AHP における一対比較表の表記法に関する提案

飯 田　洋 市

1．はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は，1970 年代にピッツバーグ大学の Saaty 教授により提案され，現在までに多くの適用事例を持つ意思決定法である[9]。この意思決定法は，意思決定の段階で，心理学や官能検査で利用される一対比較を利用することで，意思決定者の直観や経験を取り入れることができることで知られている。

AHP による意思決定は，次のような手順で進められる。まず，解決したい問題を，「最終目標」「評価基準」「代替案」の関係でとらえて，階層構造を作り上げる（図 1）。

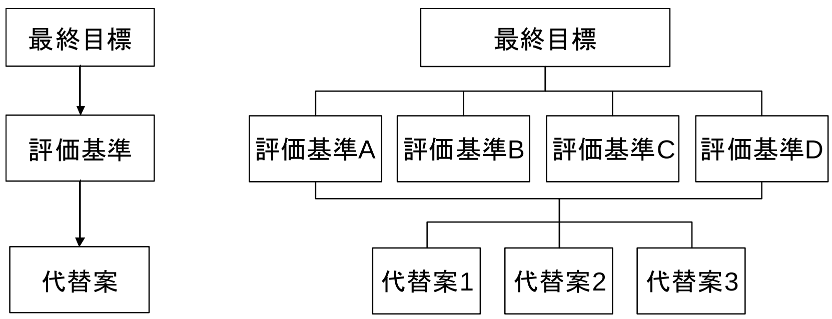

図 1　AHP の階層構造

次に，最終目標からみた各評価基準の重要度，またそれぞれの評価基準からみた各代替案の重要度を算出する。ここで一対比較が利用される。最後に，得られた全ての重要度を利用して，最終目標からみた各代替案の評価（総合評価）を算出する。

そしてこれらを AHP の基本手順とし，たとえば「評価基準」や「代替案」に関する従属性を解消する内部従属法や外部従属法，一対比較する対象の個数が多い場合の絶対評価法などが提案されている。ただいずれの場合も，AHP の特徴として，意思決定者の直観や経験による一対比較が繰り返し利用されることが挙げられる。本論文では，この一対比較を表にまとめた一対比較表に関する提案を行う。

ところで一対比較を利用した順位付けの問題は古くから研究されている。たとえば Kendall と Babington Smith は（引き分けを含まない）優劣だけに着目した一対比較を利用する場合，一対比較表の中に含まれる一巡三角形の個数について研究を行い，一対比較した対象が一次元的に順位付けできるとみなせる条件を検討している[3, 4]。この方法は現在では一意性の係数と一意性の検定として官能検査で利用されている[7]。

AHP でも評価基準や代替案を一次元的に順位付けすることを目的に一対比較を利用している。そこで，一対比較表を作成した段階で，それに基づいて対象を一次元的に順位付けして良いか検定することは有用であると考えられる。著者は[1, 2]において，AHP の一対比較表に，この一意性の検定を適用する方法（順序整合度検定）を提案した。本論文の第 2 章で，この順序整合度検定について説明する。

また第 3 章で，この検定を支援すると考えられる，各対象の順位に関するおおよその情報を与える一対比較表の表記法を新たに提案する。本論文で提案する表記法を採用すれば，得られた一対比較表に基づいて対象が一次元的に順位付けして問題ないことが示された場合，当初得られる対象の順位と，幾何平均法や固有値法により得られる対象の順位の相関関係を簡単に知ることもできる。このような関係がわかることにより，意思決定の支援としての AHP の有効性は増すものと考える。ただしここでの表記法は，表記の一意性に関して改善の余地がある。これについては，今後の課題として第 4 章でまとめる。

本論文で検討する AHP は，意思決定者が個人であり，直観や経験による一対比較を行う場合を対象としている。また得られる一対比較表は完全情報である場合に限定している。AHP はスポーツの勝敗表にもとづく順位付けにも利用されることがある。集団意思決定の場合と含めて，これらは本論文の対象外である。また本論文では，一対比較する対象の個数 n は 3 から 9 までを範囲としている。AHP で一対比較を行う場合の対象の限界数が 9 とされていることから，この範囲で十分意味があると考える[9]。なお n が 9 を超える場合の順序整合度検定の適用法については[2]を参照のこと。

２．官能検査を応用した一対比較表に対する順序整合度検定

官能検査の一意性の検定を応用した AHP の一対比較表に対する順序整合度検定について[2]に基づいて説明する。まず O_i（$1 \leqq i \leqq n$）を対象とする。ここでの対象とは，評価基準あるいは代替案を意味する。AHP の一対比較では O_i と O_j を比較する場合，表 1 の尺度を利用する。表 1 からわかるように，AHP の一対比較では比例尺度が利用され，しかも 1 から 9 までの整数及びその逆数が利用される。

表 1　AHP における一対比較の尺度表

定義	一対比較値
O_i と O_j が同じぐらい重要（equal importance）	$a_{ij} = 1$
O_i が O_j よりやや重要（moderate importance）	$a_{ij} = 3$
O_i が O_j よりかなり重要（strong importance）	$a_{ij} = 5$
O_i が O_j より非常に重要（very strong importance）	$a_{ij} = 7$
O_i が O_j より極めて重要（extreme importance）	$a_{ij} = 9$
$a_{ij} = 2$，4，6，8 は上の 2 つの中間の値とする。	
$a_{ii} = 1$，$a_{ji} = 1／a_{ij}$	

さて表 1 において，a_{ij} >1 の場合 O_i は O_j より優れていると考え，同様に，a_{ij} <1 の場合 O_i は O_j より劣っていると考えることができる。これによりこの比例尺度を順位尺度とみなすことができ,対象の一次元的な順位付けの可能性を検討することができる。

さてここで a_{ij} >1 の場合，$O_i \to O_j$ と記述することにすると，$O_i \to O_j$，$O_j \to O_k$，$O_k \to O_i$（$i \neq j$，$j \neq k$，$k \neq i$）のとき，対象 O_i，O_j，O_k 間では一次元的な順序付けが出来ないことが容易にわかる。このような関係を持つ 3 つの対象の組を一巡三角形と呼ぶ。一般に複数の対象間において循環関係が定義される（一巡多角形と呼ぶ)。たとえば一巡五角形 $O_1 \to O_2 \to O_3 \to O_4 \to O_5 \to O_1$ がある。しかし，いずれも構造的に一巡三角形を含み，これが基本になっていることが知られている。このことから，対象の循環関係を研究する場合，一巡三角形に注意を払うことが基本となる。

ところで，すべての対象が一次元的に順序付けられるとき，明らかに一巡三角形は存在しないことがわかる。この逆も成り立つ。そこで対象が一次元的に順序付けできるならば一対比較表に一巡三角形が全く含まれないはずであり，この状況が順位付けにおいて一対比較表に求められることになる。ただし人間が判断する場合，勘違いなどの間違いが存在するので，一対比較表に一巡三角形が含まれていたとしても，その個数が少ない場合は一次元的に順位付けされると考えることができる。実際，一対比較する回数が増えると誤判断は増える。そこで一対比較表に含まれる一巡三角形の個数を調べることで，対象を一次元的に順位付けして良いかを検定することになる。

さて Kendall と Babington Smith の研究[4]では，引き分け（同じぐらい重要）を許さない優劣だけによる一対比較から得られる一対比較表のみを対象としている。一方 AHP の一対比較では,「同じぐらい重要」という評価を認めており，異なる対象間の評価に $a_{ij} = 1$ が存在する場合がある。そこで Kendall らの検定法を AHP の一対比較表に適用する場合，引き分けをどのように扱うかが問題となる。[2]では一つの方法として，一対比較表から異なる対象間の引き分けを全て取り除く方法を提案している。

以下，順序整合度検定の手順を二段階に分けて説明する。まず I で，一対比較表が異なる対象間の引き分けを含む場合について，その引き分けを取り除く方法を説明する。次にⅡで，異なる対象間の引き分けを含まない一対比較表に対する順序整合度検定の手順を説明する。

<u>AHP における一対比較表に対する順序整合度検定</u>

n 個の対象 O_i ($1 \leqq i \leqq n$) に対して得られた一対比較行列を $A = (a_{ij})$ とする。A が異なる対象間で引き分け（$a_{ij} = 1$）を含む場合は，まず I より引き分けを含まない一対比較行列を作成し，これにⅡを適用する。このような引き分けを含まない場合はⅡより検定を行う。

Ⅰ. 異なる対象間の引き分けを含む場合（$a_{st} = a_{ts} = 1$ ($s \neq t$) と仮定する。）

（1）任意の i に対して $a_{si} = a_{ti}$ のとき

対象 O_s と O_t は順位付けに関して同質と考え同一視することとし，一対比較行列

から対象 O_s あるいは O_t を取り除く。これより新しく一対比較行列 A' を得る。

（2）ある i に対して $a_{si} \neq a_{ti}$ のとき

このままでは順位付けに関して同一視できないので，意思決定者に対象 O_s と O_t の一対比較結果を再度検討してもらう。これにより次の 2 つの場合が起こる。

（２－１）a_{st} を 1 以外に変更する場合

新しく得られる一対比較行列を A' とする。

（２－２）$a_{st} = 1$ と再度評価する場合

$a_{is} \neq a_{it}$ となる全ての i について $a_{si} = a_{ti}$ と変更できるか，意思決定者に再度検討してもらう。これにより次の 2 つの場合が起こる。

（２－２－１）任意の i に対して $a_{si} = a_{ti}$ に変更する場合

対象 O_s と O_t は順位に関して同質と見て同一視することとし，一対比較行列から対象 O_s あるいは O_t を取り除く。これより新しく A' を得る。

（２－２－２）ある i に対して $a_{is} \neq a_{it}$ と再度評価する場合

強制的に対象 O_s と O_t は順位に関して“ほとんど同質”と見て同一視することとし，一対比較評価から対象 O_s あるいは O_t を取り除く。特に優劣に関して異なる場合，いずれを残すかは一巡三角形の個数を検討し，少なくなる方を選択する。これより新しく A' を得る。

以上の操作により新しく得られる A' は，A よりも引き分けの個数が減少する。この操作を繰り返すことで, 異なる対象間の引き分けを含まない一対比較表を作成する。

注意１．（１）ひとつの一対比較表に引き分けが複数ある場合，その中でできるだけ簡単に取り除くことが出来る引き分けについて，まずそれを取り除くことを考える。たとえば第 3 章で述べるような一対比較表の表記法を利用することで，対象間全体の構造を考慮して, 引き分けを取り除くことができることにも注意を払う必要である（第 3 章例 4 を参照のこと）。

（２）一つの対象が複数の対象と引き分け関係にあるとき，引き分け関係にある対象を同時に考慮する必要が起こる。同一視できない場合は，出来る限り優劣をつけることが望ましい。

（３）（２－２－２）で強制的な同一視を行うための変更に優劣を含む場合，順序整合性を保持するため，重要度算出などにおいても変更したものを利用することとする。この場合，意思決定者に矛盾が解決される方向で成分を変更していることを納得してもらう必要がある。優劣の変更が無い場合は, もとの一対比較値を利用して問題ない。

Ⅱ．異なる対象間の引き分けを含まない場合

意思決定者による一対比較表に含まれる一巡三角形の個数について，それが対象を一次元的に順位付けする上で無視して良いといえるか否か，表 2 を利用して検定を行う。すでに注意したように，対象が（引き分けを含まない）優劣による一対比較表により完全に一次元的に順位付け出来る場合，一巡三角形の個数は 0 である。

表２　無視できる一巡三角形の最大個数

n	3	4	5	6	7	8	9
$d_{0.05}$	0	0	0	1	3	7	13

ところで表 2 は，n 個（$3 \leqq n \leqq 9$）の対象について，各対象間の優劣を無作為に選んで一対比較表を作成するとき，それに含まれる一巡三角形の個数が $d_{0.05}$ 以下である確率は 0.05 であることを意味している。たとえば $n = 7$ の場合，一巡三角形の個数が 3 個以下であれば,（引き分けを含まない）優劣による一対比較表を無作為に作成する場合 0.05 の確率でしかそのような一対比較表とはならないので，無作為にそれが作成されたわけではないと考える。言い換えると，対象が一次元的に並べられるからこそ，そのような一対比較表が作成されたと考え，一巡三角形を含んだとしてもそれは若干の誤判断によるものであり無視してよいと考えることになる。

注意２． 対象の個数 n が 5 以下の場合は，実際には一巡三角形の個数が 0 であっても有意水準 0.05 を満たさない。しかし意思決定支援の立場から，0 であれば問題ないとしている。

それでは改めて表 2 を利用した順序整合度検定を説明する。まず意思決定者により得られた一対比較表により，n 個の対象は一次元的には順位付けできないと仮定する。次に n 個の対象に対して（引き分けは含まない）優劣に関する一対比較表を作成するとき，一巡三角形の個数がどの程度であれば一次元的に順位付けして問題ないとするか決める。ここでは官能検査にならって，有意水準 0.05 として表 2 を利用するものとする。有意水準を変更したい場合は[2]を参照のこと。

ここで一対比較行列 A に含まれる一巡三角形の個数 h 求める。一巡三角形の個数を計算する方法は[2]あるいは[7]を参照のこと。もし $h \leqq d_{0.05}$ であれば，はじめの仮定を棄却する。すなわち，対象はこの一対比較表により一次元的に順位付けできるとして良いこととし，この一対比較表は順序整合度検定を合格したものとする。この場合，一対比較表における一巡三角形の存在は矛盾を意味するが，無視して良い程度の矛盾と考える。

この検定に合格しない場合，すなわち一巡三角形の個数が無視できない程度に含まれるという結果となった場合は，以下のような検討を行うものとする。

（１）一意性の係数 ζ について検討する。対象の個数 n に対する一対比較表に含まれる一巡三角形の最大個数が，Kendall と Babington Smith により計算されている[4]。これをもとに，与えられた一対比較表に含まれる一巡三角形の個数が多いと考えるか否かに関して，一意性の係数 ζ が定義されている。ζ は官能検査で利用されるが，ζ に関して具体的にどの程度の数値になれば合格として良いか与えられていない。ζ の詳細については[1]や[7]を参照のこと。

（２）一巡三角形を解消するために，意思決定者にいくつかの a_{ij} の値を再検討してもらう。再検討すべき a_{ij} の目安は[8]を参照のこと。
（３）階層構造に従属性が無いか，あるいは評価基準に見落としが無いかなど，階層構造そのものを再検討する。たとえば多属性効用理論の利用を支援する多属性効用分解再生プログラム（MAUD: Multi-Attribute Utility Decomposition and recomposition program）における属性の抽出や，属性の独立性のテストを行うことで，評価基準などを見直すことが考えられる[5]。
（４）AHP 以外の意思決定法の利用を検討する。AHP の長所と短所を理解したうえで，AHP を利用することが望ましい。したがって，順序整合度検定に合格しない場合，AHP 以外の多属性意思決定法の利用を検討する必要もある。このような態度を含めた AHP の利用が，この意思決定法の信頼を高めると考える。

AHP における対象の重要度の算出は，通常の方法では比較できないような対象を，意思決定者の直観や経験に基づく一対比較を繰り返すことで，一次元的に順位付けしようとするものである。しかし，意思決定者により得られる一対比較表を優劣に着目した場合，もはや対象に順序付けが好ましくないような状況であることが明白であれば，AHP の第一段階に立ち戻って階層構造を見直したり，AHP を利用することの妥当性をもう一度検討する必要がある。このような状況を回避するための検定が，本検定の目的であったことを改めて注意する。

３．一対比較表の表記法

本章では，優劣と引き分けの情報だけから得られる順位付けの情報が容易にわかるような一対比較表の表記法として，第 1 正規化と第 2 正規化を提案する。ここで提案する表記法は，表記の一意性を目指して正規化という用語を用いているが，現段階で提案する第 1 正規化と第 2 正規化では，一意性を望むことはできない。表記の一意性まで満足する正規化が定義できれば，それを標準形と呼ぶことが期待される。ただし，AHP を扱う上では，本論文で提案する第 1 正規化と第 2 正規化された一対比較表で十分有用であると考える。
正規化を定義する前に，まず一対比較表とそれに対応する対象の関係を整理する。ここでは説明を単純化するため，対象が 5 つの場合で説明することとし，これらの対象を O_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ とおく。またこれらの対象に関して意思決定者の一対比較から得られる一対比較行列を $A = (a_{ij})$ とおく。
さてこのとき注意することは，A の成分は，対象の並び順に依存して決まるということである。通常，対象 O_1，O_2，O_3，O_4，O_5 に対応する一対比較行列 A というとき，A の行（列）は，第 1 行（列）より O_1，O_2，O_3，O_4，O_5 に対応していると考える。この対応関係を明確にするため，ここでは，A は $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ に対応する一対比較行列であると記述することにする。このように定義することで，同じ対象 O_1，O_2，O_3，O_4，O_5 に対する一対比較行列でも，$\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ に対応する一対

比較行列と$\{O_1, O_4, O_3, O_2, O_5\}$ に対応する一対比較行列を区別できるようになる。

ここではまず, 直観的に理解しやすい一対比較表を用いて説明する。それでは, $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ に対応する一対比較表（表 3）から, $\{O_1, O_4, O_3, O_2, O_5\}$ に対応する一対比較表（表 5）を得る方法について説明する。

表 3　もとになる一対比較表

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
O_2	a_{21}	1	a_{23}	a_{24}	a_{25}
O_3	a_{31}	a_{32}	1	a_{34}	a_{35}
O_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	1	a_{45}
O_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	1

この変換は，一対比較表における対象 O_2 と O_4 の記入場所を入れ替える操作ということが出来る。実際には次のようにする。① まず一対比較表の第 2 行と第 4 行の成分を，列ごとに入れ替える（表 4)。② 次に第 2 列と第 4 列を，行ごとに入れ替える（表 5)。一対比較による対象間の関係は，この変換により保持されていることは容易に確かめられる。もちろん，列を入れ替えてから，行を入れ替えても同様である。

表 4　第 2 行と第 4 行の入れ替え

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
O_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	1	a_{45}
O_3	a_{31}	a_{32}	1	a_{34}	a_{35}
O_2	a_{21}	1	a_{23}	a_{24}	a_{25}
O_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	1

表 5　第 2 列と第 4 列の入れ替え

	O_1	O_4	O_3	O_2	O_5
O_1	1	a_{14}	a_{13}	a_{12}	a_{15}
O_4	a_{41}	1	a_{43}	a_{42}	a_{45}
O_3	a_{31}	a_{34}	1	a_{32}	a_{35}
O_2	a_{21}	a_{24}	a_{23}	1	a_{25}
O_5	a_{51}	a_{54}	a_{53}	a_{52}	1

さてここで，この一対比較表に関するこれらの操作を，一対比較行列の用語，すなわち行列の用語で書き直してみる。まず n 次単位行列の第 i 行と第 j 行（$i \neq j$）を入れ替えた行列を $E(i, j)$ で表すことにする。たとえば 5 次正方行列 $E(2, 4)$ は以下である。

$$E(2,4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, 任意の n 次正方行列 A に対して, 左から n 次正方行列 E(i, j) を乗じると, A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列が得られ，A の右から E(i, j) を乗じると，A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列が得られる。たとえば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{55} \end{pmatrix}$$

したがって，{O_1，O_2，O_3，O_4，O_5} に対応する一対比較行列 A から，O_2 と O_4 を入れ替えた {O_1，O_4，O_3，O_2，O_5} に対応する一対比較表を得る操作は，行列の用語で表すと，A の左右から E(2, 4) を乗じるとなる。実際，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{15} \\ a_{41} & 1 & a_{43} & a_{42} & a_{45} \\ a_{31} & a_{34} & 1 & a_{32} & a_{35} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} & 1 & a_{25} \\ a_{51} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & 1 \end{pmatrix}$$

これより一般に，一対比較表の対象に対応する一対比較行列 A から，O_i と O_j の記入位置を入れ替えた対象に対応する一対比較行列を得るには，A の左右から E(i, j) を乗じれば良いことがわかる。

次に，{O_1，O_2，O_3，O_4，O_5}に対応する一対比較行列 A から，{$O_{k(1)}$，$O_{k(2)}$，$O_{k(3)}$，$O_{k(4)}$，$O_{k(5)}$}に対応する一対比較行列 B を得る方法を説明する。まず次のような 5 次の対称群 S_5 の置換 σ を考える。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ k(1) & k(2) & k(3) & k(4) & k(5) \end{pmatrix} \in S_5$$

ここで (i, j) で i と j を入れ替える S_5 の互換を表すとすると，任意の置換は互換の積に表されることから，適当な整数 t が存在して次のように書ける。

$$\sigma = (i_1, j_1)(i_2, j_2)\cdots(i_t, j_t)$$

そしてこのとき, A の左右から σ に対応する E(i, j) を乗じていけば, {$O_{k(1)}$, $O_{k(2)}$, $O_{k(3)}$, $O_{k(4)}$，$O_{k(5)}$} に対応する一対比較行列 B を得ることができることがわかる。

$$\mathrm{B}=\mathrm{E}(i_t, j_t)\cdots\mathrm{E}(i_2, j_2)\mathrm{E}(i_1, j_1)\,\mathrm{A}\,\mathrm{E}(i_1, j_1)\mathrm{E}(i_2, j_2)\cdots\mathrm{E}(i_t, j_t)$$

以下これらの事実をもとに，このようにして得られる行列 B と A の主固有値（固有値のうち最大のもの）及び正規化された主固有ベクトル（主固有値に対応する固有ベクトルのうち，成分の和が 1 となる固有ベクトル）は等しいことを示す。これにより一対比較行列 A から固有値法により算出される各対象の重要度と，一対比較行列 B から算出される重要度は等しくなることが示される（定理 1 を参照のこと)。なお幾何平均法を利用する場合，A と B から得られる各対象の重要度が等しくなることは，それぞれの行に現れる成分を比較することにより容易に確かめられる。

ところで以上のことは，AHP の一対比較表の扱いにおいてもっとも基本的なことであり，当然成り立つことが知られている。しかしここでは，正規化を定義するにあたり，改めてこの事実を確認しておく。

補題１． n 次正方行列 A と B に対して，n 次正則行列 C が存在して $\mathrm{B}=\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}$ を満たすとき，次が成り立つ。

（１）A と B は同じ固有値を持つ。

（２）x を固有値 λ に対応する A の固有ベクトルとすると，$\mathrm{C}^{-1}x$ は λ に対応する B の固有ベクトルである。同様に, y を固有値 λ に対応する B の固有ベクトルとすると，$\mathrm{C}y$ は λ に対応する A の固有ベクトルである。

証明．（１）: $|\mathrm{B}-\lambda\mathrm{E}| = |\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}-\lambda\mathrm{E}| = |\mathrm{C}^{-1}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\mathrm{C}| = |\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|$ より明らか。

（２）: $\mathrm{A}x = \lambda x$ のとき，$\mathrm{BC}^{-1}x = (\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC})\mathrm{C}^{-1}x = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{A}x = \mathrm{C}^{-1}(\lambda x) = \lambda\mathrm{C}^{-1}x$ である。また $\mathrm{B}y = \lambda y$ のとき，$\mathrm{AC}y = \mathrm{CC}^{-1}\mathrm{AC}y = \mathrm{CB}y = \mathrm{C}(\lambda y) = \lambda\mathrm{C}y$ である。（証明終）

補題 1 より，次の定理が得られる。

定理１． AHP において，固有値法により得られる重要度は，一対比較行列の表記の仕方に依存しない。

証明．A を任意の一対比較行列とし，B を $\mathrm{B}=\mathrm{E}(i,j)\,\mathrm{A}\,\mathrm{E}(i,j)$ により得られる一対比較行列とする。このとき $\mathrm{E}(i,j)^{-1} = \mathrm{E}(i,j)$ より，補題 1 の C として $\mathrm{E}(i,j)$ をとると，補題 1（１）より A と B の固有値は全て等しいことがわかる。よって A と B の主固有値も等しいことがわかる。

また補題 1（２）より，主固有値に対する A の正規化された固有ベクトル（すなわち主固有ベクトル）を x とすると，$\mathrm{E}(i,j)\,x$ が同じ主固有値に対する B の固有ベクトルであることがわかる。ここでベクトル $\mathrm{E}(i,j)\,x$ は，x の第 i 行と第 j 行を入れ替えたベクトルであり，もちろん正規化されている。したがって，A から固有値法により求められる各対象の重要度と B から求められるそれは等しいことがわかる。

すでに上で見たように，任意の一対比較行列は A の左右に適当な $\mathrm{E}(i,j)$を乗じてい

くことにより得られることから，定理 1 が成り立つことが示される。　　　　（証明終）

以上の事実を踏まえて，一対比較表に対する 2 つの正規化を定義する。

第 1 正規化　一対比較行列 $A = (a_{ij})$ に対応する対象が, $w_i = \#\{a_{ij} \mid a_{ij} > 1\}$ と $t_i = \#\{a_{ij} \mid a_{ij} = 1\}$ に関して，この順の辞書式順序で第 1 行から並ぶようにする。ただし＃は集合の元の個数を表す。

第 2 正規化　第 1 正規化された一対比較行列 $A = (a_{ij})$ について, 同順位となる対象が, 行番号に関して $i < j$ ならば $g_i \geqq g_j$ となるように対象が並ぶようにする。ただし $g_i = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$ とする。

注意 3．（1）第 2 正規化は，一対比較行列の各行についての幾何平均の大小関係に置き換えても同じである。

（2）幾何平均法や固有値法により各対象の重要度を算出する場合, 一対比較行列に, 第 1 正規化や第 2 正規化を行っても重要度は不変である。

ここで改めて，意思決定者による一対比較の結果を一対比較表あるいは一対比較行列として表記する場合，第 1 正規化及び第 2 正規化を施したものとすることを提案する。以下，第 1 正規化と第 2 正規化に関するいくつかの例を挙げる。例 4 はこれらの正規化の有用性を示すものである。

例 1． 第 2 正規化された一対比較表を作成する例

意思決定者による一対比較に基づいて，対象{A，B，C，D，E，F}に対する一対比較表（表 6）を正規化する。ここでの対象の順序はどのようなものでも構わない。

表 6　もとになる一対比較表

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4	7	1	2
B	1/5	1	1	1/2	2	1/2
C	1/4	1	1	2	1/2	2
D	1/7	2	1/2	1	1/4	1/4
E	1	1/2	2	4	1	1
F	1/2	2	1/2	4	1	1

表 7　第 1 正規化して得られる表

	A	E	C	F	B	D	w_i	t_i
A	1	1	4	2	5	7	4	2
E	1	1	2	1	1/2	4	2	3
C	1/4	1/2	1	2	1	2	2	2
F	1/2	1	1/2	1	2	4	2	2
B	1/5	2	1	1/2	1	1/2	1	2
D	1/7	1/4	1/2	1/4	2	1	1	1

まず表 6 に対して第 1 正規化を行う。実際，w_i の値の大きい順に上から対象を並べる。w_i の値が等しい場合は t_i の値の大きい順に上から対象を並べる。ここでは B と E,

D と F をそれぞれ交換した（表 7)。次に第 1 正規化された表 7 に第 2 正規化を行う。すなわち，第 1 正規化で同順位の対象について，評価の積の大きい順に並べる。ここでは C と F を交換した（表 8)。最後に，第 2 正規化された表 8 について，改めて上位にある対象から対象を O_1，O_2，O_3，O_4，O_5 と記載することで，正規化された一対比較表を得る（表 9)。

表 8　第 2 正規化して得られる表

	A	E	F	C	B	D	g_i
A	1	1	2	4	5	7	
E	1	1	1	2	1/2	4	
F	1/2	1	1	1/2	2	4	2
C	1/4	1/2	2	1	1	2	1/2
B	1/5	2	1/2	1	1	1/2	
D	1/7	1/4	1/4	1/2	2	1	

表 9　第 2 正規化された一対比較表

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	1	1	2	4	5	7
O_2	1	1	1	2	1/2	4
O_3	1/2	1	1	1/2	2	4
O_4	1/4	1/2	2	1	1	2
O_5	1/5	2	1/2	1	1	1/2
O_6	1/7	1/4	1/4	1/2	2	1

例２． 第 1 正規化と，第 2 正規化で利用される成分の積の順位は無関係であることを示す例

表 10　第 1 正規化と第 2 正規化の関係を示す表

	O_1	O_2	O_3	w_i	t_i	l_i	g_i
O_1	1	2	2	2	1	0	4
O_2	1/2	1	9	1	1	1	9/2 = 4.5
O_3	1/2	1/9	1	0	1	2	1/18≒0.06

この例では第 1 正規化により対象の順位が一意に定まる。一方，各行の成分の積に注目すると, O_2 のほうが O_1 よりも上位にあり, 第 1 正規化による順序と相違がある。

例３． 第 1 正規化と第 2 正規化を施しても，順位が確定しない対象が存在する例

表 11　正規化により順位が確定しない対象が存在する表

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	w_i	t_i	l_i	g_i
O_1	1	3	1/3	5	4	3	1	1	20
O_2	1/3	1	3	5	4	3	1	1	20
O_3	3	1/3	1	4	5	3	1	1	20
O_4	1/5	1/5	1/4	1	2	1	1	3	
O_5	1/4	1/4	1/5	1/2	1	0	1	4	

この例で対象 O_1，O_2，O_3 の順位は，2 つの正規化により一意的には決定しない。なおこの例では，O_1，O_2，O_3 はこの対象間で一巡三角形の関係になっているが，全体としては完全な一巡三角形の関係ではない。実際これらの対象と O_4，O_5 との関係は異なるものとなっている。ちなみに a_{34}=5，a_{35}=4，a_{43}=1/5，a_{53}=1/4 であれば，O_1，O_2，O_3 は完全な一巡三角形とみなせるため，これらを順位付けに関して同質とみなすことも考えられる。またこの例では，O_1，O_2，O_3 の記載順序について，第 2 正規化により第 4 位が決定する O_4 に高得点で勝っている O_1 と O_2 を O_3 より上位に記載している。

このように第 2 正規化では順位が確定しない対象間の記載順序に関して，より一意性が保証されるような方法が考えられる。また一方で，一巡多角形の扱いに関しては，これらの正規化は十分対応できていないこともわかる。今のところ一意性を満たす表記法は得られていない（そのような表記法を定義することは難しいと思われる）。

例４． 第 1 正規化と第 2 正規化による一対比較表の表記法の有用性を示す例

[6]で Kwiesielewicz と van Uden は，Saaty 教授が提案する整合指標 C.I.に関して，整合度検定は合格するが一巡三角形を含むという意味で矛盾を含む事例として，次の一対比較行列 A を挙げた。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 & 1/2 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1/4 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1/4 & 4 & 4 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/4 & 4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A 自身は一対比較行列として良くありそうに思えるが，その構造を細かく見ていくと実は単純な構造をしていることがわかる。実際，本論文で提案する表記法を利用すると B となる。B における (3,5) 成分を 4 に変更する（自動的に (5,3) 成分は 1/4 となる）ことで，完全整合な一対比較表となることが容易にわかる。B のような形式で表記することで，意思決定者がどの対象間の一対比較を見直せば良いかわかりやすくなる利点がある。

ここで，例 4 の一対比較行列 A に関して，本論文の前半で説明した順序整合度検定を適用する。簡単のため B に検定を適用して考えていく。一対比較行列 B は引き分けを複数含む。そこでまず I（１）により順位に関して同質と考えられる引き分けを取り除くことで，B より次の C_0 を得る。次にここでは意思決定者の意見を求められないので，（２－２－２）の手順により，強制的に 1 行目と 2 行目に対応する対象を同一視し，1 行目を残すことにより C_1 を得るとする（2 行目を残す場合は後述）。このとき，

一対比較行列が逆数対象行列であるという性質から，自動的に 3 行目と 4 行目は同一視されてしまうことに注意する。ところでこの C_1 は一巡三角形を含まない一対比較行列であることが容易にわかる。したがってこの場合，順序整合度検定に合格となる。

$$C_0=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1/4 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 4 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

なお先の強制的に同一視する手順で，残す対象を 2 行目に対応する対象として C_2 を得たとする。この場合は一巡三角形を 1 個含むことになり，表 2 より順序整合度検定に合格することが出来ない。したがって強制的に同一視した対象を見直すことで，C_1 が妥当であることがわかる。

以上の議論から，本論文で提案する順序整合度検定をこの A が合格するためには，A における第 2 行目と第 3 行目に対応する対象の一対比較の結果が問題を含んでいることがわかる。以上を踏まえ，意思決定者に変更して良いか確認することで順序整合度の検定を合格することになる。

この例 4 から，本論文で提案する 2 つの正規化による一対比較行列の表記法は，順序整合度検定において問題となりうる（２－２－２）に関して，有効性を発揮することがわかる。この意味で，この表記法は順序整合度検定を支援するものといえる。

４．まとめと今後の課題

AHP はすでに数理モデル化された意思決定法であり，この意味で AHP の有効性は保証されている。しかしこの意思決定法の考え方や計算方法などが簡単であるためか，また総合評価による代替案の順位逆転現象など構造上の欠点を指摘されることもあるためか，意思決定法としての評価が必ずしも高いとは言えない。そこで著者は，AHP に対する素朴な疑問に向き合い, それらを一つずつ解決していくことが AHP の評価を高めるために重要であると考えている。

本論文では素朴な疑問として，AHP の一対比較表から幾何平均法や固有値法により対象の重要度を算出する場合，公式に当てはめさえすればいつでも計算できてしまう点について検討した。もちろん利用して良いとする目安として C.I.などあるが，理論的にわかりにくさがある。本論文では，優劣に制限した一対比較表による各対象の順位付けに着目し，どのような場合に一対比較表から幾何平均法や固有値法により対象の重要度を算出する（結果として順位付けする）のが妥当かという問題に取り組んだ。

そしてまず一対比較表に関する順序整合度検定について説明した。これらは官能検査で利用される一対比較表に対する検定の応用であった。そして次に，この検定を支援するための一対比較表の表記法として，第 1 正規化と第 2 正規化を提案した。この正規化を利用することで，幾何平均法や固有値法で各対象の重要度算出に先立ち，意

思決定者による一対比較そのものの質や構造について分析できるようになることをみた。そしてその有用性を第 3 章の例 4 でみた。

もっとも表記法に関して付け加えると，図 1 にあるような階層構造にある評価基準について表記法を工夫することで，全体としての重要度の関係を容易に知ることができるようになる。たとえば重要度を算出した後に，同レベルの対象について左から重要度の大きい順に並べかえると良い。このような表記法も今後提案していきたい。

ただ一方で，順序整合度検定では，一対比較表に異なる対象間の引き分けがある場合，特に一つの対象が複数の対象と引き分け関係にある場合にどのように運用するべきかまだ明確な結論が得られていない。たとえばこのことは，AHP の一対比較における引き分け（同じぐらい重要）が，意思決定者のどのような直観を意味し，それを意思決定支援の中でどのように扱うのが妥当であるか検討することをも意味している。

また一対比較表の表記法についても，一意性を持つような表記法，すなわち一対比較表の標準形までは本論文で定義することが出来なかった。たとえば一巡三角形が存在する場合，それらの対象を順位付けの意味で同一視することを第 3 正規化として織り込むことなどを考えられたが，手順を複雑にする一方で，本来の目的に必ずしも合わないため本論文ではそれに関する定義までは踏み込まなかった。

もっとも，AHP において運用する場合は，本論文で扱った程度の対応で十分であると考えている。この意味では，ここで課題として挙げたような問題は，AHP の研究というよりも，一対比較や一対比較表そのものに関する問題であると言えそうである。以上のような考察も含めて，今後の課題としたい。

参考文献

[1] 飯田洋市: AHP における一対比較法に関する一考察－官能検査における一対比較法の利用－，信州大学人文社会科学研究，創刊号 (2007), 18-36.

[2] Iida, Y.: An ordinal consistency test for a pairwise comparison matrix in AHP, (投稿中).

[3] Kendall, M. G.: “*Rank correlation method*”, 2nd ed, Charles Griffin, 1955.

[4] Kendall, M. G. and Babington Smith, B.: On the method of pairwise comparisons, Biometrika, 31 (1940), 324－345.

[5] 小橋康章: “決定を支援する”，第 5 版，東京大学出版会, 2003.

[6] Kwiesielewicz M. and van Uden E.: Inconsistent and contradictory judgements in pairwise comparison method in the AHP, Computers and Operations Research, 31 (2004), 713-719.

[7] 日科技連官能検査委員会編: 新版官能検査ハンドブック，日科技連出版社, 1973.

[8] Nishizawa, K.: A consistency improving method in Binary AHP, Journal of Operations research Society of Japan, 38 (1995), 21-33.

[9] Saaty, T. L.: ”*The Analytic Hierarchy Process*”, McGraw-Hill, 1980.

（諏訪東京理科大学 経営情報学部 准教授
信州大学 全学教育機構 非常勤講師）

2009 年 1 月 19 日 採録決定