AHPにより得られた重要度に関する仮説検定

飯田 洋市

1．はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process)は，1970年代にSaatyにより提案された直感や経験を生かした意思決定法である[1]。AHPには評価基準などの重要度の算出方法として幾何平均法や固有値法などがある。幾何平均法は，誤差モデルにもとづいた対数最小二乗法による解法の簡易法として説明され，固有値法は均衡モデルにもとづいた解法として説明されている。これらの手法以外ではパラメータ法[2]などが提案されている。

さて我々は[3]において，意思決定者の一対比較により得られる一対比較表について，そこに含まれる一巡三角形による矛盾を無視できるか否かを検定する方法を提案した。これは官能検査における一意性の検定を利用したもので，従来の整合性の指標C.I.とは別角度からの一対比較表に関する整合性の問題へのアプローチである。具体的には，意思決定者により得られた一対比較表に含まれる一巡三角形の個数について検定を行うことで，与えられた評価基準や代替案が本質的に一次元的に順序を付けてよいものかどうか検定するものであった。そこでの議論では，意思決定者が正しく一対比較を行うことが出来ることを前提とした。

ところで[3, p.25]にある表6には一部に誤謬がある。ここで訂正する(表1.1)。

表1.1

k	5以下	6	7	8	9
d	有意水準に達しない	1以下	3以下	9以下	13以下
${}_kC_3$	10以下	20	35	56	84

さてAHPは直感や経験を生かした意思決定法として知られるが，初心者にとっては，これらのことを実感しにくい側面がある。[3]はこの問題を克服するためのインプット側からの試みといえる。そこでこれに対応して，アウトプット側の試みとして，一対比較表から幾何平均法や固有値法などにより得られた重要度に，もとの一対比較の結果が反映しているとみて妥当であると，意思決定者が実感するための手立てがのぞまれる。本論文の目的は，AHPの幾何平均法について，この問題を解決する3つの統計的な方法を提案することである。

もちろん，第3章でみるように，たとえば幾何平均法は規範的モデルとして確立された手法であり，このモデルに沿って行動する場合の最良の結果を得ることはすでに知られている[4]。しかし意思決定者が，自分の一対比較の結果が最終結果に十分反映されているか実感できるための手続きを設けることで，意思決定者がAHPの特徴をより実感できると我々は考える。

第 4 章から第 6 章において，この問題を克服するための手法を 1 つずつ提案する。いずれの手法も統計手法として良く知られたものである[5]。そして第 10 章で利用上の注意事項を指摘する。

なお本論文では，AHP は完全情報，すなわち一対比較表の成分がすべて与えられる場合のみを扱うものとし，また一人の意思決定者の意思決定手段としての AHP について検討する。本論文中にある表や計算は，すべて Microsoft 社の Excel2003 を利用した。

2．幾何平均法

この章では，まず意思決定者の一対比較により得られた一対比較表から評価基準（あるいは代替案）の重要度を算出する方法として，幾何平均法による解法を解説する。ここでは n 個 $(n \geqq 3)$ の評価基準 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ について重要度を求める問題を考える。さて意思決定者がこれら n 個の評価基準について一対比較を行い，その結果得られた一対比較表を $A=(a_{ij})$ とする。本論文では一対比較表と一対比較行列は同一視する。このとき AHP の幾何平均法では，評価基準 C_i の重要度を次のように定める。

$$C_i \text{の重要度} = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n} \tag{2.1}$$

ここで式(2.1)の分母は，C_i 達の重要度の合計が 1 とするためのものであり，この操作は AHP では正規化と呼ばれている。式(2.1)の分子は，まさしく一対比較表の行の成分についての幾何平均である。

3．誤差モデルと対数最小二乗法

この章では，誤差モデルによる対数最小二乗法について解説する。結果として幾何平均法が誤差モデルにおける簡便法であることが示される。たとえば[6]や[4]には，それぞれ $n=3$ と 4 の場合が詳細に記載されている。ここでは一般の n について解説するが，これは[6，p.19]の問 3 の解答にあたる。

第 2 章と同様に，n 個 $(n \geqq 3)$ の評価基準 C_1，C_2，$\cdots$，C_n について重要度を求める問題を考え，意思決定者により得られた一対比較表を $A=(a_{ij})$ とする。ところでもし C_i の真の重要度を w_i とすると，我々はこれより真の一対比較行列 $W=(w_i/w_j)$ を得る。そこで次のような誤差モデルを考える。

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} e_{ij} \qquad (i<j) \tag{3.1}$$

ここで e_{ij} は誤差を表す確率変数で常に正であると仮定する。明らかに $e_{ii}=1$ である。また $e_{ji}=a_{ji} \times w_i / w_j = w_i / (a_{ij} w_j) = 1 / e_{ij}$ であることから $i<j$ なる i と j について考えれば十分であるがわかる。ここで式(3.1)の両辺を対数変換して次を得る。

$$\log\ a_{ij} = \log\ w_i - \log\ w_j + \log\ e_{ij} \qquad (i<j) \qquad (3.2)$$

AHP を利用して行うことは，意思決定者の一対比較により得られた a_{ij} より w_i 達を推定することである。そこで式(3.2)に最小二乗法を適用する。すなわち対数誤差 $\log e_{ij}$ の二乗の総和が最小になるように w_i を決定する。なおここでは対数は自然対数とし，自然対数の底は省略する[4, p.100]。また式(3.1)より w_i 達は比のみが問題となることから，$\sum_{i=1}^{n}\log w_i = 0$ と仮定しても一般性を失わないことに注意する。以上より w_i 達を推定する問題を次のように記述できる。

$$\begin{aligned} &\min \quad S(w_1,\ldots,w_n) = \sum_{i<j}(\log a_{ij} - \log w_i + \log w_j)^2 \\ &\qquad\text{such that} \quad \sum_{i=1}^{n}\log w_i = 0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

ここで $\sum_{i<j}$ は，$i<j$ を満たす i と j を全てとるものとする。また厳密には次のように記載されることを注意する。ここで真の一対比較表を B=(b_{ij}) とする。

$$\begin{aligned} &\min \quad S(b_{ij}\,; i<j) = \sum_{i<j}(\log a_{ij} - \log b_{ij})^2 \\ &\text{for some } w_i (1 \leqq i \leqq n) \ \text{ such that } b_{ij} = w_i / w_j \ \text{ and } \sum_{i=1}^{n}\log w_i = 0 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

ところで，制約条件 R = $\left\{(w_1,\ldots,w_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\log w_i = 0\right\}$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉領域であるから，S は R 上で最小値をとり，しかもそれが極値となることがわかる。そこでラグランジュの未定乗数法により停留点を求める。すなわち，未定乗数 λ に対して

$$\begin{aligned} L(w_1,\ldots,w_n) &= S(w_1,\ldots,w_n) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\log w_i \\ &= \sum_{i<j}(\log a_{ij} - \log w_i + \log w_j)^2 + \lambda\sum_{i=1}^{n}\log w_i \end{aligned} \qquad (3.5)$$

とおき，$\dfrac{\partial L}{\partial \log w_k} = \dfrac{\partial S}{\partial \log w_k} + \lambda = 0$ ($1 \leqq k \leqq n$) より得られる連立方程式から w_k ($1 \leqq k \leqq n$) を求める。ここでこれらの式を計算して次を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \log w_k} &= \left\{\sum_{i=1}^{k-1} 2\left(\log a_{ik} - \log w_i + \log w_k\right)\times(-1) + \sum_{j=k+1}^{n} 2\left(\log a_{kj} - \log w_k + \log w_j\right)\times(-1)\right\} + \lambda \\ &= -2\sum_{i=1}^{k-1}\left(\log a_{ik} - \log w_i + \log w_k\right) + 2\sum_{j=k+1}^{n}\left(\log a_{kj} - \log w_k + \log w_j\right) + \lambda \\ &= -2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\log a_{ik} - \sum_{i=1}^{k-1}\log w_i + (k-1)\log w_k\right) + 2\left(\sum_{j=k+1}^{n}\log a_{kj} - (n-k)\log w_k + \sum_{j=k+1}^{n}\log w_j\right) + \lambda \\ &= -2\sum_{i=1}^{k-1}\log a_{ik} + 2\sum_{j=k+1}^{n}\log a_{kj} - 2(n-1)\log w_k + 2\sum_{i=1}^{k-1}\log w_i + 2\sum_{j=k+1}^{n}\log w_j + \lambda \\ &= -2\sum_{i=1}^{k-1}\log a_{ik} + 2\sum_{j=k+1}^{n}\log a_{kj} - 2n\log w_k + \lambda = 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

最後から二番目の等号は(3.3)の制約条件による。また式(3.6)の二番目の式は，$k = 1$ のとき第一式は 0，$k=n$ のとき第二式は 0 である。以上より次式を得る。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \log a_{1j} - n\log w_1 + \frac{\lambda}{2} = 0 & \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{k-1} \log a_{ik} + \sum_{j=k+1}^{n} \log a_{kj} - n\log w_k + \frac{\lambda}{2} = 0 & (2 \leqq k \leqq n-1) \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{n-1} \log a_{in} - n\log w_n + \frac{\lambda}{2} = 0 & \end{cases} \tag{3.7}$$

ここで式(3.7)の両辺について総和をとり，次を得る。

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=2}^{n} \log a_{1j} - n\log w_1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \sum_{k=2}^{n-1}\left(-\sum_{i=1}^{k-1} \log a_{ik} + \sum_{j=k+1}^{n} \log a_{kj} - n\log w_k + \frac{\lambda}{2}\right) \\ &\qquad + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \log a_{in} - n\log w_n + \frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \log a_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \log a_{ij} - n\sum_{k=1}^{n} \log w_k + \frac{n}{2}\lambda \\ &= -\sum_{i<j} \log a_{ij} + \sum_{i<j} \log a_{ij} - n\sum_{k=1}^{n} \log w_k + \frac{n}{2}\lambda = \frac{n}{2}\lambda = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

したがって $\lambda = 0$ を得る。これより式(3.7)から次を得る。

$$\log w_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \log a_{kj}}{n} = \log\left(\prod_{j=1}^{n} a_{kj}\right)^{1/n} \qquad (1 \leqq k \leqq n) \tag{3.9}$$

最後に，対数関数の単調性より $w_k = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{kj}\right)^{1/n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を得る。この値は一対比較表の第 k 行にある全ての成分の幾何平均と一致する([6]や[7]などを参照のこと)。

4．誤差モデルにおける誤差の母平均に関する検定（t 検定）

この章では，誤差モデルにおいて，誤差を対数変換したものを，正規分布に従う確率変数とみなした場合について検討する。ところで，AHP の一対比較は離散的であるので，連続量として取り扱うことができないという問題がある[4]。しかし幾何平均法により得られた重要度から一対比較表を作成するとき，意思決定者によるもとの一対比較表とどの程度異なるか検討することは意義がある。また，たとえばコンピュータを利用する場合には，AHP の一対比較における尺度を連続量として扱うことができる。この方法については第 8 章で改めて提案する。

式(3.2)における $\log e_{ij}$ は次のような確率変数と仮定できる[4]。

$$\mathrm{E}[\log e_{ij}]=0, \qquad \mathrm{V}[\log e_{ij}] = \sigma^2 \qquad (1 \leqq i, j \leqq n) \tag{4.1}$$

さらにここでは，これらの確率変数は正規分布に従うものと仮定する。言い換えると，e_{ij} 達は対数正規分布に従うものとする[8, p.177]。第 3 章でみたように，幾何平均法は対数誤差の二乗和を最小にする手法である。このように推定値が選ばれるとき，対数誤差達の分布状況を確認することは意味がある。なお，この点に関して若干の異論も考えられるが，これについては本論文の最後(第 11 章)で改めて注意する。

この章では $\log \hat{e}_{ij}$ 達の母集団が平均 0，分散 σ^2（未知）の正規分布に従うと仮定して，$\log \hat{e}_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ について母平均に関する検定(t 検定)を行うことを提案する。以下 $\log \hat{e}_{ij}$ 達の平均を $\overline{\log \hat{e}_{ij}}$ で表し，分散を s^2 で表すことにする。

(4-1) まず帰無仮説は「μ ($\log \hat{e}_{ij}$ 達の母平均)=0」とする。有意水準を 0.05 とする。

(4-2) 次の t_0 を計算する：

$$t_0 = \frac{\overline{\log \hat{e}_{ij}} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}} = \frac{\overline{\log \hat{e}_{ij}}}{\sqrt{s^2 / n}}$$

(4-3) t 表[5, p.6]より $t(n-1, 0.05)$ を求める。ここで $t(n-1, 0.05)$ は，自由度 $n-1$，両側確率 0.05 に対応する t 表の値である。

(4-4) $|t_0| \geqq t(n-1, 0.05)$ であれば帰無仮説を否定し，そうでなければ否定しない。

(4-5) (4-4)で帰無仮定が否定されないとき，意思決定者の一対比較行列から幾何平均法により算出した重要度は妥当なものであると結論する。もし否定されれば，異常な誤差が混入したと考え，意思決定者が行った一対比較を再検討する。

ここで具体例を利用して説明する。[9, p.107]にある次表を利用する。これが意思決定者による一対比較表となる。この表に対応する一対比較行列 A=(a_{ij}) とおく。なお次の表は[3]の定理 1 より，一巡三角形が存在しない表であることが容易にわかる。

表 4.1

	季節感	強健度	樹形	管理	緑被率
季節感	1	3	4	5	6
強健度	1/3	1	2	3	4
樹形	1/4	1/2	1	2	3
管理	1/5	1/3	1/2	1	2
緑被率	1/6	1/4	1/3	1/2	1

C.I.=0.02

この表から幾何平均法により次の重要度を得る。

(季節感，強健度，樹形，管理，緑被率)= (0.488, 0.228, 0.142, 0.087, 0.056)　(4.2)

ここで誤差モデルにおける誤差について t 検定を行う。まず得られた重要度をもとに一対比較表を求める(表 4.2)。この表に対応する一対比較行列を B=(b_{ij}) とおく。このとき，重要度の推定値を $\hat{w}_k$ とすると，$b_{ij}=\hat{w}_i/\hat{w}_j$ である。

表 4.2

	季節感	強健度	樹形	管理	緑被率
季節感	1.000	2.141	3.438	5.578	8.769
強健度	0.467	1.000	1.605	2.605	4.095
樹形	0.291	0.623	1.000	1.623	2.551
管理	0.179	0.384	0.616	1.000	1.572
緑被率	0.114	0.244	0.392	0.636	1.000

次に，意思決定者により得られる一対比較表 A=(a_{ij}) の各成分を，幾何平均法により算出された重要度をもとに作成した一対比較表 B=(b_{ij}) の対応する成分で割った値からなる表を作成する(表 4.3)。この表に対応する行列を C=(c_{ij}) とおくと $c_{ij}=a_{ij}/b_{ij}$ である。行列 C は誤差に対応する行列である。

表 4.3

	季節感	強健度	樹形	管理	緑被率
季節感	1.000	1.401	1.164	0.896	0.684
強健度	0.714	1.000	1.246	1.152	0.977
樹形	0.859	0.803	1.000	1.233	1.176
管理	1.116	0.868	0.811	1.000	1.272
緑被率	1.461	1.024	0.850	0.786	1.000

さらに，この表の各成分を対数変換した表として次を作成する(表 4.4)。この表に対応する行列を D=(d_{ij}) とおくと，

$$d_{ij}=\log c_{ij}=\log\frac{a_{ij}}{b_{ij}}=\log a_{ij}-\log b_{ij}=\log a_{ij}-\log\hat{w}_i+\log\hat{w}_j \tag{4.3}$$

である。行列 D の成分 d_{ij} は実測値 a_{ij} と推定値 b_{ij} の比を対数変換したもの($\log\hat{e}_{ij}$)である。

表 4.4

	季節感	強健度	樹形	管理	緑被率
季節感	0.000	0.337	0.152	−0.109	−0.379
強健度	−0.337	0.000	0.220	0.141	−0.024
樹形	−0.152	−0.220	0.000	0.209	0.162
管理	0.109	−0.141	−0.209	0.000	0.241
緑被率	0.379	0.024	−0.162	−0.241	0.000

ここで表 4.4 の 25 個の成分について，分散 s^2 を求める(表 4.5)。

表 4.5

平均	標準偏差	分散
0.000	0.202	0.041

続いて表 4.5 より t_0 を求める：

$$t_0 = \frac{0-0}{\sqrt{0.041/25}} = 0$$

一方， t 表[5, p.6]から $t(24,0.05) = 2.064$ を得る。したがって $t_0 < t(24,0.05)$ より帰無仮説は否定できないことがわかる。AHP の結論としては，幾何平均法により得られた重要度(式(4.2))は妥当であるといえる。

5．誤差モデルにおける誤差の分散の一様性の検定（$F_{\max}$ 検定，F 検定）

第 4 章では一対比較に関する誤差モデルに関して，対数誤差の分布に着目して平均値の検定を行った。この章では分散に着目して検定する方法を提案する。本章でも第 4 章と同様に，式(3.2)における $\log e_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ は，平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数であると仮定する。

さて我々は n 個の標本からなる集合 D_j $(1 \leqq j \leqq n)$ を次のように定義する。

$$D_j = \{ \log \hat{e}_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq n \} \tag{5.1}$$

そしてこれら D_j の母集団の分布が，平均 0，分散 σ^2 (未知) の正規分布に従うと考え，これら n 組の集合の母分散が一致しているか検定する。ところで D_j に属する要素は，たとえば表 4.4 のような行列 D の第 j 列にある成分に一致する。このように列をひとまとまりとして分散比の検定を行う理由は，個々の一対比較は意思決定者により独立に行われるが，各列は対応する評価基準（あるいは代替案）を 1 とした場合の他の項目（自分自身を含む）の尺度の集まりに対応するためである。以下，D_j の分散を s_j^2，母分散を σ_j^2 と書く。

さて改めて D_j $(1 \leqq j \leqq n)$ の母分散が等しいことを検定する方法（$F_{\max}$ 検定）を説明する[5, p.17]。この方法も統計では良く知られた方法である(Hartley の方法と呼ばれる)。ただし，$F_{\max}$ 表を利用するためには自由度 4 以上が必要である。したがって，項目数 n が 4 以下の場合は，この方法は利用できない。そこで最大の分散をもつ項目と最小の分散をもつ項目について，F 検定を行うこととする[5, p.10]。以下は $F_{\max}$ 検定を適用する場合を扱う。

(5-1) まず帰無仮説を「$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$ $(n \geqq 5)$」とする。有意水準を 0.05 とする。

(5-2) 次に，D_j $(1 \leqq j \leqq n)$ の分散 s_j^2 を計算する。

(5-3) (5-2) より，次の $s_{\max}$，$s_{\min}$，$F_{\max}$ を計算する：

$s_{\max} = \max\{ s_j^2 \mid 1 \leqq j \leqq n \}$，$s_{\min} = \mathrm{mim}\{ s_j^2 \mid 1 \leqq j \leqq n \}$，$F_{\max} = s_{\max} / s_{\min}$

(5-4) 最大分散比 $F_{\max}$ 表[5, p.17]より $F_{\max}(n, n-1, 0.05)$ を求める。ここで $F_{\max}(n, n-1, 0.05)$ は，組数 n，自由度 $n-1$ の上側 0.05 に対応する $F_{\max}$ 表の値である。

(5-5) $F_{\max} \geqq F_{\max}(n, n-1, 0.05)$ であれば帰無仮説を否定し，そうでなければ否定しない。

(5-6) (5-5) で帰無仮説が否定されないとき，意思決定者の一対比較行列から幾何平

均法により算出した重要度は妥当なものであると結論する。もし否定されれば，異常な誤差が混入したと考え，意思決定者が行った一対比較を再検討する。

以下，表 4.4 を用いて実際に手順を説明する。表 4.4 における各列の分散を計算すると次のようになる。

表 5.1

	季節感	強健度	樹形	管理	緑被率
平均	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
標準偏差	0.270	0.214	0.188	0.183	0.239
分散	0.073	0.046	0.035	0.033	0.057

表 5.1 より，$s_{\max} = 0.073$，$s_{\min} = 0.033$ そして $F_{\max} = 0.073/0.033 = 2.191$ を得る。また今の場合は組数が 5，自由度は 4 であり，F_{max} 表[5, p.17]より $F_{\max}(5, 4, 0.05) = 25.2$ を得る。したがって，$F_{\max} < F_{\max}(5, 4, 0.05)$ から，これら 5 つの分散が等しいことは否定されない。このような検定を踏まえ，意思決定者による一対比較の誤差の分散が等しいことから，この幾何平均法による重要度（式(4.2)）は妥当であるといえる。

なお，この表の全成分の分散は $s^2 = 0.041$ である。この値は，整合度に関連するひとつの指標として使えると考えられる。しかし，この値がどの程度であれば整合的としてよいかは，現段階では検討していない（第 9 章，第 10 章を参照のこと）。

6．誤差モデルにおける正規分布への適合度検定（χ^2 検定）

この章では $\log \hat{e}_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ が正規分布に従うか検定する方法を提案する。これは $\log \hat{e}_{ij}$ 達に正規分布（この分布は平均値 $\overline{\log \hat{e}_{ij}}$，分散 s^2）があてはまるかの適合度検定（χ^2 検定）である[5, p.8]。

(6-1) まず帰無仮説を「$\log \hat{e}_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ が正規分布に従う」とする。有意水準を 0.05 とする。

(6-2) $\log \hat{e}_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ から度数分布表を作成する。ここで各級に属する $\log \hat{e}_{ij}$ の個数は実測度数と呼ばれる。

(6-3) 次に $\log \hat{e}_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ が正規分布に従うと仮定して，(6-2)で作成した度数分布表の各級に n^2 個のうち何個属することになるか逆算する。この数値は期待度数と呼ばれる。

(6-4) 度数分布表の各級の実測度数と期待度数から次を計算する：

$$\chi_0^2 = \sum \frac{(\text{実測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$$

(6-5) χ^2の表[5, p.8]より$\chi^2(k-3,\ 0.05)$ を求める。kは度数分布表の級の個数であり，$\chi^2(k-3,\ 0.05)$ は，自由度$k-3$，上側確率0.05の点のχ^2値である。

(6-6) $\chi_0^2 \geqq \chi^2(k-3,\ 0.05)$であれば帰無仮説を否定し，そうでなければ否定しない。

(6-7) (6-6) で帰無仮定が否定されないとき，意思決定者の一対比較行列から幾何平均法により算出した重要度は妥当なものであると結論する。もし否定されれば，異常な誤差が混入したと考え，意思決定者が行った一対比較を再検討する。

具体的に，表 4.4 を利用して手順を説明する。まずこの表より最大値と最小値を考慮して表 6.1 のような，級数が 8 の度数分布表を作成する。なお表中の z は対応する列の級限界値を x とすると，

$$z = \frac{x - \overline{d_{ij}}}{s}$$

である。「z以下の確率」は「z」の値をもとに正規分布表より求める。期待度数は「要素の個数 n^2」に「z 以下の確率」を乗じて計算する。たとえば級「−0.3 以上−0.2 未満」の期待度数は，次式より求められる。

$$n^2\times（「\text{“}-0.3\ 以上-0.2\ 未満\text{”}\ の\ z\ 以下の確率」-「\text{“}-0.3\ 未満\text{”}\ の\ z\ 以下の確率」）$$
$$=25\times(0.1075-0.0418) \fallingdotseq 1.643 \qquad (6.1)$$

「χ_0^2の計算」は，χ^2表[5, p.8]により求めている。

表 6.1

級 以上	級 未満	級限界値	実測度数	z	z以下の確率	期待度数	χ_0^2の計算
	-0.3	-0.35	2	-1.73	0.0418	1.045	0.873
-0.3	-0.2	-0.25	3	-1.24	0.1075	1.643	1.122
-0.2	-0.1	-0.15	4	-0.74	0.2296	3.053	0.294
-0.1	0	-0.05	1	-0.25	0.4013	4.293	2.525
0	0.1	0.05	6	0.25	0.5987	4.935	0.230
0.1	0.2	0.15	4	0.74	0.7704	4.293	0.020
0.2	0.3	0.25	3	1.24	0.8925	3.053	0.001
0.3		0.35	2	1.73	0.9582	1.643	0.078
合計			25			23.955	5.143

さて表 4.4 の d_{ij}の平均$\overline{d_{ij}}$ は 0 であり，分散 s^2は 0.04 であった(表 4.5 参照)。そこで表 6.1 とχ^2表より$\chi_0^2 = 5.143 < \chi^2(5,0.05) = 11.07$ を得る。これより帰無仮説は否定されない。この検定を踏まえ，意思決定者による一対比較の誤差が正規分布に従うとみてよいことになり，この幾何平均法による重要度(式(4.2))は妥当であるといえる。

7．AHP の尺度と完全整合度を持つ一対比較表

C.I.＝0 のとき，それを与える一対比較表は完全整合度をもつと呼ばれる。本来の定義は一対比較行列 A=(a_{ij})の成分が，$a_{ij}\times a_{jk}=a_{ik}$(任意の i, j, k)を満たすことであるが，これと同値であることが容易に示される。また一対比較行列 A=(a_{ij})について，次

のように表現することも出来る。

$$^{\exists}a_1, a_2, \ldots, a_n \quad ^{\forall}i, ^{\forall}j \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ s.t. } a_{ij} = a_i / a_j \tag{7.1}$$

さて AHP における一対比較では 1 から 9 までの整数とこれらの逆数が利用される。したがって，意思決定者による一対比較から作成される一対比較表が，実際に完全整合度をもつ場合は少数に限る。この章では完全整合度を持つ一対比較表をすべて列挙する。ただし全く同じ評価を持つ項目（いわゆるコピー）は含まないものとする。さらに以下の例では項目を A_i で表すが，i が小さいほど評価が小さいものとする。たとえば項目の中では常に A_1 が一番低い評価とする。なお項目 A_i の重要度も A_i で表す。

(1) 項目数 $n=2$ の場合

8 通りある。実際すべての場合に完全整合度をもつ（$A_1 : A_2 = 1 : x$，$2 \leqq x \leqq 9$）。これらに対応する一対比較表は表 7.1 である。

表 7.1

	A_1	A_2
A_1	1	$1/x$
A_2	x	1

(2) 項目数 $n=3$ の場合

4 通りある。実際，結果として得られる項目の重要度が次の場合に限る。すなわち，$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 4$，$1 : 2 : 8$，$1 : 4 : 8$，$1 : 3 : 9$ である。これらに対応する一対比較表は表 7.2 である。

表 7.2

	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/2	1/4
A_2	2	1	1/2
A_3	4	2	1

	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/2	1/8
A_2	2	1	1/4
A_3	8	4	1

	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/4	1/8
A_2	4	1	1/2
A_3	8	2	1

	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/3	1/9
A_2	3	1	1/3
A_3	9	3	1

表 7.3

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	1/2	1/4	1/8
A_2	2	1	1/2	1/4
A_3	4	2	1	1/2
A_4	8	4	2	1

(3) 項目数 $n=4$ の場合

1 通りある。実際，結果として得られる項目の重要度が，$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 2 : 4 : 8$ の場合に限る。これに対応する一対比較表は表 7.3 である。

(4) 項目数 n＝5 以上の場合

完全整合度をもつ一対比較表は存在しない。

以上より，次の定理を得る。

<u>定理 1</u>

AHP において，完全整合度を持つ一対比較表は 13 通りに限る。ただし，この一対比較表には全く同じ評価を持つ項目は複数含まないとする。さらに項目の並び順序の違いは除く。また，一対比較表が完全整合度を持つならば，項目数は 4 以下である。

<u>定理 2</u>

AHP において，一対比較表が完全整合度をもつならば，この一対比較表をもとに幾何平均法から得られる重要度をもとに得られる一対比較表は，もとの一対比較表に一致する。また，幾何平均法による重要度から得られる一対比較表がもとの一対比較表と一致するのは，もとの一対比較表が完全整合度を持つ場合に限る。

証明）項目数を n とする。A_i $(1 \leqq i \leqq n)$ の重要度を w_i とする。このとき一対比較表の第 (i, j) 成分は w_i/w_j である。そこで第 i 行 $(1 \leqq i \leqq n)$ に関して幾何平均法により得られる A_i の重要度は以下である：

$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_i\right)^{1/n} \Big/ \left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/n} = w_i \Big/ \left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/n}$$

これらの重要度より得られる一対比較表の第 (i, j) 成分は w_i/w_j であることが容易にわかる。後半は，完全整合度の定義と同値な命題 (7.1) より明らか。（証明終わり）

たとえばパラメータ法[2]では，任意の項目数で，しかも任意の項目間の比率について完全整合度をもつ一対比較表が存在する。この観点から幾何平均法よりパラメータ法が優れている。この問題を解決する方法として，意思決定者が作成する一対比較により，必ず完全整合度を持つ一対比較表が得られる可能性を持たせる工夫を次章で提案する。

8．誤差モデルに関する一提案

第 4 章から第 6 章までは対数誤差 $\log e_{ij}$ 達が正規分布に従うと，いわば強引に仮定して議論を進めた。しかし実際には，AHP における一対比較での尺度は，離散量である[4]。そこで，新たな議論として，これらの尺度を連続量となるように工夫することが必要となる。この章ではこの問題を解決するために，二つの方法を提案する。各方法で具体例をあげるが，ここでの尺度を表す文章は[10]を参考にした。

（方法 8-1）質問紙上にフリーハンドで記載させる方法

尺度間を直線でつないだ直線上に回答を求めることで，従来の離散量である尺度の間にある任意の値を選択できるようにする方法である。

この方法は紙を利用して実施することが出来る。実際には，たとえば尺度間が 1cm の 8cm の線分で用意し意志決定者に記入させる。測定後，ものさしで中心からの距離を測る。目盛りの振り方や目盛りの読み方を改良することで，さらに細かく読み取ることも出来る。

例 8-1．季節感と強健度を比較し，線上の該当する場所に×を記入してください。

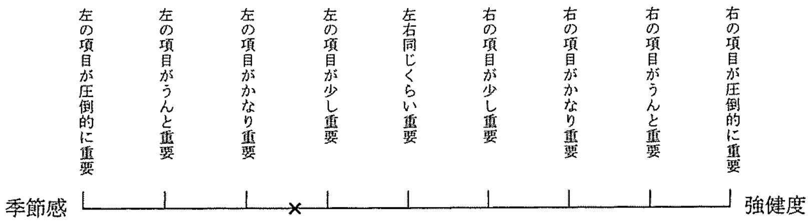

図 8.1

（方法 8-2）パソコンのアプリケーションソフトを利用して回答させる方法

この方法は，たとえばスライド（つまみ）と呼ばれるコンテンツを利用して，従来の離散量である尺度の間にある任意の値を選択できるようにする方法である。たとえば，Excel2003 にはスピンボタンと呼ばれる部品が用意されている。本論文では，AHP の解法として幾何平均法について検討しているが，幾何平均法は Excel などの表計算ソフトで容易に計算できる長所がある。またこの方法は，簡単にやりなおすことができる。またこの方法をコンピュータへの入力と捉え AHP の計算を自動化することで，即時的に各代替案の重要度を出力することができる。このことで，AHP で得られた総合評価に関する感度分析を容易に行うことができる。

例 8-2. 季節感と強健度を比較し，線上の該当する場所につまみをあわせてください。

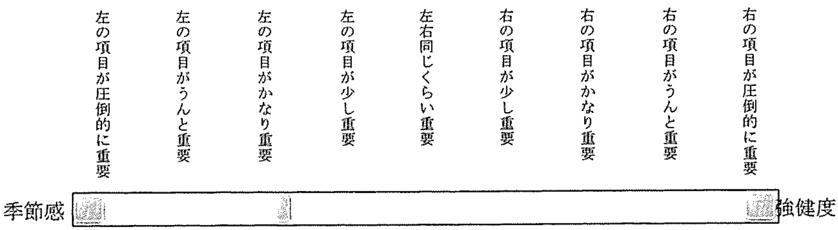

図 8.2

ところで本研究は，個人による意思決定を対象にしている。しかしこの章で提案するアンケート方法だけに着目すると，集団を対象にすることができる。このとき，たとえば方法 8-1 は方法 8-2 と比較して，集団を対象に簡単に実施することが可能である。一方で，方法 8-2 はメモリを測るなどの手間が無いので，集団であっても，パソコンを複数台用意できる，あるいは別々の日にアンケートに回答してもらうなどの対策を検討することで利用することが可能となる。

最後に，従来の AHP の離散量としての尺度を，ここで提案するような連続量に変更することの影響については改めて検討する必要がある。しかし本論文では，これらの問題に立ち入らない。

9．帰無仮説が否定された場合の対処法

本研究では，意思決定者が作成する一対比較表の各成分を，AHP の幾何平均法で求めた重要度から生成される一対比較表の各対応する成分で割った値に着目して，幾何平均法により得られた重要度の評価を行った。ところでこの操作は，矛盾する一対比較値の発見法として知られている[10]。またこのアイディアは[11]で，整合性が悪い場合の対処として紹介されている。矛盾する一対比較値の発見法では，上記の操作により得られた数値が 2 以上であれば，そこが矛盾する一対比較値であるとしている。

ところで本研究の目的は，意思決定者が，自分が作成した一対比較表から幾何平均法により得られる重要度について，それが妥当なものであるか評価する方法を提案することである。したがって，たとえば本論文では一対比較値に含まれる対数誤差の分散が等しいとして $F_{\max}$ 検定を行ったが，帰無仮説が否定された場合の対処方法については論じていない。

そこで，もし帰無仮説が否定された場合，どの一対比較を再検討するかを示唆する方法としては，先の刀根の方法を適用することが考えられる。また我々は[3]で，意思決定者が作成した一対比較表に矛盾が無いとしてよいかの判定に，官能検査の手法を取り入れた。そこでは，いわゆる binary AHP の考え方を応用することができる[12]。この視点から[13]や[14]で西澤が提案する方法，すなわち一巡三角形の個数を減らすための一対比較を修正する方法が適用できる。実際このように，整合度が大きい場合の対処法，一対比較表の一巡三角形を解消するための方法など，一対比較を修正する方法はいくつも提案されている。どの方法が良いかについてなどは，本研究の範囲を超えているので，ここではその方法の一部を紹介するにとどめる。

10．注意を要する適用例

この章では，本論文が提案する方法の利用上の注意として，整合度の大きい一対比較表について検討する。そして一対比較表に関する従来の整合度 C.I.や，[3]で提案した一意性の検定などにより，一対比較行列を作成する段階で，十分な注意を払う必要があることを確認する。実際の事例で確かめるために，矛盾する一対比較値の発見法

として紹介されている[10, p.121]の図 8.13 を利用する(表 10.1)。

表 10.1

(A) 意思決定者による一対比較表([10, p.121, 図 8.13]より転載)

	費用	施設・環境	交通の便	スタッフの態度
費用	1	3	1/2	7
施設・環境	1/3	1	1	5
交通の便	2	1	1	3
スタッフの態度	1/7	1/5	1/3	1

C.I.=0.14

(B) (A) から幾何平均法で求めた重要度より算出される一対比較表

	費用	施設・環境	交通の便	スタッフの態度
費用	1.000	1.584	1.150	5.762
施設・環境	0.631	1.000	0.726	3.637
交通の便	0.869	1.377	1.000	5.010
スタッフの態度	0.174	0.275	0.200	1.000

(C) (A) の成分を (B) の対応する成分で割ることで得られた表

	費用	施設・環境	交通の便	スタッフの態度
費用	1.000	1.894	0.435	1.215
施設・環境	0.528	1.000	1.377	1.375
交通の便	2.300	0.726	1.000	0.599
スタッフの態度	0.823	0.727	1.670	1.000

(D) (C) の成分を対数変換した表

	費用	施設・環境	交通の便	スタッフの態度
費用	0.000	0.638	−0.833	0.195
施設・環境	−0.638	0.000	0.320	0.318
交通の便	0.833	−0.320	0.000	−0.513
スタッフの態度	*−0.195*	*−0.318*	*0.513*	*0.000*

表 10.1 (D) の全成分の平均と分散を計算すると以下のようになる。

表 10.2

平均	標準偏差	分散
0.000	0.463	0.214

表 10.2 より t_0 を求め, t 検定を行う:

$$t_0 = \frac{0-0}{\sqrt{0.214/16}} = 0 < t(,0.05) = 2.131 \tag{10.1}$$

したがって, 母平均が 0 であるという帰無仮説は否定されない。

次に, 母分散の一様性の検定を行う。第 5 章で注意したように, 項目数 n が 4 以下の場合, 2 組ずつ F 検定を行う。分散について次表を得る。

表 10.3

	費用	施設・環境	交通の便	スタッフの態度
平均	*0.000*	*0.000*	*0.000*	*0.000*
標準偏差	0.616	0.451	0.594	0.366
分散	0.380	0.204	0.353	0.134

$s_{\max} = 0.380$, $s_{\min} = 0.134$ より $F_{\max} = 0.073/0.033 = 2.212$ を得る。したがって，$F_{\max} < F_{max}(3,3;0.05) = 9.28$ から，この場合の帰無仮説も棄却されない。ただし，[10, p.121]では，この一対比較行列の整合度が悪いのは，分散が大きいことに起因しているとしている。ここではこれを検出できていない。このことから，本論文で提案する方法は，たとえば一対比較表の整合度に関する問題を検出するものでなく，これらの問題を含まない場合に幾何平均法で得られた結果の妥当性を示すものとして利用されるべきものであることがわかる。ちなみにこの表の全成分の分散は $s^2 = 0.214$ であり，これは表 5.1 に対応する分散($s^2 = 0.041$)と比較するとかなり大きい。

最後に，正規分布への適合度検定を行う。まず度数分布表を作成する。

表 10.4

級							
以上	未満	級限界値	実測度数	z	z以下の確率	期待度数	χ_0^2の計算
	-0.8	-0.9	1	-1.94	0.0262	0.419	0.805
-0.8	-0.6	-0.7	1	-1.51	0.0655	0.629	0.219
-0.6	-0.4	-0.5	1	-1.08	0.1401	1.194	0.031
-0.4	-0.2	-0.3	2	-0.65	0.2578	1.883	0.007
-0.2	0	-0.1	1	-0.22	0.4129	2.482	0.885
0	0.2	0.1	5	0.22	0.5871	2.787	1.757
0.2	0.4	0.3	2	0.65	0.7422	2.482	0.093
0.4	0.6	0.5	1	1.08	0.8599	1.883	0.414
0.6	0.8	0.7	1	1.51	0.9345	1.194	0.031
0.8		0.9	1	1.94	0.9738	0.629	0.219
合計			16			15.581	4.462

これより，χ^2 検定を行うと次のようになる：

$$\chi_0^2 = 4.462 \ < \ \chi^2(7,0.05) = 14.07 \qquad (10.2)$$

したがって，正規分布にあてはまるという帰無仮説は否定されない。

以上によると，本論文で提案する方法だけに頼ると，幾何平均法により重要度からされる一対比較値は妥当なものであるといえてしまう。したがって，意思決定者による一対比較表の整合度をあらかじめ調整しておくことが必要である。これを怠り，本論文で提案する方法に頼った結果だけで評価してしまうと，かえって信頼性の低い結果を得てしまうことになる。この意味で，利用方法には十分注意が必要である。

１１．おわりに

本論文を執筆するにあたり，第 8 章で提案した(方法 8-2)を利用した AHP の計算を自動的に行うためのソフトウェアを作成した。このように AHP の尺度を連続量とする方法を取り入れ,従来の離散量である尺度による AHP とどの程度違うのかを明らかにすることは今後の課題としたい。

また意思決定者により作成された一対比較表の一対比較値と，これより幾何平均法で求められる重要度から得られる一対比較表の対応する一対比較値との比を考えるとき，どのくらいの差が生じるかについて，あるいは差が生じないかについて数学的な証明は得られていない。たとえば[4]や[15]では，ガウス・マルコフの定理により，幾

何平均法により求められる値は最良不偏推定値であるとの説明がある。これの厳密な証明が求められる。これが証明されれば，本論文で提案する仮説検定とはまた別に，何らかの指標が期待できる。これも今後の課題である。

謝辞　実務統計の立場より，たくさんの有益な助言をいただいた諏訪東京理科大学 奥原正夫准教授，本原稿を詳細にチェックしていただき，たくさんの有益な助言をいただいた東京理科大学経営学部野澤昌弘博士に，この場を借りて厚く感謝申し上げる。

参考文献

[1] T.L.Saaty：The Analytic Hierarchy Process, MacGraw-Hill, 1980.
[2] 高橋磐郎：AHP から ANP への諸問題 I，日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol.43, 37－40，1998.
[3] 飯田洋市：AHP における一対比較法に関する一考察－官能検査における一対比の利用－，信州大学人文社会科学研究，創刊号，18－36，2007.
[4] 高橋磐郎：AHP から ANP への諸問題 II，日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol.43, 100－104，1998.
[5] 森口繁一：日科技連数値表委員会（代表：久米均）編，新編日科技連数値表，日科技連出版会，1990.
[6] 高橋磐郎：AHP から ANP へ，AHP の理論と実際，11－46，日科技連出版社，2000.
[7] 関谷和之：AHP と固有値の問題，木下栄蔵編，AHP の理論と実際，pp.161－182，日科技連出版社，2000.
[8] 木下栄蔵，田地宏一編著：行政経営のための意思決定法，ぎょうせい，2005.
[9] 刀根薫，真鍋龍太郎編：AHP 事例集，日科技連出版社，1990.
[10] 萩原栄一郎，中島信之：Excel で学ぶ AHP 入門，オーム社，2006.
[11] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法，日科技連出版社，1986.
[12] I.Takahashi：AHP applied to binary and ternary comparisons, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.33, No.3, 199－206, 1990.
[13] 西澤一友，高野伸栄：第 5 章整合性とファジィ性，木下栄蔵編：AHP の理論と実際，日科技連出版社，2000.
[14] K.Nishizawa：A Consistency Improving Method in Binary AHP, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.38, No.1, 21—33, 1995.
[15] 後藤正幸：階層型意思決定モデル(AHP)と統計学的考察，武蔵工業大学環境情報学部紀要，Vol.5，77-88，2004.

（諏訪東京理科大学 経営情報学部 准教授
信州大学 全学教育機構 非常勤講師）

2008 年 2 月 11 日 採録決定