替案間の評価（重要度）を正規化、すなわち評価比の合計が 1 となるように連比を調整することで、表 2 より表 4 を得る。

表 4　AHP により得られる評価比表

	国語	算数	社会
A さん	0.375	0.308	0.318
B さん	0.292	0.385	0.273
C さん	0.333	0.308	0.409

実際、表 2 と表 4 の関係は以下のようになる。

- 国語について　A さん：B さん：C さん ＝90：70：80 = 0.375：0.292：0.333,
  0.375 + 0.292 + 0.333 = 1.000,
- 算数について　A さん：B さん：C さん ＝80：100：80 = 0.308：0.385：0.308,
  0.308 + 0.385 + 0.308 = 1.001,
- 社会について　A さん：B さん：C さん ＝70：60：90 = 0.318：0.273：0.409,
  0.318 + 0.273 + 0.409 = 1.000.

ここで注意したいことは、A さんの算数の得点 80 点と、C さんの算数の得点 80 点は同じ 0.308 と評価されているが、C さんの国語の得点 80 点は 0.333 とそれらより高く評価されていることである。評価基準としての「算数」と「国語」の重要度は別途、表 1 で見積もられていることを考慮すると、このような問題を扱う場合は、通常の AHP とは異なる視点が必要であるといえる。

次に AHP では、評価基準の重要度と評価基準に関する代替案の重要度を総合化することになる。そして表 1 と表 4 から次のような総合評価比を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{A さんの評価} \\ \text{B さんの評価} \\ \text{C さんの評価} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.308 & 0.318 \\ 0.292 & 0.385 & 0.273 \\ 0.333 & 0.308 & 0.409 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.330 \\ 0.334 \\ 0.336 \end{pmatrix}.$$

ここで得られる連比はすでに正規化されている。以上より、次の総合評価比を得る。

A さんの評価：B さんの評価：C さんの評価 ＝ 0.330：0.334：0.336.

よって、A さん(0.330) < B さん(0.334) < C さん(0.336) となり、1 位が C さん、2 位が B さん、3 位が A さんとなる。これは先ほどの結果では 1 位であった B さんが 2 位になっている。そして通常の AHP では C さんが採用される。

以上のことから、AHP を活用する場合、表 2 のような評価値表の存在を認めない立場をとっていることに注意が必要となる。実際、そのような評価値表（あるいは評価比表）があると仮定して重みづけや総合化の計算を行うと、決定者が期待する結果とは異なるものを得ることになる。表 2 のような評価値表（あるいは表 3 のような評価比表）が存在すると仮定できないときこそ、AHP は妥当な意思決定法として活用できるといえる。反対に、そのような表の存在が仮定できない場合は、本論文で提示する手法は（今のところ）活用できない。これに関しては第 7 章で改めて取り上げる。

次章では、評価基準に対して各代替案が表 2 のような評価値表が存在すると仮定で

きる場合に、その評価値表を具体的に知らずとも、表 3 のような評価比表を推測することで、代替案の総合評価値の連比を求める方法について説明する。なお本論文で提案する手法と通常の AHP との関係については「尺度調整係数」というものを考慮することで説明できると考えているが、これに関しての議論は別の機会に譲る。

３．代替案間の評価比を復元できる AHP の手順

ここからは、ある大学生が卒業論文のための所属ゼミを決める問題を考える。これは[2]で扱った問題である。第 2 章で説明した目的を達成するための手続きは、現状で 2 種類のパターンを得ている。本論文ではそのうちの基本パターンと、その双対バージョンについて説明する。

(Step 1) 階層の構築 この問題に関し、その大学生は、目標「ゼミの選定」、評価基準「ゼミの内容」「開講時間帯」「教員との話しやすさ」および代替案としてのゼミ候補「A ゼミ」「B ゼミ」「C ゼミ」を設定したとする（図 1）。

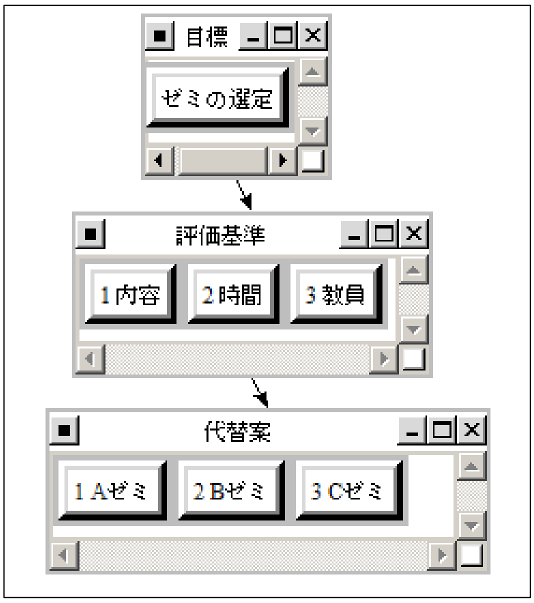

図 1　階層

(Step 2) 目標に関する評価基準の重み付け 一対比較により、目標に関する各評価基準の重要度を計算する。これに関して、その大学生は AHP の一対比較により以下の表 5 を得たとする。AHP の一対比較では、尺度は 1 から 9 の自然数およびその逆数を使うことに注意する（第 7 章を参照のこと）。また表中の C.I.は、SuperDecisions で求められる一対比較表の整合度である。通常の AHP では、C.I.が 0.1 未満（場合により 0.15 未満）であれば、その一対比較表（よって一対比較結果）は妥当性があるとする。

表 5　目的に関する評価基準の重みづけ

（目標）	内容	時間	教員	重要度
内容	1	3	5	0.637
時間	1/3	1	3	0.258
教員	1/5	1/3	1	0.105

C.I. = 0.0370

これより、目標に関する各評価基準の評価比として次を得たことになる。

「内容」の重要度 :「時間」の重要度 :「教員」の重要度 ＝ 0.637 : 0.258 : 0.105.

(Step 3) 目標のもとでの評価基準に関する各代替案の重み付け 目標のもとでの、各評価基準に関する各代替案の重要度を得る。通常の AHP のように、単に「各評価基準に関する代替案の重みづけ」と表現していないことに注意する（表 2 を参照のこと）。

(Step 3-1) 各評価基準に関する代替案の重み付け まず通常の AHP と同様にして、各評価基準に関する代替案の重要度を求める。このとき以下のようになったとする。

表 6　各評価基準に対する代替案の一対比較表

「ゼミの内容」に関する評価

内容	A	B	C	重要度
A	1	3	5	0.637
B	1/3	1	3	0.258
C	1/5	1/3	1	0.105

C.I. = 0.037

「開講時間帯」に関する評価

時間	A	B	C	重要度
A	1	3	7	0.669
B	1/3	1	3	0.243
C	1/7	1/3	1	0.088

C.I. = 0.007

「教員との話しやすさ」に関する評価

教員	A	B	C	重要度
A	1	5	7	0.740
B	1/5	1	2	0.167
C	1/7	1/2	1	0.094

C.I. = 0.014

表 6 にある各表の重要度は、SuperDecisions の仕様により、すでに正規化されている。すなわち、0.637 + 0.258 + 0.105 = 1.000, 0.669 + 0.243 + 0.088 = 1.000, 0.740 + 0.167 + 0.094 = 1.001。これらをまとめ、表 7 を得る。

表 7　評価基準に関する各代替案の重要度の比（正規化済）

(評価基準)	内容	時間	教員
A	0.637	0.669	0.740
B	0.258	0.243	0.167
C	0.105	0.088	0.094

(Step 3-2) 各代替案における評価基準の重みの占める割合の算出　ここで代替案内での評価基準の重要度の占有率を求める。ここからは通常の AHP とは異なる手順となる（ANP に似ている）。まず評価の視点について説明する。たとえば、A ゼミについて、目標を達成するうえで評価基準「内容」「時間」「教員」がどれくらいの重要度があるか、その割合を求めることを考える（図 2）。

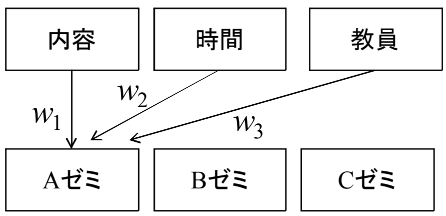

図 2　各代替案からみた評価基準の評価

このことは占有率という観点からうまく説明することができる（図 3 を参照のこと）。目標に対して代替案を評価するとき、多様な評価基準が考えられる。そしてその中から採用されたものが階層にある評価基準と考えることができる。今回の場合は、3 つの評価基準「内容」「時間」「教員」により評価することに決めたことになる（図 1）。図 3 はそれら採用された評価基準およびそれ以外の評価基準（その他の要因）による評価の状況を表現したものである。そして A ゼミについて、評価基準「内容」「時間」

「教員」による評価が、それぞれどの程度の重要度を持っているか、その割合を求めるのがこの手順になる。表 2 のような具体的な評価値（[2]では絶対評価値と表現した）が与えられれば、それぞれが具体的な数値として与えられるが、今の場合はそれを一対比較を利用して推測することになる。

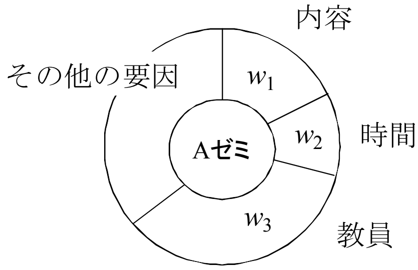

図 3　代替案「A ゼミ」における各評価基準による評価の占有状況

ここで評価基準の占める割合 $w_1 : w_2 : w_3$ を推定するために、次のような質問により評価基準間の一対比較を行うことになる。

質問：2 つの評価基準のうち、どちらがどれだけ A ゼミを特徴づけているか。ただし、比較するための尺度は AHP と同じものとする。

ちなみにこの質問は、ANP では代替案から評価基準へのフィードバックとして扱われている[5]。しかし ANP の解釈では、相互評価（評価基準により代替案を評価したように、代替案からも代替案の都合を考慮して評価基準を行う）のような意味合いが強いように思われる。ここではそのような意味合いは全くないことに注意する。実際、ここで求めたいものは表 3 であり、我々の目標に関していえば表 2 を類推することと同値である。

さてここで、以下のような重要度が得られたとする。

表 8　各評価基準に対する代替案の一対比較表

「A ゼミ」における評価基準の占有率

(A)	内	時	教	重要度
内	1	3	4	0.625
時	1/3	1	2	0.238
教	1/4	1/2	1	0.137

C.I. = 0.018

「B ゼミ」における評価基準の占有率

(B)	内	時	教	重要度
内	1	2	4	0.558
時	1/2	1	3	0.320
教	1/4	1/3	1	0.122

C.I. = 0.018

「C ゼミ」における評価基準の占有率

(C)	内	時	教	重要度
内	1	3	3	0.594
時	1/3	1	2	0.249
教	1/3	1/2	1	0.157

C.I. = 0.052

以上をまとめることで表 9 を得る。これが表 2 を各行に関して調整した表になる。すなわち、各行に関して正規化により得られる表である。

表 9　代替案に関する各評価基準の重要度の占有率（正規化された重要度）

（代替案）	A	B	C
内容	0.625	0.558	0.594
時間	0.238	0.320	0.249
教員	0.137	0.122	0.157

ここで一つ補足をする。それは今までの手順も含めて、いちいち一対比較表を掲載していることには意味があるということでる。それは AHP を拡張することを意識しているためである。本論文で提案する手法が理論的には十分であっても、AHP の尺度により本論文で提示する手法が首尾よく機能するかは別問題ある。したがって、少なくとも首尾よく機能する例として、本論文で示すことを意図している。これに関する問題は、今後の課題として第 7 章で改めて触れる。ソフトウェア SuperDecisions では、尺度として活用する数値に規定はなくなっているが、これは集団意思決定としての AHP、あるいは ANP を意識しているためと考えられる。

(Step 3-3) 各代替案における評価基準の重みの占める割合の算出　(Step 3-2)で求めた表（表 9）に基づいて、(Step 3-1)で求めた各評価基準に関する代替案の重み（表 7）を調整する。この(Step 3-3)と次の(Step 3-4)により、表 3 に対応する評価比表を推定することになる。まず A ゼミについて調整することで表 10 を得る。表 10 は、まず表 7 の A の行を、表 9 の A の列で置き換えた上で、表 7 の各列の成分間の連比を維持するよう数値を調整したものである。表 10 を、A を基底（Basis）する表と呼ぶ。

表 10　表 9 にある「A ゼミ」の重要度をもとに表 7 を調整した評価比表

（A）	内容	時間	教員
A	**0.625**	**0.238**	**0.137**
B	0.253	0.086	0.031
C	0.103	0.031	0.017

実際、表 10 は次の関係を満たす。太字が表 9 の A の列にある数値である。

- 内容について

  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.637：0.258：0.105＝**0.625**：0.253：0.103,
- 時間について

  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.669：0.243：0.088＝**0.238**：0.086：0.031,
- 教員について

  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.740：0.167：0.094＝**0.137**：0.031：0.017.

同様に「B ゼミ」と「C ゼミ」について調整することで表 11 を得る。

表 11　表 9 にある「B ゼミ」「C ゼミ」の重要度をもとに表 7 を調整した評価比表

（B）	内容	時間	教員
A	1.377	0.882	0.541
B	**0.558**	**0.320**	**0.122**
C	0.226	0.116	0.069

（C）	内容	時間	教員
A	3.611	1.898	1.238
B	1.464	0.688	0.279
C	**0.594**	**0.249**	**0.157**

表 11（B）は次の関係を満たす。

- 内容について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.637：0.258：0.105＝1.377：**0.558**：0.226,
- 時間について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.669：0.243：0.088＝0.882：**0.320**：0.116,
- 教員について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.740：0.167：0.094＝0.541：**0.122**：0.069.

同様に、表 11（C）は次の関係を満たす。

- 内容について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.637：0.258：0.105＝3.611：1.464：**0.594**,
- 時間について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.669：0.243：0.088＝1.898：0.688：**0.249**,
- 教員について
  A ゼミ：B ゼミ：C ゼミ ＝0.740：0.167：0.094＝1.238：0.279：**0.157**.

ここでは代替案ごとに異なる評価比表を得たが、具体的な評価値（たとえば表 2）から同様の手続きにより理論的に得られる評価比表はすべて一致することが示される。言い換えると、そのような場合、各代替案を基底とする評価比表は一致する。そしてその場合には(Step 3-4)は不要となる。今回は推定を行っているため（しかも AHP の尺度を使っている）、各代替案を基底とする評価比表はそれぞれ誤差を含み、結果として異なっていると了解できる。(Step 3-4)でそれらを統合する。

(Step 3-4) (Step 3-3)で得られた各代替案を基底とする評価比表の統合　この手順で得られる評価比表が表 2 あるいは表 3 に対応する表となる。特に表 3 はセルの総和が 1 となるように正規化された評価比表であるが、ここではその条件を要求しない。表 10 と表 11 の 3 つの表に関し、セルごとに幾何平均をとることで表 12 を得る。

表 12　各評価基準に関する各代替案の重要度

（目標）	内容	時間	教員
A	1.459	0.736	0.451
B	0.591	0.267	0.102
C	0.240	0.096	0.057

代替案を基底とする評価比表を統合するために、幾何平均以外の方法（たとえば算術平均）も考えられる。しかし、一対比較表の性質を考慮すると幾何平均をとることが自然であることがわかる。実際、幾何平均を使うことで、評価比表のセルにある値の合計値を気にする必要がなくなる。そして表 3 のように、評価比表のセルにある値の合計値が 1 になる表を代表元にとることができる。

(Step 4) 総合化　評価基準の重要度と評価基準に関する代替案の重要度を総合化する。まず評価基準の重要度である表 5（の下の連比）と評価基準に関する代替案の重要度となる表 12 を結合する。まず以下の計算により、暫定評価比を計算する。

$$\begin{pmatrix} \text{Aゼミの暫定評価} \\ \text{Bゼミの暫定評価} \\ \text{Cゼミの暫定評価} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.459 & 0.736 & 0.451 \\ 0.591 & 0.267 & 0.102 \\ 0.240 & 0.096 & 0.057 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.167 \\ 0.456 \\ 0.184 \end{pmatrix}.$$

次にこの暫定評価を正規化する（成分の総計を 1 になるように調整する）。順位だけ必要ということであれば正規化する必要はないが、順位の差異などを比較するためには、この段階での正規化は有用である。そして以下の総合評価比を得る。

A ゼミの評価：B ゼミの評価：C ゼミの評価

= 1.167：0.456：0.184 = 0.646：0.252：0.102.

以上より、C（0.102）＜B（0.252）＜A（0.646）を得る。この結果から、その大学生は A ゼミを第一候補とすればよいことになる。

最後に、この手法を活用するに当たり前提とした評価基準に関する代替案の評価表の推定結果は表 12 となる。また、代表元（成分の総和が 1）は表 13 になる。これにより評価比（の代表元）が復元されたことになる。

表 13 推定された評価基準に関する代替案の評価表

	内容	時間	教員
A	0.365	0.184	0.113
B	0.148	0.067	0.025
C	0.060	0.024	0.014

ここでたとえば C ゼミの「内容」に関する具体的な評価値が 60 であると決めた（あるいはなんらかの方法で求められた）とすると、評価値表として表 14 を得ることができる（評価値が復元されたことになる）。この評価値表と評価基準の重要度を組み合わせても、代替案に関する最終的な総合評価比は同じものになる。

表 14 表 13 に対応する評価値表の例

	内容	時間	教員
A	365	184	113
B	148	67	25
C	60	24	14

４． 代替案間の評価比を復元できる AHP の計算式

第 2 章や第 3 章により手法の目的や方針を確認した上で、最終結論だけ必要な場合は、以下のように総合化すれば良いことになる。ここでは 3 つの評価基準 C_1、C_2、および C_3、3 つの代替案 A_1, A_2 そして A_3 からなる階層を想定して説明する（図 1 を参照のこと）。まず (Step 3-1) と (Step 3-2) で一対比較により表 15 と表 16 が得られたとする。表 15 は表 7、表 16 は表 9 にそれぞれ対応する。

表 15　評価基準に関する各代替案の重要度の比

（評価基準）	C_1	C_2	C_3
A_1	v_{11}	v_{12}	v_{13}
A_2	v_{21}	v_{22}	v_{23}
A_3	v_{31}	v_{32}	v_{33}

表 16　代替案に関する各評価基準の重要度の占有率

（代替案）	A_1	A_2	A_3
C_1	w_{11}	w_{21}	w_{31}
C_2	w_{12}	w_{22}	w_{32}
C_3	w_{13}	w_{23}	w_{33}

これらの表から最終的に推定される評価比表は表 17 のように書ける。

表 17　評価基準に関する各代替案の評価比表

（目標）	C_1	C_2	C_3
A_1	$v_{11}\sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}}\times\frac{w_{21}}{v_{21}}\times\frac{w_{31}}{v_{31}}}$	$v_{12}\sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}}\times\frac{w_{22}}{v_{22}}\times\frac{w_{32}}{v_{32}}}$	$v_{13}\sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}}\times\frac{w_{23}}{v_{23}}\times\frac{w_{33}}{v_{33}}}$
A_2	$v_{21}\sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}}\times\frac{w_{21}}{v_{21}}\times\frac{w_{31}}{v_{31}}}$	$v_{22}\sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}}\times\frac{w_{22}}{v_{22}}\times\frac{w_{32}}{v_{32}}}$	$v_{23}\sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}}\times\frac{w_{23}}{v_{23}}\times\frac{w_{33}}{v_{33}}}$
A_3	$v_{31}\sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}}\times\frac{w_{21}}{v_{21}}\times\frac{w_{31}}{v_{31}}}$	$v_{32}\sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}}\times\frac{w_{22}}{v_{22}}\times\frac{w_{32}}{v_{32}}}$	$v_{33}\sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}}\times\frac{w_{23}}{v_{23}}\times\frac{w_{33}}{v_{33}}}$

一方で目標に関する評価基準の重要度を表 18 とする。この重要度の総和は 1 に調整している。

表 18　目標に関する評価基準の重要度

（目標）	C_1	C_2	C_3
重要度	c_1	c_2	c_3

ただし $c_1+c_2+c_3=1$.

このとき代替案に関する暫定総合評価比は次のようになる：

A_1 の暫定総合評価比：A_2 の暫定総合評価比：A_3 の暫定総合評価比 ＝

$$c_1\times v_{11}\sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}}\times\frac{w_{21}}{v_{21}}\times\frac{w_{31}}{v_{31}}}+c_2\times v_{12}\sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}}\times\frac{w_{22}}{v_{22}}\times\frac{w_{32}}{v_{32}}}+c_3\times v_{13}\sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}}\times\frac{w_{23}}{v_{23}}\times\frac{w_{33}}{v_{33}}}$$

$$: c_1 \times v_{21} \sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}} \times \frac{w_{21}}{v_{21}} \times \frac{w_{31}}{v_{31}}} + c_2 \times v_{22} \sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}} \times \frac{w_{22}}{v_{22}} \times \frac{w_{32}}{v_{32}}} + c_3 \times v_{23} \sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}} \times \frac{w_{23}}{v_{23}} \times \frac{w_{33}}{v_{33}}}$$

$$: c_1 \times v_{31} \sqrt[3]{\frac{w_{11}}{v_{11}} \times \frac{w_{21}}{v_{21}} \times \frac{w_{31}}{v_{31}}} + c_2 \times v_{32} \sqrt[3]{\frac{w_{12}}{v_{12}} \times \frac{w_{22}}{v_{22}} \times \frac{w_{32}}{v_{32}}} + c_3 \times v_{33} \sqrt[3]{\frac{w_{13}}{v_{13}} \times \frac{w_{23}}{v_{23}} \times \frac{w_{33}}{v_{33}}}.$$

最後にこの暫定評価比の合計を 1 にする（正規化する）ことで各代替案の総合評価比を得る。実際、第 3 章で扱った例により表 17 を確かめることができる。結果として、表計算ソフトなどを利用する場合、(Step 3-3), (Step 3-4) および (Step 4) の代わりに、上記の計算式を利用することができる。ただし第 6 章で提示する推定した結果の妥当性の判定のためには、改めてこれらの手順を追うことになる。

５．代替案間の評価比を復元できる AHP の計算式（双対バージョン）

第 3 章および第 4 章では、通常の AHP の手順を拡張することにより得られた。すなわち、各評価基準に関する代替案の評価比は一定とみなして、各代替案に占める評価基準による評価比で、それらの重要度を調整した。一方で、各代替案に占める評価基準による評価比を一定とみなし、各評価基準に関する代替案の評価比を調整することも考えられる。後者はある種の第 3 章の手法の双対バージョンといえる。

第 4 章の表 15 および表 16 をもとに双対バージョンの計算式を示すと表 19 のようになる。

表 19　評価基準に関する各代替案の評価比表（双対バージョン）

（目標）	A_1	A_2	A_3
C_1	$w_{11} \sqrt[3]{\frac{v_{11}}{w_{11}} \times \frac{v_{12}}{w_{12}} \times \frac{v_{13}}{w_{13}}}$	$w_{21} \sqrt[3]{\frac{v_{21}}{w_{12}} \times \frac{v_{22}}{w_{22}} \times \frac{v_{23}}{w_{23}}}$	$w_{31} \sqrt[3]{\frac{v_{31}}{w_{31}} \times \frac{v_{32}}{w_{32}} \times \frac{v_{33}}{w_{33}}}$
C_2	$w_{12} \sqrt[3]{\frac{v_{11}}{w_{11}} \times \frac{v_{12}}{w_{12}} \times \frac{v_{13}}{w_{13}}}$	$w_{22} \sqrt[3]{\frac{v_{21}}{w_{12}} \times \frac{v_{22}}{w_{22}} \times \frac{v_{23}}{w_{23}}}$	$w_{32} \sqrt[3]{\frac{v_{31}}{w_{31}} \times \frac{v_{32}}{w_{32}} \times \frac{v_{33}}{w_{33}}}$
C_3	$w_{13} \sqrt[3]{\frac{v_{11}}{w_{11}} \times \frac{v_{12}}{w_{12}} \times \frac{v_{13}}{w_{13}}}$	$w_{23} \sqrt[3]{\frac{v_{21}}{w_{12}} \times \frac{v_{22}}{w_{22}} \times \frac{v_{23}}{w_{23}}}$	$w_{33} \sqrt[3]{\frac{v_{31}}{w_{31}} \times \frac{v_{32}}{w_{32}} \times \frac{v_{33}}{w_{33}}}$

表 19 から得られる総合評価比と、表 18 から得られる総合評価比は異なることが対応

するセルを比較することにより容易に確認できる。本来は正規化して比較することになるが、各セルが一定の数値に対する定数倍になっていないことからわかる。また、たとえば第 3 章の例では、以下のようになる。表 20 は、表 12 と比較しやすいように、表 19 の表とは行と列を入れ替えている。

表 20　各評価基準に関する各代替案の重要度（双対バージョン）

（目標）	内容	時間	教員
A	1.557	0.593	0.341
B	0.437	0.251	0.096
C	0.199	0.083	0.053

これより(Step 4) で次のように暫定総合評価比を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{Aゼミの暫定評価} \\ \text{Bゼミの暫定評価} \\ \text{Cゼミの暫定評価} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.557 & 0.593 & 0.341 \\ 0.437 & 0.251 & 0.096 \\ 0.199 & 0.083 & 0.053 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.181 \\ 0.353 \\ 0.154 \end{pmatrix}.$$

この暫定評価を正規化する（成分の総計を 1 になるように調整する）ことにより、以下の最終結果を得る。

A ゼミの評価：B ゼミの評価：C ゼミの評価

= 1.181 : 0.353 : 0.154 = 0.700 : 0.209 : 0.091.

以上より、C（0.091）＜B（0.209）＜A（0.700）を得る。この結果から、意思決定者は A ゼミを第一候補とすればよいことになる。第 3 章で得られた代替案間の順序は同じであるが、評価比の値は異なっている。

また、この手法を活用するに当たり前提とした評価基準に関する代替案の評比表の推定結果は表 20 となり、代表元（成分の総和が 1）は次のようになる。

表 21 推定された評価基準に関する代替案の評価表（双対バージョン）

	内容	時間	教員
A	0.431	0.164	0.095
B	0.121	0.069	0.026
C	0.055	0.023	0.015

以上のように、評価基準に関する代替案の重要度の評価比（たとえば表 7）を各代替案についての評価基準の重要度の占有率（たとえば表 9）の各列で調整するか、あるいは、本章で双対バージョンとして取り上げたような各代替案についての評価基準の重要度の占有率を評価基準に関する代替案の重要度の評価比の各行で調整するかで、結果は異なることがわかる。ただし、具体的な評価比（たとえば表 2）から理論的な意味で同様の手順により得られる表は、いずれの場合も同じものになる。第 2 章の例でいえば、いずれにせよ表 2 と同等のものが得られることになる。

ところで、第 4 章と第 5 章の方法を組み合することで、さらに新たな代替案の評価比表を作成することも考えられる。しかしながら本論文では、第 4 章（あるいは第 3 章）で紹介した方法を採用する。その理由は、評価基準に関して各代替案を評価する場合、意思決定者は評価基準に応じてひとつの尺度を頭の中に想定して一対比較を行

うことができる。一方で、各代替案についての（階層を作成する段階で採用された）評価基準の評価の持ち分の比率を算出するための一対比較では、その尺度が不明瞭であり不安定なものになる。したがって、評価基準に関する代替案の重要度の評価比（たとえば表 7）はより信頼が高いと認め重要度の連比を固定し、不安定である各代替案についての評価基準の重要度の占有率（たとえば表 9）の各列で調整することが妥当である。また通常の AHP では代替案に関する評価基準間の重要度（表 2 であれば横の関係）を無視している。これを考慮するところが本手法と通常の AHP との違いであることからすれば、第 3 章の手順を採用するほうが自然である。

６．本論文で提案する手法により得られる最終結果の妥当性の確認法

表 15 と表 16 が一対比較により得られれば、本手法により必ず最終結果が得られる。しかし実際には評価値表が存在すると想定できない場合には、本手法は使うことが（今のところ）できない。そこで算出手順の経過をたどるなどして、結果の妥当性を検討する必要が生じる。ここでは、最低限必要と考えられる条件により、その妥当性を測る方法を提案する。具体的には、各代替案を基準とした暫定評価比による順位が全て一致する場合に妥当とする。

第 3 章で扱った「ゼミの選定」により説明する。まず表 8 にある「A ゼミ」に関する表と表 5 から次を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{A ゼミの暫定評価(A)} \\ \text{B ゼミの暫定評価(A)} \\ \text{C ゼミの暫定評価(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.238 & 0.137 \\ 0.253 & 0.086 & 0.031 \\ 0.103 & 0.031 & 0.017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.474 \\ 0.187 \\ 0.075 \end{pmatrix}.$$

これより、代替案「A ゼミ」を基準にした場合の順位は C＜B<A となる。次に、表 8 にある「B ゼミ」に関する表と表 5 から次を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{A ゼミの暫定評価(B)} \\ \text{B ゼミの暫定評価(B)} \\ \text{C ゼミの暫定評価(B)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.377 & 0.882 & 0.541 \\ 0.558 & 0.320 & 0.122 \\ 0.226 & 0.116 & 0.069 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.162 \\ 0.451 \\ 0.181 \end{pmatrix}.$$

これより、代替案「B ゼミ」を基準にした場合の順位は C＜B＜A となる。さらに、表 8 にある「C ゼミ」に関する表と表 5 から次を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{A ゼミの暫定評価(C)} \\ \text{B ゼミの暫定評価(C)} \\ \text{C ゼミの暫定評価(C)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.611 & 1.898 & 1.238 \\ 1.464 & 0.688 & 0.279 \\ 0.594 & 0.249 & 0.157 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.920 \\ 1.139 \\ 0.459 \end{pmatrix}.$$

これより、代替案「C ゼミ」を基準にした場合は C＜B＜A となる。以上の 3 つの順位を比較すると、各代替案の順位はいずれも一致し、しかも最終結果として得られた順位 C（0.102）＜B（0.252）＜A（0.646） とも一致していることがわかる。よって本手法による結果は妥当性を持つと決める。推定した評価比表も同じく妥当だとする。

順位付けが他の基底代替案から得られるものと一致しないものが存在する場合（つまり妥当だと判断できない場合)、以下のような対処が考えられる。
（１）異なる順位付けとなる基底代替案（基準とした代替案）について、それに関する評価基準の占有率を再検討する。第 3 章の例であれば、表 8 を再検討する。
（２）異なる順位付けとなる基底代替案から得られる評価表を除外して再計算する。
（３）初めに仮定した評価値（比）表は存在しないとして、通常の AHP を利用する。

７．まとめ

本論文では代替案間の評価比を復元できる AHP を提案した。説明にあたり、目標、評価基準、代替案からなる三階層モデルを扱ったが、下位評価基準を持つ場合も同様に扱うことができる。この場合は AHP と同様に、評価基準については配分法として重みづけを行い､一番下位となる評価基準に関する代替案の評価比を推定することになる。

ところで、本論文では評価比表の成分をすべて推測することを試みたが、実際には部分的に具体的な評価値がわかることもある。この場合には、それをもとに復元作業を行うことで、より正確な総合評価比を得ることができる。たとえば第 2 章で扱った例でいうと、A さんの国語、算数、社会の点数だけはわかっている場合に相当する。この場合は、B さんや C さんについての評価基準の評価の占有率を算出する必要はなくなる。ただし、A さんの以外、たとえば B さんについてもそのような評価値がわかることで、むしろ本手法の前提が破たんすることもあり得る。

また本手法により評価基準に関する代替案の評価比表を得る一方で、具体的な評価値をひとつでも得ることができれば、評価比表が完全に復元できる。これは第 3 章の終わりで説明した。ただしこれも、二か所以上の具体的な評価値が得られることで本手法の前提が破たんする可能性がある。この意味では、評価基準の比較が容易にできそうな代替案を一つ選び、それに関する評価基準の占有率から全体を調整するのが現実的かもしれない。このことだけでも通常の AHP とは異なる結果が期待される。

評価基準に関する代替案の評価値表（たとえば表 2）が存在しないと考えられる場合、また占有率を一対比較により算出するための基準や尺度の存在が認められない場合には、本手法は妥当性を持たない。この場合は AHP を活用することになる。このように位置づけることにより AHP の妥当性が増すと考えられる。通常の AHP では代替案の追加や削除による代替案間の順序逆転現象の問題は生じるが、上記のような理由からやむを得ないことになる（Saaty がいうところの intangible case になる)。

最後に、本論文で提示した手法に関わるいくつかの課題を列挙する。

（１）一対比較における尺度

本論文では一対比較をする場合、AHP の一対比較を利用した。すでに指摘したように､AHP の一対比較では尺度として 1 から 9 までの整数およびその逆数のみが使われる。ところで本論文の手法は、評価比表について各列の連比に加え、各行の連比を考慮して調整するものであった。したがって、この調整が首尾よく行く場合がかなり制限されることが予想される。このことから、本論文で扱った手法に適した尺度を検討

する必要がある。またこの検討においては、ANP との差異を吟味する必要がある。たとえば AHP/ANP 専用のソフトウェア SuperDecisions では、ANP を主要な手法として位置付けているためか、上記の尺度以外の尺度も活用できるようになっている。

（２）結果の妥当性

第 6 章で扱った結果についての妥当性について検証する方法をより精密化する余地がある。またたとえば、各代替案を基準として得られる正規化された評価比表（代表元）を比較するなど別の検証法も考えられる。

（３）行の調整と列の調整を組み合わせた手法

双対バージョンを考慮した統一的な計算手法について、さらに検討する必要があるかもしれない。もしそのような手法があるならば、それと本手法の差異を提示しなければならない。

（４）ANP による結果との差別化

本手法と ANP との差異を明確にする必要がある。本手法は (Step 1) から (Step 3-2) までは ANP と同じ手順を踏んでいる。また第 2 章で説明したことを ANP でも再現できる。すでに AHP との差は明らかであるが、ANP について数学的な意味での違いを明確にする必要がある。いずれの手法にとっても、最適化問題としてとらえることができるとよい。

（５）ソフトウェアと実用化

本手法は一対比較により重要度を求めるところ以外は Excel で十分に対応できる。しかし意思決定支援のためには、これら一連の手順を一つのプログラムとして作成する必要がある。その上で、実務的側面から運用上の問題点などを検討する必要がある。このようなソフトウェアは（１）で提示した尺度の問題を検討するためにも有効である。

（６）第 2 章からわかるように、本手法は加重総和法の変形と解釈することができる。実際、具体的な評価値（絶対評価値）が得られない場合に、相対的な評価比を活用して代替案を評価する手法と位置づけられる。この視点からの一般化が期待される。

参考文献

[1] Belton, V and Gear, A.E. (1983) “On a shortcoming of Saaty’s method of analytic hierarchies”, Omega, 11, 228-230.

[2] 飯田洋市. (2010) “AHP における絶対評価値を考慮した重要度の総合化法”, 信州大学人文社会科学研究, 第 4 号, 56-71.

[3] ISAHP2011: http://www.isahp.org/italy2010/ (最終確認日：2012 年 1 月 5 日)

[4] Saaty, T.L. (1994) Fundamentals of decision making and priority theory with the Analytic Hierarchy Process, RWS Publications.

[5] Saaty, T.L. (1996) The Analytic Network Process, Pittsburgh, PA, RWS Publications.

[6] Wedley, W.C. (2009) “Issues in AHP/ANP: Linking and aggregating relative ratio scales” Proceedings of JSAHP2009, 17-37.

（諏訪東京理科大学経営情報学部 准教授
全学教育機構 非常勤講師）

2012 年 1 月 6 日受理　2012 年 1 月 28 日採録決定