球面の特徴付け
ーまるく見える曲面は球面かー

伊藤　武廣　理数科学教育講座
坂巻　主太　上田市立菅平中学校
前田　定廣　島根大学総合理工学部

キーワード: 球面, 凸曲面, 直円錐, 直円柱

ABSTRACT. 本論文の目的は「小学校から高校までの各段階で与えられている球面（球）の定義が同値である」ことの証明を与える事であり, 特に小中学校の先生方の為の教材研究と位置付けられるものである。そのような視点から、極力、初等幾何学の手法で証明を与えるものとする。

本論文の課題は、既に平川淳康氏 ([2]) が「球の特性に關する問題に就いて」(1943 年 12 月、高數研究第八巻第三號) において, 証明を与えているものでもある。

しかし, 記述・記法も現代の先生方には, 少々理解し難いと思われるので, 分り易く紹介するものである。従って, 本論文で扱う課題は我々が最初ではない事をお断りしておく。

小学校から高校まででは, 球面 (Sphere) と球 (Ball) を区別せず図形の概念として同一のものと捉えているようである。この考え方は, 平川氏も同様である。

1. 球面（球）の定義の変遷

球面の定義について, 小学校から大学までの変遷をたどってみよう。先ず, 小学校においては, 啓林館の小学校４年生の教科書「わくわく算数上」([11]-７p) を参考にすると次のように定義を与えている。

定義 1. (小学校での球（球面）の定義)
ボールはどこから見ても円に見えます。ボールのような形を球（球面）といいます。

すなわち,

定義 2. (小学校での球（球面）の定義)
どこから見ても円に見えるような形を球（球面）とする。

これは, 奇しくも平川淳康氏が上述の論文において提起している２番目の課題である。しかしながら, 小学校の教科書には平川氏の結果の紹介は見当たらない。

ここで, “円” はコンパスでかいたような “まるい形” である、と定義し, 円のまん中の点を “中心”, 中心から円のまわりまでひいた直線（直線分）を円の “半径” と定義している。また, “まるい形” は “ボールのような形” と（定義ではなく）認識させているようである。

次に中学校では, 啓林館の「未来をひらく数学１」([8]) によると, 球（球面）は円柱や円錐などと一緒に次のように表現している。

定義 3. (中学校での球（球面）の説明)
円柱, 円錐, 球などは, １つの平面図形を, その平面上の直線 ℓ のまわりに１回転させてできる立体とみることができます。

The first author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 17530653), Ministry of Education, Science, Sports and Culture.

この中学校での球の説明は記述の仕方が定義とは言い難いものであるが, 球を次のように定義していると考えられる。

平面上の半円をその直径を軸として回転して得られる立体を球（球面）という。

高等学校では, 数研の「新編 数学B」([3]) では「発展」の節で, 他の教科書でも「研究」の中で附録的に扱っているが, 次のように集合論的に球を定義している。

定義 4. （高等学校での球（球面）の定義）
空間（3次元ユークリッド空間）において, 定点 C からの距離が一定値 r であるような点の集合を, 中心 C , 半径 r の球面, または単に「球」という。

この定義は, 球面と球との混同を除けば, 数学で一般に扱われている定義と同じである。
数学においては概念の明確な把握が重要であるが, 上に紹介したように, 小学校から高校まででは, 球面（Sphere）と球（Ball）との概念の区別が明確になされていない。このような定義では, 子供達は球面と球との違いばかりか, それらの定義すら正確に把握できないのではないだろうか。子供達ばかりでなく, 教える側の教師も, ある生徒に「球面と球の違いと, 上の定義の同値性」について問われたら, 困惑するであろう。そのような観点から, 先生方が困惑されないように, 児童生徒に明解に説明できるよう, 本論文を教材として利用して頂ければ幸である。

2. 準備

ここで, 前節で提起した課題を数学的に説明する為に必要な幾何学における基本的な概念・定義及び基礎事項等を用意する。ただし, 大学で学んだであろうと思われる数学の基礎的な概念と事実についてはその詳細を省略させて頂く場合がある。
小学校から高校までで "空間" と呼ばれているものは "3次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, d)$" を意味している。だだし, d は標準的な距離関数である。球面（Sphere）Σ と球（Ball）$\mathbb{B}$ は次のように定義する。

定義 5. 球面, 球
球面（**Sphere**）：$\mathbb{E}^3$ 内の定点 C から一定の距離 r にある点全体のなす集合を, 中心 C, 半径 r の球面と呼び, $\Sigma = \Sigma(C; r)$ と表す。
球（**Ball**）：$\mathbb{E}^3$ 内の定点 C から一定の距離 r 以下にある点全体のなす集合を, 中心 C, 半径 r の球と呼び, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(C; r)$ と表す。

次に直感的な表現を数学的に説明する為に, 良く知られている図形；直円柱と直円錐の定義を述べる。

定義 6. 直円柱 ([9])
平面 $\mathbb{E}^2 \subset \mathbb{E}^3$ 上の円 C に沿って, $\mathbb{E}^2$ に垂直な直線 L が動いて作る曲面（線織曲面）を底線を円 C とする直円柱と呼ぶ。動直線 L を直円柱の母線といい, $\mathbb{E}^2$ に平行な平面と直円柱との交わりを平行円という。

定義 7. 直円錐
$\mathbb{E}^3$ 内の点 p を頂点とする直円錐 Λ_p とは, p を通る定直線 m を軸として, p から出る m と垂直でなく m と一致しない半直線 ℓ を m の回りに回転して作る回転面のことである。ただし, p は除くものとする。この回転面を構成する半直線 ℓ を母線と呼ぶ。

$\mathbb{E}^3$ 内の部分集合 M 上の任意な点 p と任意な正数 ϵ に対して, M の部分集合 $N(p;\epsilon) := \{q \in M : d(p,q) < \epsilon\}$ を M の (ϵ-) 近傍と呼ぶ。これによって, M に $\mathbb{E}^3$ から相対位相が導入されて位相空間となる。そこで, $\mathbb{E}^3$ 内の "曲面" を次のように定義する。

定義 8. 曲面 ([9])
空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲面 M とは, 次の条件を満たす $\mathbb{E}^3$ の部分集合のことである。

(1) 任意な点 $p \in M$ に対して, $\mathbb{E}^2$ 上の領域 D と p の近傍 $N(p;\epsilon)$ が在って,
(2) 同相な正則写像 $\mathbf{x} : D \to N(p;\epsilon)$ が存在する.

上で定義した球面 Σ が曲面である事は容易に確かめられる。また, $\mathbb{E}^3$ 内の点 p を通り定方向 q に垂直な平面 $\Pi = \Pi(p;q)$ は

$$\Pi = \Pi(p;q) = \{x \in \mathbb{E}^3 : (x-p)\cdot q = 0\}$$

と表されるが, これは明らかに曲面である。

定義 9. 曲線, 接ベクトル, 接平面 ([9])
曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ に対して, (C^r-級) 写像 $\alpha(s) : I \longrightarrow M$ を曲面 M 上の (C^r-級) 曲線という。曲面 M 上の点 p における接ベクトル $\mathbf{v}$ とは, 曲面 M 上の p を通る可微分曲線の p での速度ベクトルのことである。曲面 M 上の点 p における接ベクトル全体のなす集合 T_pM を曲面 M の点 p における接平面（空間）と呼ぶ。すなわち,

点 p における接平面: $T_pM = \{\mathbf{v} :$ 点 p における M の接ベクトル $\}$.

定義 10. 凸曲面 ([6])
曲面 M 上の任意な点 p における M の接平面 T_pM が曲面 M を２つ以上の部分集合に分けない時, そのような曲面 M を凸曲面と呼ぶ。さらに, $T_pM \cap M = \{p\}$, $\forall p \in M$ のとき, 曲面 M は "強い意味で凸曲面である" という。

凸曲面に関して次のアダマールの結果がある。

Hadamard's Theorem ([1]). 曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ が凸曲面ならば, M と交わる任意な平面 Π は M をちょうど２つの部分集合 M_1, M_2 に分ける。すなわち,

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 \cap M_2 = \Pi \cap M.$$

注意 1. （どこから観てもまるく見えるとは）
$\mathbb{E}^3$ 内の曲面 M を $\mathbb{E}^3$ 内のある点 P から観たとき, "まるく見える" という事は,
点 P を頂点とするある直円錐 Λ_P に, M が直円錐上で頂点以外の一点に退化しない閉曲線を含む集合で内接している, という事である。
ただし, Λ_p の母線は全て M の接線であるが, 一点だけで接しているとは限らない。

尚, 我々が本論で扱う曲面はあまり病的なものは考えないことにする。すなわち, 連結でコンパクトな曲面を対象とすることにする。"曲面がコンパクトである" とは位相空間としてコンパクトである事を意味する。また, "曲面が連結である" とは, いわゆる "弧状連結" のことである。すなわち,

定義 11. 連結 ([9])
曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ 上の任意な２点を結ぶ M 上の曲線が存在するとき, 曲面 M は連結であるという。

命題の証明に有効な曲面に関する次の基本的な補題がある。

補題 1 ([9]). $\mathbb{E}^3$ 内の２つの曲面 M, N について, M が N に含まれていて, M がコンパクトで N が連結ならば, $M = N$ となる。

さて, 本論で証明すべき課題を再度整理してみることにする。

定理 A. 空間 $\mathbb{E}^3$ 内の任意な点 P から観て "まるく見える" 曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ は球面である。

さらに, 平川氏 ([2]) は次の問題も提起している。

問題. $\mathbb{E}^3$ 内の凸曲面 M に平らな輪を当てて常に隙間がなければ球面であるか？

この問題を数学的に定理の形で述べると次のようになる。

定理 B. 曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ 上の $\mathbb{E}^3$ における距離が定長 r を超えない任意な２点に対して, この２点を通るある平面と曲面との交わりが直径 r の円となるならば, そのような曲面は球面である。

また, 平川氏 ([2]) は,

柳原氏 ([13]) の結果. 無限の彼方から観てまるく見える曲面は球面である.

の別証明を紹介している。後で, この結果を数学的に述べて（定理４）, 分り易い証明を紹介する事にする。

3. 命題の証明

先ず最初に次の結果から証明しよう。

定理 1. コンパクトな凸曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ に対して, M と交わる任意な平面との共通部分が常に円ならば, 曲面 M は球面である。

証明. 曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ と平面 Π が共有点を持つ場合は,

(1) Π が M に１点で接している。
(2) Π が M と２点以上の点を共有している。

のいずれかである。本質的には (2) の場合を考えれば良い。

M 上の任意な２点 A, B を含む平面 Π_1 と M との交わりは, M が凸曲面だから, 条件より, 単一円 C_1 である。また, この２点 A, B を含む他の平面 Π_2 と M との交わりも単一円 C_2 である。すなわち,

$$M \cap \Pi_1 = C_1, \quad M \cap \Pi_2 = C_2, \quad \Pi_1 \neq \Pi_2, \quad C_1 \cap C_2 = \{A, B\}.$$

円 C_1, C_2 の中心を O_1, O_2, 線分 AB の中点を Z とすると, $O_1Z \perp AB, O_2Z \perp AB$ である。そこで, m_1, m_2 を各々の点 O_1, O_2 を通る平面 Π_1, Π_2 に垂直な直線とすると,

(1) m_1 と直線 O_1Z が張る平面 μ_1 は点 Z を通り直線 AB に直交していて,
(2) m_2 と直線 O_2Z が張る平面 μ_2 は点 Z を通り直線 AB に直交している。

から, 両平面は一致する, すなわち, $\mu_1 = \mu_2 =: \mu$。また, 平面 Π_1, Π_2 は平行ではないから,

m_1 と m_2 は平面 μ 上に在って一点 O で交わる。

したがって,

点 O_i と円 C_i は点 O を頂点とする直円錐 Λ_i を作る。$i = 1, 2.$

よって,

円 C_i は点 O を中心とする半径 $r := OA = OB$ の球面 $\Sigma(O; r)$ 上に在る。$i = 1, 2.$

そこで, $\Sigma(O; r)$ 上の C_1, C_2 上にない任意な点 P をとる。２点 P, A を通る平面 Π_3 で円 C_1, C_2 と A, B 以外の交点 Q_1, Q_2 を持つような平面が存在する。実際, 平面 Π_2 上に在る円 C_2 の点 A

における接線と点 P で決まる平面は円 C_1 と点 A 以外の（唯一）点 Q' で交わるが, 円 C_2 とは点 A で接している。そこで, 上のような平面 Π_3 を2点 P, A と A, Q' 以外の C_1 上の点 Q_1 で決まる平面とすれば, 平面 Π_3 は円 C_2 と A, B 以外の点 Q_2 で交わる。

すると, 3点 A, Q_1, Q_2 は曲面 M 上に在って, 一つの平面 Π_3 を決めているから, Π_3 と M との交わりはこの3点を通る M 上の円 C_3 である。一方, 平面 Π_3 上の3点 A, Q_1, Q_2 は球面 $\Sigma(O;r)$ 上の点でもあり, 3点は唯一つの円を決定するから, Π_3 と $\Sigma(O;r)$ との交わりも円 C_3 である。したがって, $P \in \Sigma(O;r)$, よって,

$$\Sigma(O;r) \subset M.$$

$\Sigma(O;r)$ はコンパクトであり, M が連結だから補題1によれば, $M = \Sigma(O;r)$ となる。 □

注意 2. 上の証明は、初等幾何学的であるが、直截口 (normal section) を用いた微分幾何学的方法を紹介しておく。

M 上の任意な点 A における任意な単位接ベクトル $\mathbf{u}$ と法ベクトル $\mathbf{e}$ で決まる平面 α_A と M との共通部分である直截口 (normal section)C_A は単一円であるから, $\mathbf{u}$ は M の主曲率ベクトルとなる。したがって, M 上の任意な点 A における任意な単位接ベクトル $\mathbf{u}$ が主曲率ベクトルとなるから, 点 A は臍点である。すなわち, M は全臍的曲面となり, 良く知られている結果により M は球面となる。

次に, 平川氏の第2番目の問題の証明を与えよう。氏の問題は次のように言い換えられる。

定理 2 ([2]). コンパクトな凸曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ において, $\mathbb{E}^3$ 内の距離が ℓ を超えない曲面 M 上の任意な2点を通る直径 ℓ の円が M 上に常に在るならば, そのような曲面 M は球面である。

証明. M 上の任意な点 A_0 の近傍に $\mathbb{E}^3$ 内の距離が ℓ を超えない点 B が必ず存在するから,

M 上の任意な点 A_0 を通る $\mathbb{E}^3$ 内の直径 ℓ の円 C_1 が M 上に存在する。

α_1 を C_1 を含む平面とすると, M が凸曲面だから, α_1 は M を2つの連結な部分集合 M_1, M_2 に二分する 。すなわち,

$$\begin{aligned} \exists M_1, \exists M_2 \subset M \ : M = M_1 \cup M_2, \quad & M_1 \cap M_2 = \phi, \\ C_1 = \partial M_1 = \partial M_2, \quad & M_i \text{ は連結集合}, \ i = 1, 2. \end{aligned}$$

A_0 の M 上の $\ell/2$ 近傍 $U = N(A_0; \ell/2)$ 内に2点 P_1, P_2 で次のようなものがとれる。

$$P_i \in M_i \cap U, \quad P_i \notin C_1, \quad d(P_1, P_2) < \ell, \quad i = 1, 2.$$

すると, 条件から, 2点 P_1, P_2 を通る $\mathbb{E}^3$ 内の直径 ℓ の円 C_2 が M 上に存在する。明らかに、$C_1 \neq C_2$ である。この時、次の事実が得られる。

補題 2. 円 C_1 と円 C_2 は異なる2点 A, B で交わる。

補題2の証明. 円弧 C_2 は, 向きを考慮して, 2つの部分弧 $\widehat{P_1P_2}$ と $\widehat{P_2P_1}$ から成る。部分弧 $\widehat{P_1P_2}$ は M_1 内の点 P_1 から M_2 内の点 P_2 への曲線であり, M_1 と M_2 の境界は円 C_1 だから,

部分弧 $\widehat{P_1P_2}$ は円 C_1 と一点 A で交わる。

部分弧 $\widehat{P_2P_1}$ についても同じく,

$$\text{部分弧}\ \widehat{P_2P_1}\ \text{は円}\ C_1\ \text{と一点}\ B\ \text{で交わる。}$$

この2点 A と B は, 明らかに異なる。 □

さらに, 次の結果を得る。

補題 3. 円 C_1 と円 C_2 は同一球面上にある。

補題3の証明. 弦 AB の中点を通る, 円 C_1, C_2 の直径を各々 X_1Y_1, X_2Y_2 とする。円 C_2 を含む平面を α_2 とすると, 4点 X_1, Y_1, X_2, Y_2 は Z を通る平面 α_1, α_2 に垂直な平面 Π 上に在る。この時, $X_1Y_1 = X_2Y_2 = \ell$ だから,

$$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = (ZX_i)\cdot(ZY_i), \qquad i = 1, 2$$

が成り立つ。必要なら2点 X_2, Y_2 の順序を入れ替えれば,

$$ZX_1 = ZX_2, \qquad\qquad ZY_1 = ZY_2$$

としてよい。$\alpha \neq \beta$ だから, 平面 Π 上で線分 X_1Y_1 と X_2Y_2 の垂直二等分線 m_1, m_2 は一点 O で交わり,

$$OX_1 = OX_2 = OY_1 = OY_2, \quad m_i \perp \alpha_i, \quad i = 1, 2$$

となる。m_i は円 C_i の中心を通っているから, 点 O から円弧 C_1, C_2 上の点までの距離は $OA = OB$ に等しい。点 A_0 は円 C_1 上に在るから, $OA = OA_0 = r$ となる。よって,

$$\text{円}\ C_1\ \text{と円}\ C_2\ \text{上の点は球面}\ \Sigma(O; r)\ \text{上にある。}$$

□

定理2の証明の続き：

次に, 曲面 M 上の任意な点 P を取ると M は連結だから, 点 A_0 と点 P を結ぶ M 上の連続曲線 $\gamma(t) : [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = A_0$, $\gamma(1) = P$ が存在する。この曲線を有限個の $\frac{\ell}{2}-$ 近傍で被覆して, これらの近傍に沿って, A_0 における時と同様の考察を繰り返すと,

$$P \in \Sigma(O; r), \quad \text{すなわち,} \quad M \subset \Sigma(O; r)\ \text{を得る。}$$

$\Sigma(O; r)$ は連結であり M がコンパクトだから, 補題1によれば $M = \Sigma(O; r)$ となる。 □

さて, 前節で上げた定理Aを数学的に詳しく述べて, その証明を与えよう。

定理 3 ([2]). コンパクトな凸曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ に対して, 空間 $\mathbb{E}^3$ 内の任意な点 P を頂点とする直円錐 Λ_P が存在して, M が Λ_P にその上で頂点以外の一点に退化しない閉曲線を含む集合で内接しているならば, 曲面 M は球面である。

証明. 曲面 M 上に任意に点 A をとって固定する。M 上に A と異なる任意な点 B で, 接平面 T_BM が接平面 T_AM と交線 ℓ を持つような点とする。

交線 ℓ 上に点 P をとる。この点 P は M 上にない空間 $\mathbb{E}^3$ 内の点としてよい。すると, 条件より, ある直円錐 Λ_P が存在して,

$$M\ \text{が},\ \Lambda_P\ \text{上で一点に退化しない閉曲線}\ C_P\ \text{で, 直円錐}\ \Lambda_P\ \text{に内接している。}$$

2点 A, B は, この閉曲線 C_P 上にある。このとき, 次の結果を得る。

補題 4. 点 B は, ある点 O を中心とする半径 $r = OA$ の球面 $\Sigma(O; r)$ 上にある。

補題4の証明. 半直線 PA は Λ_P の母線の一つである。また, B も A と異なる C_P 上の点だから, 半直線 PB も Λ_P の母線である。点 A における接平面 T_AM の垂線 h_A は直円錐 Λ_P の軸 m_P と点 O で交わる。２直線 m_P, ℓ で張られる平面 Π は２平面 T_AM, T_BM の二等分面であり, 点 O はこの平面 Π 上にある。次に, 直線 ℓ 上に点 P と異なる点 Q を取り, Q から曲面 M を観ると, M はある直円錐 Λ_Q に内接している。直線 QA, QB は直円錐 Λ_Q の母線であり, 各々, 接平面 T_AM, T_BM 上にある。直円錐 Λ_Q の軸 m_Q と ℓ で張られる平面も２平面 T_AM, T_BM の二等分面 Π である。したがって, ２直線 m_P, m_Q は平面 Π 上の直線である。T_AM は点 A における直円錐 Λ_Q の接平面でもあるから, h_A は直円錐 Λ_Q の軸 m_Q と点 O' で交わる。

そこで, O と O' が異なっているとすれば, 直線 OO', すなわち, 直線 h_A は平面 Π 上にあることになり, 点 A が平面 Π 上にある事になるから矛盾する。したがって, $O = O'$, すなわち, ２つの直円錐の軸 m_P, m_Q は点 O で交わっている。

点 O（m_P と m_Q の交点）から（Λ_P, Λ_Q の）接平面 T_BM に引いた垂線 h_2 は接平面 T_BM と点 C で交る。OA と OC は直円錐の軸上の点 O から直円錐の接平面までの距離だから, $OC = OA$ である。

一方, h_2 は Λ_P の母線 PB とも, Λ_Q の母線 QB とも直交している。また, Λ_P と Λ_Q の各々の母線 PB, QB は同一接平面 T_BM 上にあって, 点 B で交わっているから, $C = B$ でなければならない。

このように, $BO = AO = r$ となり, 点 B は点 O を中心とし半径を $r = OA$ とする球面 $\Sigma(O; r)$ 上にある。 □

定理３の証明の続き:

曲面 M 上の A と異なる任意な点 B で, 接平面 T_AM, T_BM が交線を持つ場合は, 上の補題で示したように, 点 B は球面 $\Sigma(O; r)$ 上にある。

接平面 T_AM, T_BM が交線を持たない場合は, 点 B のごく近傍に, 接平面 T_AM と交わる接平面を持つような点 C が存在する。そこで, ２点 B, C について, 上の補題と同じ議論によって, 点 C も球面 $\Sigma(O; r)$ 上にあることが分る。このように, M 上の任意な点は球面 $\Sigma(O; r)$ 上にあること, すなわち, $M \subset \Sigma(O; r)$ が示された。

M がコンパクトで, $\Sigma(O; r)$ は連結だから, 補題１によれば, $M = \Sigma(O; r)$ となる。 □

最後に, 柳原氏 ([13]) の結果：「無限の彼方から観てまるく見える曲面は球面である。」を数学的に述べて分り易い証明を与える事にする。

定理 4. コンパクトな凸曲面 $M \subset \mathbb{E}^3$ に対して, M 上の任意な点における任意な接線を母線の一つとする円柱 Υ が存在して, M が Υ に Υ 上の一点に退化しない閉曲線を含む集合で接しているならば, そのような曲面 M は球面である。

証明. 曲面上の一点 A を固定する。M が条件のように内接する直円柱 Υ_A が存在する。その時 M が Υ_A に内接している M の部分集合を C_A とする。C_A に接平面 T_AM と平行な接平面を持つ点 B がある。この時, 次の補題が成り立つ。

補題 5. M が直円柱 Υ_A に“平行円”で内接している.

補題5の証明. 点 A, B を通る Υ_A の母線を各々 ℓ_A, ℓ_B とする。これらの母線 ℓ_A, ℓ_B は各々 T_AM, T_BM 上に在る。２つの母線 ℓ_A, ℓ_B を含む平面 Π は T_AM, T_BM に垂直で, Υ_A の軸 m_A を含んでいる。接平面 T_AM 上で A を通る ℓ_A と異なる直線 ℓ'_A をとり, 直線 ℓ'_A と点 A を通る T_AM に垂直な直線で張られる平面と T_BM との交線に平行な点 B を通る T_BM 上の直線を ℓ'_B とする。ℓ'_A, ℓ'_B を母線とする直円柱 Υ'_A が存在し, M は条件のように Υ'_A に内接している。２つの母線 ℓ'_A, ℓ'_B を含む平面 Π' も T_AM, T_BM に垂直で, Υ'_A の軸 m'_A を含んでいる。Π と Π'

は2点 A, B を含むから，それらの交線は直線 AB である。また，Π と Π' は T_AM, T_BM に垂直だから，交線 AB も T_AM, T_BM に垂直である。したがって，2点 A, B は T_AM に垂直で直円柱 Υ_A の平行円上の対点である。この時，2つの軸 m_A, m'_A は線分 AB の中点 O で交わっている。直線 AB を含み T_AM に垂直な平面上の中心 O 半径 $r = AO$ の円 $C(O;r)$ は，直円柱 Υ_A の平行円 $C(O;r)$ である。C_A 内で A, B と異なる点 C をとり，C を通る Υ_A の母線 ℓ_C と平行円 $C(O;r)$ との交点を C' とする。$C \neq C'$ と仮定すると $r = OC' < OC$ である。そこで，3点 A, B, C で決まる平面 β_C に垂直で点 A, B を通る直線を母線とする直円柱 Υ''_A を考える。明らかに，点 C は Υ''_A の外に在る。一方、M は2点 A, B で Υ''_A に内接しているから、M は Υ''_A の外には出ない。この2つの事実は矛盾する。よって、$C = C'$ すなわち，M が Υ_A に接している部分集合 C_A 上の点は線分 AB を直径とする Υ_A の平行円 $C(O;r)$ 上になければならない。ゆえに，M は直円柱 Υ_A に平行円 $C(O;r)$ で内接している。 □

定理4の証明の続き:

$\Sigma(O;r)$ を点 O を中心、$r = AO$ を半径とする球面とする。$\Sigma(O;r) \subset M$ を示す。

球面 $\Sigma(O;r)$ 上の任意な点 $X(\neq A, B)$ に対して，3点 A, B, X を通る $\Sigma(O;r)$ の大円 C_{ABX} を底線（平行円）とする直円柱 Υ_X を考えると M は Υ_X に2点 A, B で接しているから，上の補題で示したように M は Υ_X に A, B を通る Υ_X の平行円，すなわち，Υ_X の大円 C_{ABX} で内接している。したがって，X は M 上の点となる。よって，$\Sigma(O;r) \subset M$ が示された。

$\Sigma(O;r)$ は連結であり，M がコンパクトだから，補題1によれば，$M = \Sigma(O;r)$ となる。 □

References

[1] J. Hadamard, *Les surfaces a courbures opposses et leurs lignes geodesiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–73.
[2] 平川　淳康, 球の特性に関する問題に就て, 高数研究 **8** (1943), 1–2.
[3] 井川　満, 伊関兼四郎, 伊藤清三他, 新編　数学 B, 数研出版株式会社, 2003.
[4] 伊藤武廣, 荻上紘一, 原田実, 中学・高校の数学教師に期待される数学的要素ー球とは何かー, 東京学芸大学紀要 **45** (1993), 73-74.
[5] 伊藤武廣, 前田定廣, 平面や球面を美しく表現してみよう, 信州大学教育学部紀要 **118** (2006), 95–103.
[6] K. Nomizu and S.Kobayashi, *Foundations of Differential Geometry II*, Interscience Publshers, John Wiley and Sons, 1969.
[7] 大槻富之助, 微分幾何学, 朝倉書店, 1961.
[8] 岡本和夫, 小関煕純他, 未来へひろがる　数学1, 新興出版啓林館, 2006.
[9] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, California 92101, 1966.
[10] 佐々木重夫, 微分幾何学ー大域的考察を中心にー, 支文堂, 1932.
[11] 清水静海、船越俊介他, わくわく算数4上, 新興出版啓林館, 2005.
[12] 内田伏一, 集合と位相, 裳華房, 1989.
[13] K.Yanagihara, *On a some Properties of Simply Closed Convex and Surfaces*, Tôhoku Suénce Reports **4** (1915).

(2006年12月15日　受理)