AHP における絶対評価値を考慮した重要度の総合化法

飯 田　洋 市

キーワード：AHP　一対比較　一対比較行列　重要度　総合化

１．はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は, 1970 年代にピッツバーグ大学の Saaty 教授により提案され，現在までに多くの適用事例を持つ意思決定者の直観や経験を取り入れた意思決定法である[6]。この意思決定法は定性的な直観や経験を定量的に扱うために，意思決定の過程で一対比較を繰り返し利用するところが特徴の一つとしてあげられる。

さて AHP の手順は，次のように大きく 3 つのステップに分けられる。

(STEP 1)　解決したい問題を，総合目的，評価基準，代替案にレベル分けし階層構造として表現する。階層の一番上のレベルとなる総合目的は 1 項目からなるものとする。

(STEP 2)　各レベルの項目の重要度を求める。具体的には次の通りである。

1. 重要度を求めようとする同レベルにある項目間で, その 1 つ上のレベルにある各項目に関して一対比較する。これにより一対比較表を得る。
2. この一対比較表を行列（一対比較行列）と考え，この行列の最大固有値に属する固有ベクトルを求める。なおこの最大固有値の存在は証明されている。
3. 2 で求めた固有ベクトルをもとに，成分の総和が 1 となる（最大固有値に属する）固有ベクトルを求める。この成分が対応する項目の重要度となる。

(STEP 3)　(STEP 2)で求めた重要度を利用して, 総合目的に対する各代替案の総合評価値を計算する。ここで得られる評価値により，各代替案の優先順位が与えられる。

(STEP 2)の 3 における操作は Saaty により正規化(normalize)と名付けられている。なお上で紹介した手順は AHP の基本型であり, 種々の問題に応じた変形バージョンがある。たとえば，内部従属法，絶対評価法，外部従属法などがある。内部従属法については第 3 章と第 4 章で扱う。

ところで，上で紹介した AHP の手順において次のような問題が容易に想起される。すなわち，(STEP 2)の 1 における意思決定者による一対比較の結果が全体として整合性があるとして良いかという問題である。この問題に関しては，一対比較により得られる一対比較表に関する指標がいくつか開発されている。たとえば Saaty が提示した C.I.や C.R.が有名である。たとえば C.I.は，その値が 0.1 または 0.15 より小さい場合に

一対比較結果は整合性があるとして良いとされている。また著者は一対比較表に含まれる，矛盾を引き起こすひとつの原因である一巡三角形の個数に着目し，整合性があるとして妥当か否かを判定する方法を提案している[2, 3]。

さて AHP ではこれとは別の問題が重要視されている。それは代替案が追加あるいは削除された場合に，一対比較の結果が完全に整合性をもっているにもかかわらず，代替案間で順位の逆転が起こるという問題である。この問題を明確に指摘したのは Belton と Gear である[1]。この問題についても，これを回避するための方法が現在までにいくつも提案されている。たとえば，Belton と Gear は，正規化の方法を変更する方法で，上述の問題点を克服する方法を提案している[1]。

本論文では，この順位逆転問題に関する新たな解決策として絶対値評価法を提案する。これは Saaty が提案する AHP を配分モデル（distributed AHP）とみなす場合の自然な拡張版といえる。ただし本論文で提案する方法は，項目を順位付けするための絶対的な尺度の存在を仮定した場合から想起しており，本来の AHP がターゲットとしている領域を超えているとも考えられることを注意しておく。なおこの種の問題については，Wedley [8] により総括されているが，本論文で提案する方法はその中では扱われていないものとなっている。

２．配分法としてのＡＨＰの解釈

本章では Saaty が提唱する配分法としての AHP の解釈に従い，円グラフを利用して AHP の概略をみて行くことにする。第 2 章から第 4 章まで扱う事例として，大学生が考える「所属ゼミの選択」という問題を挙げる。以下，一対比較表の数値等は著者が適当に割り当てたものであることを注意しておく。

まずこの問題の構造を明らかにするために階層を作成する。ここでは簡単のために，3 階層構造とし，総合目的「所属ゼミの選択」，評価基準「ゼミの内容」「開講時間帯」「教員との話しやすさ」，代替案「A ゼミ」「B ゼミ」「C ゼミ」とする（図 1）。

ここで注意したいことは，総合目的を決定した後すぐに代替案を決定し，それからそもそも論として総合目的に対する評価基準を設定するということである[7]。このことは，代替案は代替案として存在するが，その一方で AHP では総合目的に対して普遍的な評価基準が存在していることを仮定したモデルであることを暗示している。

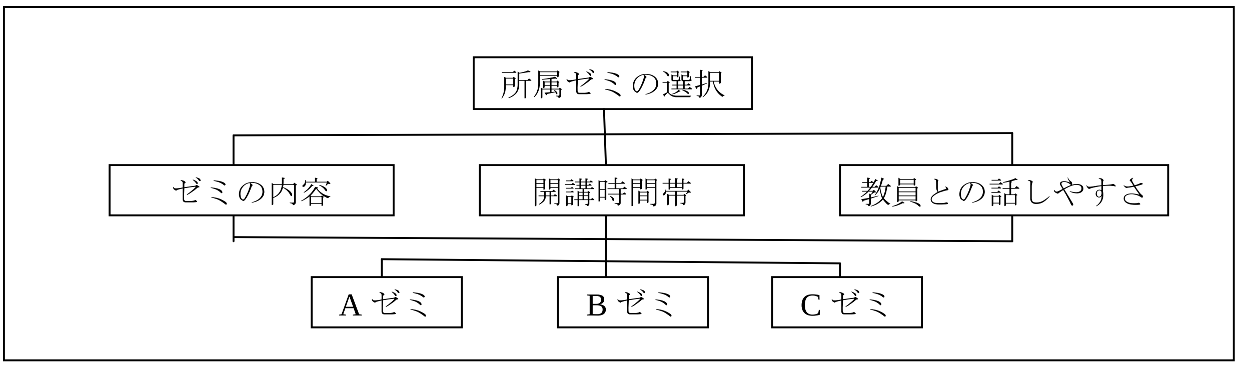


図 1　階層図

次に，総合目的に対する評価基準間，各評価基準に対する代替案間の重み付けを行う。具体的にはそれぞれについて一対比較を行い，固有値法により重要度を計算する。ここではまず評価基準について一対比較を行い，表 1 を得たとする。このとき，固有値法による各項目の重要度は表 2 のようになる。

表 1 評価基準の一対比較表

目的	内容	時間	教員
内容	1	3	5
時間	1/3	1	3
教員	1/5	1/3	1

C.I. = 0.019

表 2 評価基準の重要度

目的	重要度
内容	0.637
時間	0.258
教員	0.105

この結果は，総合目的に対する意思決定者の満足度（重要度）を 100%とするとき，内容，時間，教員の各評価項目がそれぞれ 63.7%，25.8%，10.5%を占めていることを意味する。次に，各評価基準に対する各代替案の重要度を計算する。なおこれ以降は，一対比較表から固有値法により算出される重要度は同じ表中に記入する。さてこのとき表 3 を得たとして説明を進める。

表 3　各評価基準に対する代替案の一対比較表

「ゼミの内容」に関する評価

内容	A	B	C	重要度
A	1	3	5	0.637
B	1/3	1	3	0.258
C	1/5	1/3	1	0.105

C.I. = 0.019

「開講時間帯」に関する評価

時間	A	B	C	重要度
A	1	3	7	0.669
B	1/3	1	3	0.243
C	1/7	1/3	1	0.088

C.I. = 0.004

「教員との話しやすさ」に関する評価

教員	A	B	C	重要度
A	1	5	7	0.740
B	1/5	1	2	0.167
C	1/7	1/2	1	0.094

C.I. = 0.007

最後に表 2 と表 3 で求めた重要度から，行列の計算により各代替案の総合評価を得る。

$$\begin{pmatrix} \text{目的：A の総合評価} \\ \text{目的：B の総合評価} \\ \text{目的：C の総合評価} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{内容：A の重要度} & \text{時間：A の重要度} & \text{教員：A の重要度} \\ \text{内容：B の重要度} & \text{時間：B の重要度} & \text{教員：B の重要度} \\ \text{内容：C の重要度} & \text{時間：C の重要度} & \text{教員：C の重要度} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{内容の重要度} \\ \text{時間の重要度} \\ \text{教員の重要度} \end{pmatrix}$$

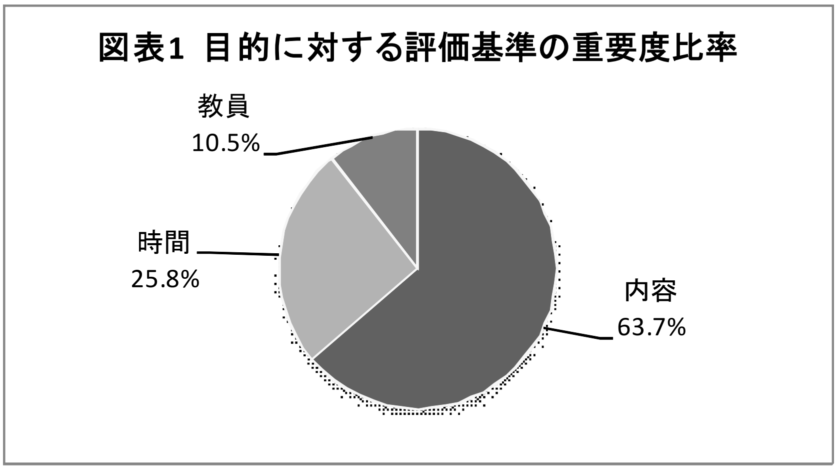
$$= \begin{pmatrix} 0.637 & 0.669 & 0.740 \\ 0.258 & 0.243 & 0.167 \\ 0.105 & 0.088 & 0.094 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.656 \\ 0.245 \\ 0.099 \end{pmatrix}$$

以上より，総合評価，すなわち目的に対する代替案の重要度は以下のようになることがわかる。

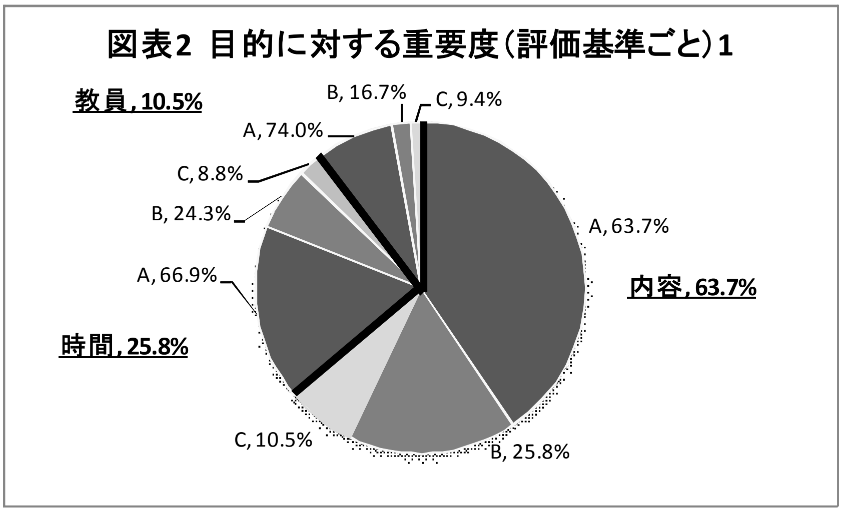
(A の総合評価，B の総合評価，C の総合評価) = (0.656，0.245，0.099)

これより，問題「所属ゼミの選択」に対する AHP による意思決定の結果は，A ゼミが一番お勧めであり，続いて B ゼミ，そして C ゼミである，ということになる。この結果を参考にし，最終的に意思決定者が所属するゼミを決定すればよいことになる。

さてここで本章の主旨であった，配分法としての解釈をみていく。すなわち，各代替案の重要度を算出した後に総合評価を求める計算は，実際には総合目的に対する満足度 100%を配分していくことに他ならないことを, 円グラフを用いて確認していく。まず総合評価の満足度を 100%とするときの評価基準の占める割合は表 2 より図表 1 のように円グラフであらわすことができる。

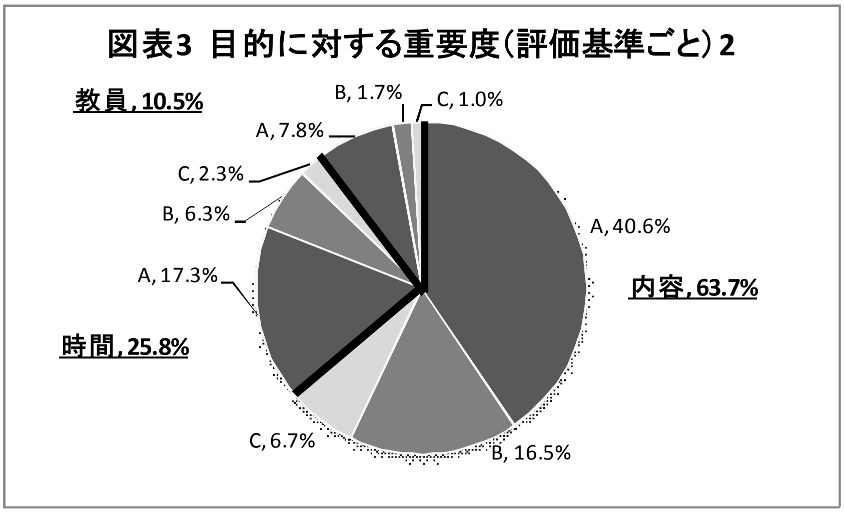


そして表 3 の重要度を図表 1 の該当部分にあてはめることで図表 2 を得る。



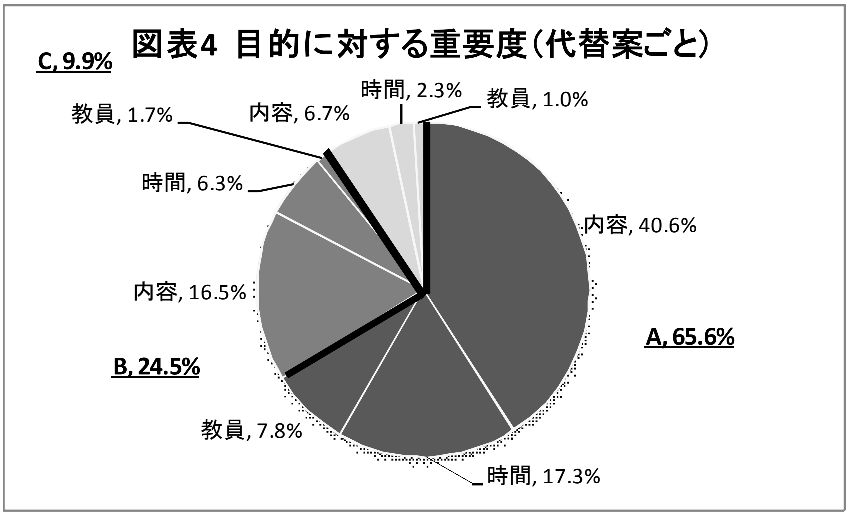
図表 2 で各代替案のとなりに記載している数値は, 対応する評価基準の重要度を 100%としたときの割合である。たとえば，評価基準「内容」に対応する代替案 A の満足度

63.7%は，対応する評価基準「内容」の重要度を 100%とするときに「内容」に占める割合を意味する。そこで改めて，総合目的の満足度を 100%としたときに，円グラフ内の数値が各代替案の占める割合となるように再計算する必要がある。この計算が配分を反映していることになる。そして再計算された数値を図表 2 にあてはめたものが図表 3 となる。



ところで AHP の計算手順において，重要度の統合化のステップで，行列による積の計算を行う部分があった。すぐ上の操作は，そこでの計算において，成分ごとに積を取ることに対応していることがわかる。

このようにして得られた円グラフ，すなわち数値をもとに，代替案ごとに整理しなおした円グラフが図表 4 である。すなわち，評価基準ごとに黒い太線で区切られた円グラフが図表3であり,代替案ごとに黒い太線で区切られた円グラフが図表4である。



ここでも先ほどと同様に，AHP の計算手順における重要度の統合化のステップにおける行列の計算手続きで説明すると，ひとつひとつの成分の積について和をとる操作に対応していることになる。つまり総合評価を求める手順で行列の積を計算しているが，これが図表 2 から図表 4 を一気に求めることに対応していることがかわる。

以上により，AHP により総合目的に対する各代替案の重要度を算出する基本手順は，全ての代替案をあわせたものが総合目的を 100% 満足する（対応する重要度の合計が

100%）と仮定し，それぞれの各代替案がそれを占める割合が総合評価であることがわかる。これは AHP が配分という手法により各代替案の重要度，すなわち総合目的に対する満足度を求めていることに他ならないことがわかる。

そしてこの配分という基本概念をもとに AHP を解釈するならば，Saaty が推奨する正規化，すなわち各一対比較表から項目の重要度を求めるとき，それらの重要度の和が 1 となるように調整することとしている操作の妥当性も了解される。

しかしながら，もう一度上記の解釈を省みるとき，新たに 1 つの問題に気づくことも確かである。すなわち評価基準については，目的を達成するための基準であることから，目的の満足度 100%をそれらに配分することは自然な考え方である。しかしその一方で，代替案の重要度までこの方針を適用することに問題はないだろうかという点である。これは配分という観点から解釈してこそ気づく問題点であるといえる。

たとえば，極端な例ではあるが，提案した代替案が対応する評価基準の観点からはいずれも完全に満足されるものであれば，全ての代替案で総合評価は 1（100%）となるはずである。そしてこの場合は代替案の総合評価の総和は 1 を超えることになる。全ての代替案が実現するときに限り 100% 満足できるとしているようにみえる Saaty による正規化の代替案への適用は，少々現実的ではない側面があると言える。我々はこれを改善する方法を第 5 章で提案する。

３．内部従属法（評価基準間）の解釈

第 2 章では，AHP の基本手順について配分という観点から解釈をつけた。第 3 章と第 4 章では配分という観点から，AHP の拡張といえる内部従属法について確認する。内部従属法は評価基準間に適用する場合と，代替案間に適用する場合に区別されている。そこで前者について第 4 章で，後者について第 5 章で扱うことにする。なお，評価基準間および代替案間の両方に内部従属性がある場合については，これらの章における説明から容易に類推できるので，本論文ではこの場合は割愛する。

以下，第 2 章で扱った例（図 1）を利用して説明する。ここでは評価基準間で従属性がある場合を扱う。図 1 では「ゼミの内容」「開講時間帯」「教員との話しやすさ」を総合目的「所属ゼミの選択」における評価基準として挙げたが，そこではこれらの評価基準はいずれも無関係であると暗黙のうちに仮定していた。たとえば，評価基準「ゼミの内容」は「開講時間帯」が変更になろうとも，その評価には何ら影響を与えないと仮定していたということである。

ところが次のような場合が考えられる。すなわち評価基準「教員との話しやすさ」は「ゼミの内容」に少なからず影響しているというものである。たとえば文理が融合したような学科では，文系分野を研究する教員が担当するゼミと理系分野を研究する教員のゼミがある。このような場合，文系理系という分野に応じてゼミの内容と教員の個性が関連していることもあり得る。このような状況を踏まえると，先ほどの評価基準について，お互いの評価項目から受ける影響を完全に無視できないことになる。このように影響しあう 2 つの評価項目を，AHP では従属関係にあると呼んでいる。こ

の従属関係は，項目を点，従属関係を有向線分とするグラフとして表現することができる。たとえば今の場合は図 2 のようになるとする。

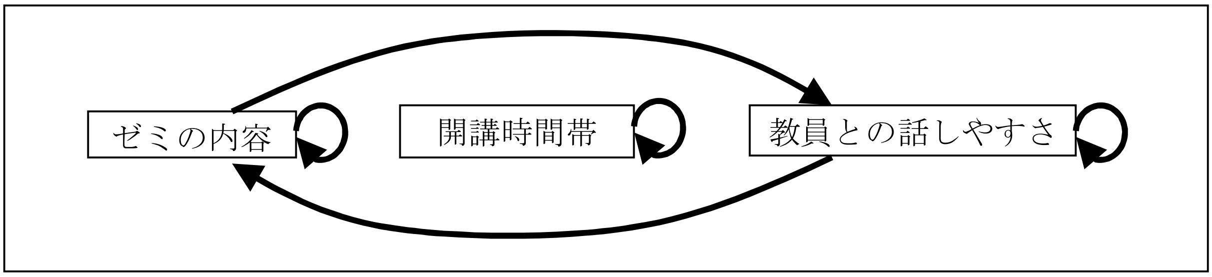


図 2　評価基準間の従属関係

図 2 では評価基準「ゼミの内容」と「教員との話しやすさ」は互いに従属関係にあることを示している。評価基準「教員との話しやすさ」から「ゼミの内容」に伸びるや矢印は,「ゼミの内容」の重要度の一部分に「教員との話しやすさ」の重要度として評価すべき重要度が含まれていることを意味する。なお，各評価基準はそれ自身に従属関係があるとして常に扱われる。実際, 自分自身の重要度の大半を占める重要度は, それ自身の評価から得られるものであることは間違いない。

さてここで，従属関係にある評価基準間において互いに内蔵している重要度を明確に把握するために一対比較を行う。今の場合は表 4 を得たとする。ここでも得られた一対比較表から固有値法により算出される重要度は同じ表中に記述している。

表 4 評価基準間の従属度算出のための一対比較表

ゼミの内容に関する従属性

内容	内容	教員	重要度
内容	1	5	0.833
教員	1/5	1	0.167

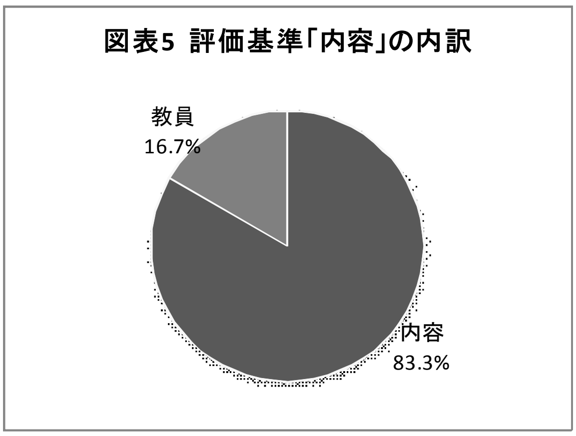
C.I. = 0

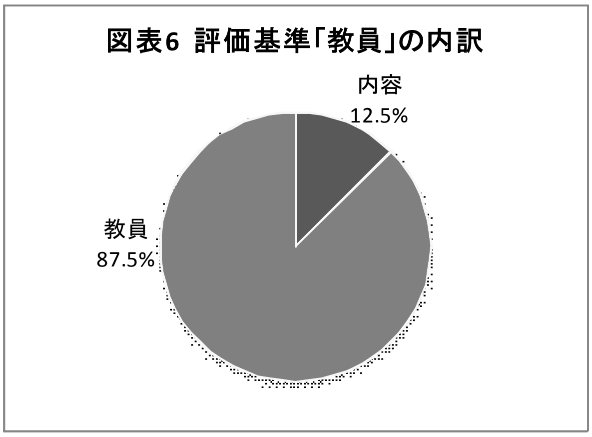
教員に関する従属性

教員	内容	教員	重要度
内容	1	1/7	0.125
教員	7	1	0.875

C.I. = 0

表 4 より「内容」の重要度のうち，83.3%がそれ自身により評価された重要度であるが，残りの 16.7%が「教員」の重要度であることがわかる。これを円グラフで表すと図表 5，図表 6 になる。





これらの割合は対応する評価基準の重要度を 100%とするとき数値であるから，総合目的の重要度を 100% とした場合の各数値に換算する必要がある。換算のための計算

は，たとえば以下のような行列の計算により求められる。

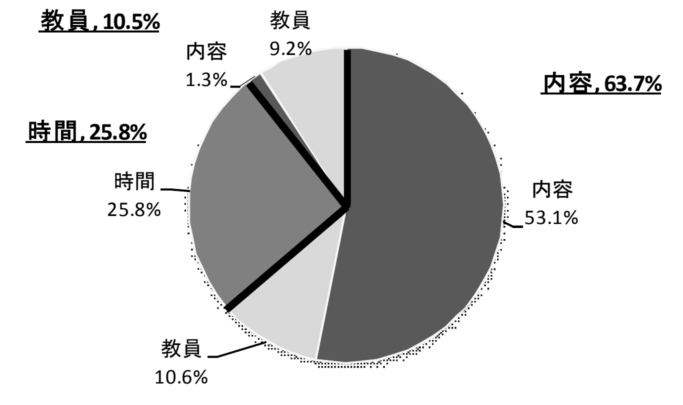
$$\begin{pmatrix} 目的：内容の独立重要度 \\ 目的：時間の独立重要度 \\ 目的：教員の独立重要度 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 内：内の重要度 & 時：内の重要度 & 教：内の重要度 \\ 内：時の重要度 & 時：時の重要度 & 教：時の重要度 \\ 内：教の重要度 & 時：教の重要度 & 教：教の重要度 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 目：内の従属重要度 \\ 目：時の従属重要度 \\ 目：教の従属重要度 \end{pmatrix}$$

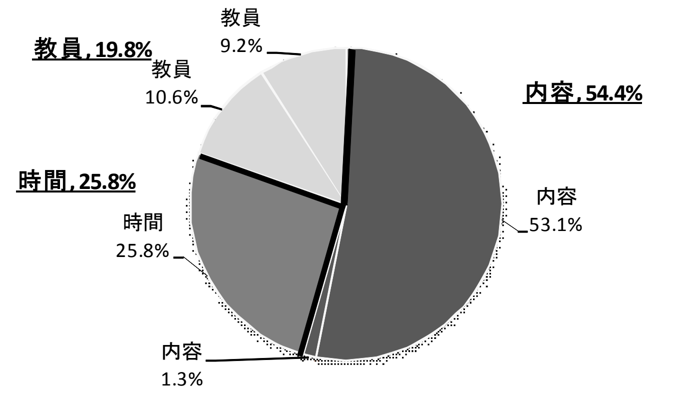
$$= \begin{pmatrix} 0.833 & 0 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.167 & 0 & 0.875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.544 \\ 0.258 \\ 0.198 \end{pmatrix}$$

式中の「内」は「内容」，「時」は「時間」，「教」は「教員」を意味している。これにより得られた数値をもとに，評価基準の重要度を円グラフであらわすと,図表 1 より図表 7 が得られる。さらに図表 7 を評価基準ごとに整理することで図表 8 を得る。図表 8 における評価基準の重要度は，評価基準間の従属性を完全に取り除いた，本質的な評価基準に変換されていることを注意する。

図表7 目的に対する評価基準の内訳1



図表8 目的に対する評価基準の内訳2



さて以上のことから評価基準が独立していると仮定した場合の重要度が計算でき

たので，独立した評価基準として重要度を算出する従来の AHP と同様の方法で，これ以下の計算は行うことができる。以上で評価基準間に適用する内部従属法の配分の視点からの解釈は完了した。

最後に，内部従属法を用いた場合の最後結果を計算する。まず総合目的の満足度を100%とした場合の評価基準の重要度は，独立として計算した場合は以下の通りになったことを注意する。

(内容の独重要度，時間の独重要度，教員の独重要度) = (0.544，0.258，0.198)

ここで独重要度は「独立の重要度」を意味するものとする。したがって以下の計算により，各代替案の総合評価が算出される。

$$\begin{pmatrix} \text{目的：A の総合評価} \\ \text{目的：B の総合評価} \\ \text{目的：C の総合評価} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{内容：A の重要度} & \text{時間：A の重要度} & \text{教員：A の重要度} \\ \text{内容：B の重要度} & \text{時間：B の重要度} & \text{教員：B の重要度} \\ \text{内容：C の重要度} & \text{時間：C の重要度} & \text{教員：C の重要度} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{内容の独重要度} \\ \text{時間の独重要度} \\ \text{教員の独重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.637 & 0.669 & 0.740 \\ 0.258 & 0.243 & 0.167 \\ 0.105 & 0.088 & 0.094 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.544 \\ 0.258 \\ 0.198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.666 \\ 0.236 \\ 0.098 \end{pmatrix}$$

以上より，評価基準間の従属関係を考慮した AHP による最終結果として次を得る。

(A の総合評価，B の総合評価，C の総合評価) = (0.666，0.236，0.098)

評価基準間の従属性を求めるための一対比較表よりわかるように，今回の場合は評価基準間にほとんど従属性なかったため，第 2 章で算出した総合評価とほぼ同じ数値になっている。すなわちこのような場合は，評価基準が互いに完全に独立していなくても，従来の AHP を適用すれば妥当な結果が得られることがわかる。

従属関係がどの程度の場合にこの内部従属法を適用すべきか検討する価値はある。

４．内部従属法（代替案間）の解釈

本章では代替案間に従属関係がある場合について配分の観点から解釈をつける。ところで，評価基準間の従属性の場合は，容易に配分の観点からの妥当性を確認することができるが，代替案の場合は少し複雑になっている。たとえば[4]では評価基準を増やす観点から説明している。

以下，第 2 章で扱った例（図 1）を利用して説明する。ここでは代替案間で従属関係がある場合を扱う。図 1 では「A ゼミ」「B ゼミ」「C ゼミ」を総合目的「所属ゼミの選択」における代替案として挙げた。第 2 章で扱った AHP では，暗黙のうちに，これらの代替案はいずれも互いの影響を受けないと仮定していた。たとえば，評価基準

「ゼミの内容」について代替案「A ゼミ」を選択すれば「B ゼミ」から受ける恩恵は全くないものと仮定している。

ところでここでも次のような場合が考えられる。すなわち代替案「A ゼミ」を選択しても,「B ゼミ」の指導教員からそのゼミの内容について教授してもらうことができるという場合である。もちろん，所属ゼミ生でなければ指導してもらえるといっても限度がありそうだが「B ゼミ」の教員は喜んで指導してくれる場合を考慮しても良さそうである。もちろんゼミの内容によっては，じっくり取り組まないと全く理解できないことも考えられ，その場合の恩恵を全くないという従来型になるであろう。恩恵を全く受けない状況であれば，それらの代替案は独立関係にあるということになる。

今回の例では代替案間に図 3 のような従属関係が存在するとして説明を行う。すなわち評価基準「ゼミの内容」と「教員との話しやすさ」について，代替案間の一部に従属関係があるとする。

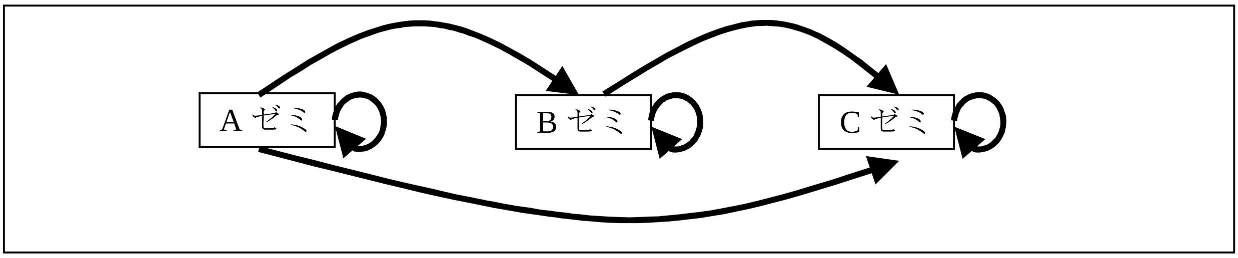


図 3　評価基準「内容」についての代替案間の従属関係

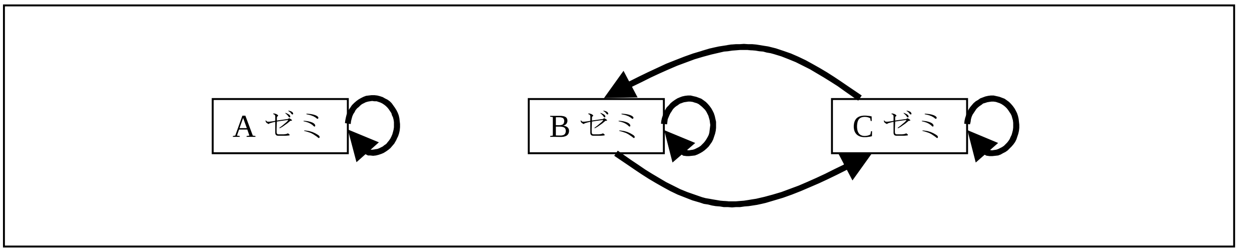


図 4　評価基準「教員」についての代替案間の従属関係

たとえば図 3 では，代替案「C ゼミ」は評価基準「ゼミの内容」についてすべてのゼミからの影響を受けていることになる。また反対に,「C ゼミ」は他のゼミに影響を与えていないことも分かる。さらに評価基準「教員との話しやすさ」では,「B ゼミ」の指導教員と「C ゼミ」の指導教員が親しくしていることを想定し，いずれのゼミを選択したとしても同様の影響を受けるとしている。

なお今回は，評価基準「開講時間帯」については代替案間に従属関係は無いものとした。各代替案はそれ自身に従属関係があるとして扱うのは，評価基準間における内部従属法と同様である。

さてここで，従属関係にある代替案間において互いに内蔵している重要度を得るために一対比較を行う。今の場合は表 5 が得られたとする。ここでも得られた一対比較表から得られる固有値法による重要度は同じ表中に記述している。表 6 は評価基準「教員」に関する「B ゼミ」と「C ゼミ」の重要度の内訳である。

表 5 より「内容」に関する代替案「B ゼミ」の重要度のうち 12.5%が「A ゼミ」の

重要度に依存していることがわかる。これは意思決定者が「B ゼミ」を選択したとしても，「A ゼミ」からも多少であるが恩恵が受けられることを意味している。

表 5 「内容」に関する代替案準間の従属度算出のための一対比較表 1

B	A	B	重要度
A	1	1/7	0.125
B	7	1	0.875

C.I. = 0

C	A	B	C	重要度
A	1	1/3	1/7	0.081
B	3	1	1/5	0.188
C	7	5	1	0.731

C.I. = 0.032

表 6 「教員」に関する代替案間の従属度算出のための一対比較表 2

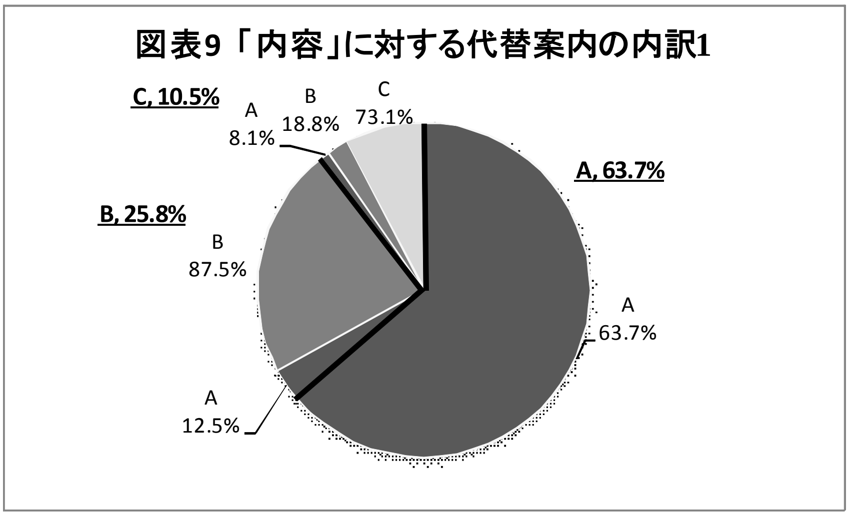
B	B	C	重要度
B	1	3	0.75
C	1/3	1	0.25

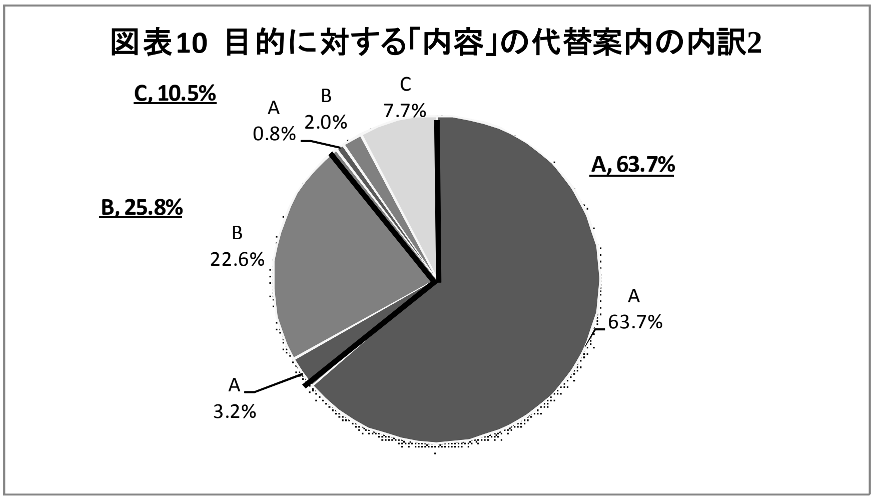
C.I. = 0

C	B	C	重要度
B	1	1/3	0.25
C	3	1	0.75

C.I. = 0

さてここで，まず表 5 から内部従属法の手順に従い図表 9 から図表 11 を作成する。

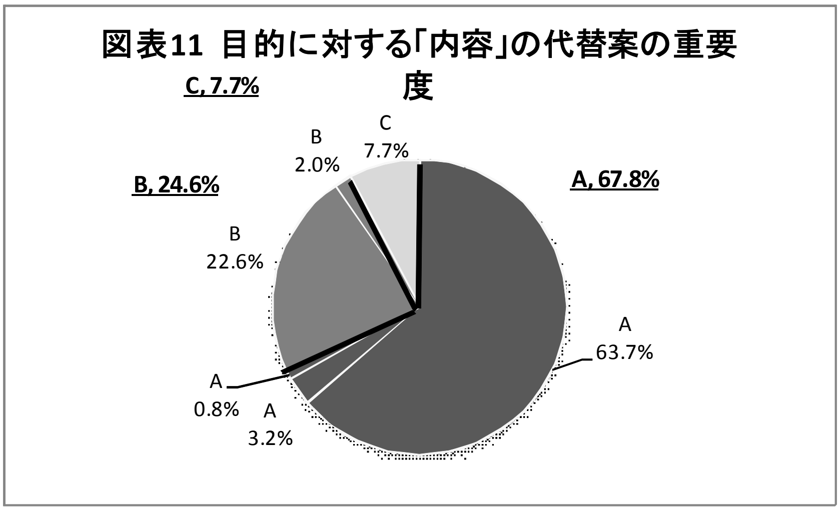




図表 9 の%は，便宜上 2 つの意味で使用していることに注意が必要である。図表 9 は評価基準「内容」に対する各代替案の重要度が示され，さらに各代替案内の代替案間

の重要度が示されている。たとえば代替案「C ゼミ」は評価基準「内容」について 10.5%の重要度を配分されているが，そのうちの 8.1%が「A ゼミ」の取り分，18.8%が「B ゼミ」の取り分，残りの 73.1%が実質的に「C ゼミ」の取り分であることを表している。そこで図表 9 における%を統一することで表 10 を得る。図表 10 における%はすべて目的を 100%としたときの割合となっている。

最後に，図表 10 を代替案ごとに整理することで図表 11 を得る。



図表11 目的に対する「内容」の代替案の重要度

図表 11 にある代替案ごとの重要度の総和は，たとえば以下のように行列の計算により求められる。

$$\begin{pmatrix} \text{内容：A の独立重要度} \\ \text{内容：B の独立重要度} \\ \text{内容：C の独立重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{A：A の重要度} & \text{B：A の重要度} & \text{C：A の重要度} \\ \text{A：B の重要度} & \text{B：B の重要度} & \text{C：B の重要度} \\ \text{A：C の重要度} & \text{B：C の重要度} & \text{C：C の重要度} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{内容：A の従属重要度} \\ \text{内容：B の従属重要度} \\ \text{内容：C の従属重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.125 & 0.081 \\ 0 & 0.875 & 0.188 \\ 0 & 0 & 0.731 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.678 \\ 0.246 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

同様にして，表 6 から評価基準「教員」に関する各代替案の実質的な重要度が求まる。

$$\begin{pmatrix} \text{教員：A の独立重要度} \\ \text{教員：B の独立重要度} \\ \text{教員：C の独立重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{A：A の重要度} & \text{B：A の重要度} & \text{C：A の重要度} \\ \text{A：B の重要度} & \text{B：B の重要度} & \text{C：B の重要度} \\ \text{A：C の重要度} & \text{B：C の重要度} & \text{C：C の重要度} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{教員：A の従属重要度} \\ \text{教員：B の従属重要度} \\ \text{教員：C の従属重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.750 & 0.250 \\ 0 & 0.250 & 0.750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.740 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.740 \\ 0.148 \\ 0.112 \end{pmatrix}$$

ここでは円グラフを割愛し，行列による計算だけ掲載する。以上の議論から，代替案間の従属関係を取り除いた重要度が得られたことになる。結果は表 7 となる。

表 7　代替案の重要度（従属関係の処理済み）

	内容	時間	教員
A	0.678	0.669	0.740
B	0.246	0.243	0.148
C	0.077	0.088	0.112

最後に，内部従属法を用いた場合の最終結果を計算する。表 7 と第 2 章で求めた評価基準の重要度（表 2）から総合評価を計算すると，以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \text{目的：A の総合評価} \\ \text{目的：B の総合評価} \\ \text{目的：C の総合評価} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{内容：A の独重要度} & \text{時間：A の独重要度} & \text{教員：A の独重要度} \\ \text{内容：B の独重要度} & \text{時間：B の独重要度} & \text{教員：B の独重要度} \\ \text{内容：C の独重要度} & \text{時間：C の独重要度} & \text{教員：C の独重要度} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{内容の重要度} \\ \text{時間の重要度} \\ \text{教員の重要度} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.678 & 0.669 & 0.740 \\ 0.246 & 0.243 & 0.148 \\ 0.077 & 0.088 & 0.112 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.637 \\ 0.258 \\ 0.105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.682 \\ 0.235 \\ 0.083 \end{pmatrix}$$

以上より，代替案間の従属関係を考慮した AHP による最終結果として次を得る。

(A の総合評価，B の総合評価，C の総合評価) = (0.682，0.235，0.083)

代替案間の従属関係を考慮しなかった第 2 章の結果と比べると，代替案間の従属関係を表す図 3 と図 4 において，入ってくる矢印の数が多かった代替案 C ゼミの評価が下がり，A ゼミの評価がその分上がっていることが読み取れる。しかしこの程度の差では，順位への影響はほとんどないこともわかる。ここでも，見逃すことができない従属関係の程度の目安があると便利になるといえる。

第 3 章と第 4 章では配分の視点から内部従属法を解釈した。結果として，内部従属法は配分の観点に適合していることが確認できた。

５．絶対評価値が存在した場合のＡＨＰの解釈

本章では，改めて第 2 章で解説した正規化の妥当性について検討する。AHP は絶対的な基準値をもたない評価基準や代替案について，一対比較を繰り返し行うことで定量化して評価する合理的な意思決定法である。その一方で実用面からは AHP をより利

用しやすくするための工夫がなされている。ただこの工夫においては，どの程度の逸脱までが AHP の手法として許されるかを慎重に検討したいところである。そのひとつの成功例が Saaty による絶対評価法である[4]。そこでは一対比較を利用しながらも意思決定者の感性に合わせた尺度を導入することで，AHP の一対比較の煩雑さを回避することに成功している。

本章ではひとつの逸脱行為として，絶対的な基準値を持つ場合を検討することで，配分法としての AHP の拡張を試みる。このようにして得られる絶対的な値を本論文では絶対評価値と呼ぶことにする（[5]で木下は出来高と呼んでいる）。

さて総合目的 G に対して，評価基準 A，B，C，代替案 a，b，c をもつ階層構造を考える（図 5）。このとき，次のような重要度の配分が得られたとする。

(A の重要度，B の重要度，C の重要度) = (p，q，r)

簡単のためにこれを次のように記載することにする。

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : \mathrm{C} = p : q : r, \quad p + q + r = 1.$$

そして同様の表記法により，各代替案の重要度が次のように得られたとする。

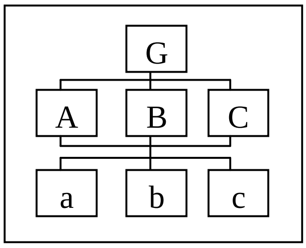


図 5　階層構造

A について　$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = a_\mathrm{A} : b_\mathrm{A} : c_\mathrm{A}, \quad a_\mathrm{A} + b_\mathrm{A} + c_\mathrm{A} = 1,$

B について　$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = a_\mathrm{B} : b_\mathrm{B} : c_\mathrm{B}, \quad a_\mathrm{B} + b_\mathrm{B} + c_\mathrm{B} = 1,$

C について　$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = a_\mathrm{C} : b_\mathrm{C} : c_\mathrm{C}, \quad a_\mathrm{C} + b_\mathrm{C} + c_\mathrm{C} = 1.$

もしここで各評価基準に絶対評価値（絶対基準値でも同様）が存在すると仮定すると，上記の式に応じて，次の 3 式が得られる。

A について　$\mathrm{a} = a_\mathrm{A} x, \quad \mathrm{b} = b_\mathrm{A} x, \quad \mathrm{c} = c_\mathrm{A} x \quad \text{for some } x,$

B について　$\mathrm{a} = a_\mathrm{B} y, \quad \mathrm{b} = b_\mathrm{B} y, \quad \mathrm{c} = c_\mathrm{B} y \quad \text{for some } y,$

C について　$\mathrm{a} = a_\mathrm{C} z, \quad \mathrm{b} = b_\mathrm{C} z, \quad \mathrm{c} = c_\mathrm{C} z \quad \text{for some } z.$

そして, これらと最初に求めた評価基準の重要度の比を組み合わせることで次を得る。

a の総合評価　$\mathrm{a} = p\, a_\mathrm{A}\, x + q\, a_\mathrm{B}\, y + r\, a_\mathrm{C}\, z,$

b の総合評価　$\mathrm{b} = p\, b_\mathrm{A}\, x + q\, b_\mathrm{B}\, y + r\, b_\mathrm{C}\, z,$

c の総合評価　$\mathrm{c} = p\, c_\mathrm{A}\, x + q\, c_\mathrm{B}\, y + r\, c_\mathrm{C}\, z.$

これらはまさしく代替案の絶対総合評価値といえる。なおこれらの総和は $px+qy+rz$ になっている。そこで改めてこれらを比の形で表してみる。

$$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = (p\, a_\mathrm{A}\, x + q\, a_\mathrm{B}\, y + r\, a_\mathrm{C}\, z) : (p\, b_\mathrm{A}\, x + q\, b_\mathrm{B}\, y + r\, b_\mathrm{C}\, z) : (p\, c_\mathrm{A}\, x + q\, c_\mathrm{B}\, y + r\, c_\mathrm{C}\, z) \qquad (1)$$

一方で，従来の AHP では次式を得ることになることがすぐにわかる。

$$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = (p\, a_\mathrm{A} + q\, a_\mathrm{B} + r\, a_\mathrm{C}) : (p\, b_\mathrm{A} + q\, b_\mathrm{B} + r\, b_\mathrm{C}) : (p\, c_\mathrm{A} + q\, c_\mathrm{B} + r\, c_\mathrm{C})$$

ただしここでは $p + q + r = 1$, $a_\mathrm{A} + b_\mathrm{A} + c_\mathrm{A} = 1$, $a_\mathrm{B} + b_\mathrm{B} + c_\mathrm{B} = 1$, $a_\mathrm{C} + b_\mathrm{C} + c_\mathrm{C} = 1$ である。そこでこれらの 2 式が一般的に一致する必要十分条件として $x = y = z$ を得る。実際 $x = y = z = k$ とおけば次が容易にわかる。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} \\
&= (p\, a_\mathrm{A}\, k + q\, a_\mathrm{B}\, k + r\, a_\mathrm{C}\, k) : (p\, b_\mathrm{A}\, k + q\, b_\mathrm{B}\, k + r\, b_\mathrm{C}\, k) : (p\, c_\mathrm{A}\, k + q\, c_\mathrm{B}\, k + r\, c_\mathrm{C}\, k) \\
&= (p\, a_\mathrm{A} + q\, a_\mathrm{B} + r\, a_\mathrm{C})\, k : (p\, b_\mathrm{A} + q\, b_\mathrm{B} + r\, b_\mathrm{C})\, k : (p\, c_\mathrm{A} + q\, c_\mathrm{B} + r\, c_\mathrm{C})\, k \\
&= (p\, a_\mathrm{A} + q\, a_\mathrm{B} + r\, a_\mathrm{C}) : (p\, b_\mathrm{A} + q\, b_\mathrm{B} + r\, b_\mathrm{C}) : (p\, c_\mathrm{A} + q\, c_\mathrm{B} + r\, c_\mathrm{C}).
\end{aligned}$$

逆は各項の一次独立性より証明できる（特別な場合は $x = y = z$ でなくても成立する)。したがって，絶対評価値が存在する場合は，一般には従来型の AHP による結果とここでの結果は一致しないことが分かる。もし $x = y = z$ が起こるなら，評価基準 A，B，C は同じ尺度で測ることができる（線形順序を持っている）ことになり，そもそも AHP を活用する意味が半減することにもなる。

さてここで，意思決定の場面でこれら x，y，z が何を意味するかについて簡単に検討してみる。もし x，y，z が意味するものを得ることができれば，一対比較を繰り返し利用する AHP の良さを生かしながら，絶対評価値を持つ評価基準についても，AHP の考え方を適用できることになる。

x，y，z は各評価基準を評価するための絶対基準があると仮定した場合に，一対比較により得られた重要度の比を絶対評価値に調整するための数値であった。ところが AHP で最終的に必要な代替案の総合評価は，総合目的に対する代替案間の重要度の割合であるから，意思決定者がここで必要とするのは，x と y と z の比であることがわかる。そこで x と y と z に対して次のような数値 x_0，y_0，z_0 が得られたと仮定する。

$x : y : z = x_0 : y_0 : z_0.$

このときある実数 t が存在して次式を得ることになる。

$x = x_0\, t, \quad y = y_0\, t, \quad z = z_0\, t.$

これを式 (1) に代入すると次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{a : b : c}\\
&= (p\, a_A x + q\, a_B\, y + r\, a_C\, z) : (p\, b_A\, x + q\, b_B\, y + r\, b_C\, z) : (p\, c_A\, x + q\, c_B\, y + r\, c_C\, z)\\
&= (p\, a_A x_0 t + q\, a_B\, y_0 t + r\, a_C\, z_0 t) : (p\, b_A\, x_0 t + q\, b_B\, y_0 t + r\, b_C\, z_0 t) : (p\, c_A\, x_0 t + q\, c_B\, y_0 t + r\, c_C\, z_0 t)\\
&= (p\, a_A x_0 + q\, a_B\, y_0 + r\, a_C\, z_0)\, t : (p\, b_A\, x_0 + q\, b_B\, y_0 + r\, b_C\, z_0)\, t : (p\, c_A\, x_0 + q\, c_B\, y_0 + r\, c_C\, z_0)\, t\\
&= (p\, a_A x_0 + q\, a_B\, y_0 + r\, a_C\, z_0) : (p\, b_A\, x_0 + q\, b_B\, y_0 + r\, b_C\, z_0) : (p\, c_A\, x_0 + q\, c_B\, y_0 + r\, c_C\, z_0)
\end{aligned}
$$

したがって，絶対評価値（あるいは絶対基準値）が存在しない，あるいはわからない場合でも，x と y と z の比さえ得られれば意思決定者の目的は十分果たされることになる。そして具体的に $a_A x_0 : a_B y_0 : a_C z_0$ $(a_A x_0 + a_B y_0 + a_C z_0 = 1)$ が得られれば従来の AHP と同様に調整されることが分かる。そこで第 1 章で紹介した従来の AHP の手順に以下を加える方法を提案する。

(SETP 2）4. ある代替案について各評価基準の重要度の比を計算する。この代替案としては，総合目的からみたとき一番大きい重要度を持つ評価基準について一番大きい重要度を持つ代替案を選ぶことを推奨する。これにより上記の説明でいえば $a_A x_0 : a_B y_0 : a_C z_0$ $(a_A x_0 + a_B y_0 + a_C z_0 = 1)$ を得ることになる。

5. 4 で得た比を用いて 2 で得た各評価基準に関する各代替案の重要度を調整する。上記の説明でいえば 4 で求めた値 $a_A x_0$ を利用し，A に関する各代替案の重要度として $a_A : b_A : c_A$ から $a_A x_0 : b_A x_0 : c_A x_0$ を算出する。以後これを各代替案の各評価基準に関する重要度を a_A, b_A, c_A と読み替える。ここで $a_A + b_A + c_A = 1$ 等の関係は解消される。

以上の手続きを加えることで，配分の視点から Saaty が提案する AHP を拡張とする

ことができる。すぐにわかるように，代替案の評価について正規化は不要である。この方法は各代替案固有の評価値を算出しているので，代替案間の逆転現象は起こらないこともわかる。数値による具体例は紙面の関係で割愛する。

６．おわりに

本論文では AHP の配分法を応用した新しい総合化を試みた（第 5 章）。そのために本論文の多くを割いて，AHP の配分法としての側面を解説した。

代替案を追加・削除することによる代替案間の順位逆転現象の発見により，いろいろな正規化が提案されてきた[8]。しかしいずれかに基準（あるいは基準値）を設定するならば，もはや一対比較表を作成する必要はないともいえる。もし基準を設定するのであれば，たとえば木下・中西による支配型 AHP[5]のように，その基準をもとに他の項目との比率を求めれば良いことになる。

本論文で提案する方法はあくまでも基準を設けないことに重きをおいた手法になっている。この意味で AHP の精神を大きく逸脱していない。支配型 AHP との違いは，支配型 AHP では評価単価比一定の法則に基づいて評価基準による代替案の評価を行うのに対し，本論文で提案した方法は直接評価基準により代替案を評価しているところである。これらの使い分けについては，今後の課題としたい。

参考文献

[1] Belton, V. and Gear, A.E. (1983) On a shortcoming of Saaty’s method of analytic hierarchies, Omega, 11, 228-230.

[2] Iida, Y. (2009) The number of circular triads in a pairwise comparison matrix and a consistency test in AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 52, 174–185.

[3] Iida, Y. (2009) Ordinality consistency test about items and notation of a pairwise comparison matrix in AHP, Proceedings in the 10th International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, the University of Pittsburgh.

[4] 木下栄蔵 (2000) “入門 AHP 決断と合意形成のテクニック”，日科技連出版社.

[5] 木下栄蔵 (2000) “AHP の理論と実際”，日科技連出版社.

[6] Saaty, T.L. (1980) “*The Analytic Hierarchy Process*”, McGraw-Hill, New York.

[7] 刀根薫 (1986) “ゲーム感覚意思決定法 AHP 入門”，日科技連出版社.

[8] Wedley, W.C. (2009) Issues in AHP/ANP: Linking and aggregating relative ratio scales, Proceedings of the Japanese Symposium on the Analytic Hierarchy Process 2009, 17-37.

（諏訪東京理科大学 経営情報学部 准教授
信州大学全学教育機構 非常勤講師）

2010 年 1 月 8 日受理　2010 年 1 月 31 日採録決定