ＡＨＰにおける一対比較法に関する一考察

――官能検査における一対比較法の利用――

飯田 洋市

１．はじめに

複雑な状況下にある問題を解決するために，最終的な選択の対象となる複数の代替案の中から 1 つに絞り込むといった状況は日常的に多く存在する。この絞り込みのひとつの方法に意思決定者の直感や経験を生かす AHP（Analytic Hierarchy Process)がある。これは 1971 年に Saaty により提唱された手法である。AHP はその後いろいろな拡張を経て，現在では ANP（Analytic Network Process）という手法へと Saaty 自身により拡張されている[1][2]。そして今日までに，[3]や[4]にみられるように多くの適用例が報告されている。

さて AHP には内部従属法や外部従属法などいくつかの拡張版があるが，いずれの手法においても特徴的なのが，与えられた複数の評価基準あるいは複数の代替案を比較し順序づけするために一対比較法が採用されていることである。そしてたとえば[6]に「AHP といわれる手法は，数理心理学の成果を継承し，意思決定問題に適用できるような数学的枠組みの構築として登場したのである」とあるように，人間の心理を数量化するための古典的な手法のひとつである一対比較法を採用したことで，AHP は意思決定者の直感や経験を反映する意思決定法という地位を確立している。そしてこのことにより，今日まで高い評価を得て多くの適用例を生んでいるといえる。

またこのような解釈を抜きにしても，たとえば 3 個以上のものから 1 つを選択する局面で，2 つずつ比べながら最終的に 1 つを選ぶ行動や，まず 2 つに選択肢を絞りその上でそれらを比べて最終的に 1 つを選ぶ行動は，人間の自然な行動として受け入れやすい。そこで 2 つを比べる作業を繰り返しながら複数の項目間に順序づけを行う一対比較法は，人間の自然な行動として受け入れやすい手法ということができる。

しかしながら，AHP における一対比較法による順位づけが，結果として意思決定者の直感や経験を本当に正しく反映しているかについては，AHP 手法に熟練しない初心者にとってはいささか不安が残るところである。実際これを補うための先行研究もみられる（[7]－[11])。本論文の目的は，AHP の源泉である心理学や官能検査などにおける一対比較法を吟味することで，AHP の長所を残しながらもそれらの手法を部分的に取り入れ，作成した一対比較表やその結果に

ついて意思決定者（特にAHPの初心者）が信頼性をより実感できる方法を提案することである（第5章)。

2．研究動機

AHPによる意思決定法の特徴は，評価基準や代替案などの順位づけのために一対比較を採用しているところである。比較数が増大することによる意思決定者の負担を軽減するために提案された絶対評価法とよばれるAHPの手法などでは，意思決定までの過程の一部で一対比較法は利用されないものの，一対比較法がAHPの核であることに違いない。

ところでAHPにおける一対比較法の正当性を示すためには，物理的現象への適用例などが使われている（たとえば[12, p.25]）。しかし本来は定量的に測ることが出来ない評価基準や代替案について，一対比較により得られる一対比較表が本当に正当性を期待できるかは疑問が残るところである。ところでAHPの提唱者であるSaatyは整合度C.I.(Consistency Index)を提案している。またこれ以外にも整合性を表す指標として，ランダム整合度C.R.や階層整合比Hなどが提案されている[12]。ただ現在までに，それらの有効性を示す決定的な数学的解釈は与えられていない。

もちろん良く知られているように，Saatyの経験から，整合度C.I.が0.1以下（場合によっては0.15以下）であれば，得られた一対比較表に整合性があるとみなしてよいとされている。そしてたとえば[13]で「要素の数nが3のときは正確な分布に基づき，nが4以上のときは2500のサンプルをもとに推定した分布から，経験則が十分満足いくものであることがわかっている[14]」とあるように，このC.I.の条件は統計的に信頼性が高いことが知られている。

ところで理想的な一対比較表，すなわち完全な整合性を持つ一対比較表は次のようにして逆算できるものといえる。すなわち一対比較表より計算された重要度（第3章で代表的な計算法として固有値法を解説する）から得られる一対比較表が，もとの一対比較表に一致するときに理想的な一対比較表といえる。このような一対比較表は完全整合度をもつと呼ばれる。

たとえば，3つの評価基準A，B，Cについて一対比較表から算出された重要度の比A : B : C = 9 : 3 : 1が得られたとする。この事実から表1の一対比較表を得る。そしてこれがもとの一対比較表と一致するとき，もとの一対比較表は完全整合度を持つという。

表1

	評価基準A	評価基準B	評価基準C
評価基準A	1	3	9
評価基準B	1/3	1	3
評価基準C	1/9	1/3	1

第 3 章で解説するように，一対比較表が完全整合度となるための必要十分条件は C.I.=0 である。そしてすぐわかるように，完全整合度を持つ一対比較表は理想的な一対比較表であるが，一対比較の尺度の性質からほとんど起こらない（表 2 を参照のこと）。さて実際の AHP では C.I.の数値により整合性を検討することになるが，もし C.I.の値が 0.1 を超える場合は，初めから一対比較をやり直すことになる。これについては，たとえば循環関係の存在を確認し，それらを欠損値とし，不完全一対比較行列に対するハーカーの方法を適用するなどの方法が提案されている（[7，p.130]）。

また 2006 年 12 月 2 日に名城大学で開催された JSAHP2006（主催　日本オペレーションズ・リサーチ学会意思決定法常設研究部会）の講演会の中で，Saaty 自身が，C.I.の評価に関していろいろ議論があるが，必ずしも C.I.を 0 に近づけようとする必要はないと話されていた。これを著者は次のように解釈した。つまり，一対比較表はあくまでも意思決定者の意思を反映して得られたものであることに価値がある。数値を調整することは，その意思に手を加えることになる。C.I.が大きい数値になる場合は意思決定者の混乱や矛盾を含む可能性が高いので結果を疑う必要がある。しかし 0.1 以下の場合は，矛盾も含めてその人の直感や経験を反映した結果であり，その事実を尊重すべきである。

ところで AHP は簡便であることが魅力の一つといえる。従って結果を導くまでの手法そのものは複雑にしないことが実用上大切である。ただ AHP の初心者にとっては，より多くの情報が与えられたほうが，最終的に得られた結果が自分の直感や経験を反映しているという感覚を持つことができる。これらの視点から一対比較表が完全整合に近いことを示すよりも，それが不整合とはいえないことを示すことが望まれる。この視点から AHP の一対比較法とその源泉である心理学や官能検査にある一対比較法を比較し，より心理的に信頼性を高められる方法を提案することの意義が大きい。

3．AHP の概要

AHP にはいくつもの応用と拡張が考案されているが，ここでは本論文を展開するにあたり必要最小限といえる Saaty がはじめに提唱した AHP の方法（従来型と呼ばれる）について解説する。たとえば[12]，[15]－[19]が詳しい。

意思決定にはまず問題（最終目標）がある。そしてこれに対して最終的な選択の対象となる代替案を考える。その後に問題を解決するための評価基準を考え，この基準をもとに代替案を 1 つに絞り込む。これらの関係を図に表すと図 1 のようになる。この先を説明するために，ここでは問題に対して 3 つの評価基準と 4 つの代替案があるものとする（図 2)。このように階層構造で表現するところから AHP と命名されている。この階層図を作成することが AHP による意思決定法の第 1 段階となる。この階層図を作成するためには，与えられた問題

を整理する必要があり，この作業が AHP を適用する意義のひとつになっている[19, p.19]。なお各レベル（問題を除いて）の要素数は 7 から 9 が最大許容数とされている。たとえば項目が 9 あると一対比較の回数は ${}_9C_2 = 36$ となる。

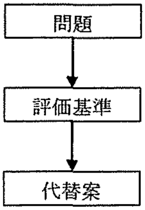


図 1

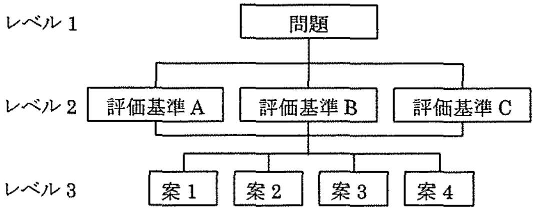


図 2

次に第 2 段階として階層図の各レベルの要素を，1 つ上のレベルの各要素からみて一対比較を行い，それぞれの一対比較表を完成させる。一対比較の尺度は何種類か提案されているが，表 2 は Saaty による[7, p.7]からの一部抜粋である。

表 2

定義	重要度 (一対比較値)
i と j が同じぐらい重要 (equal importance)	$a_{ij} = 1$
i が j よりやや重要 (moderate importance)	$a_{ij} = 3$
i が j よりかなり重要 (strong importance)	$a_{ij} = 5$
i が j より非常に重要 (very strong importance)	$a_{ij} = 7$
i が j より極めて重要 (extreme importance)	$a_{ij} = 9$
$a_{ij} = 2$，4，6，8 は上の 2 つの中間の値とする	
$a_{ii} = 1$，$a_{ji} = 1/a_{ij}$	

上記より AHP の一対比較法は比例尺度 (ratio scale) であることがわかる。また一対比較表は対角成分が全て 1 の逆数対称性を持つ。したがって各評価基準についての一対比較表は表 3 のように書ける。ここでたとえば A : B = k_{12} : 1 である。

表 3

目的	評価基準 A	評価基準 B	評価基準 C
評価基準 A	1	k_{12}	k_{13}
評価基準 B	$1/k_{12}$	1	k_{23}
評価基準 C	$1/k_{13}$	$1/k_{23}$	1

各評価基準に対する代替案についての一対比較表は表 4 のようになる。たとえば表 4 の左上の表では，評価基準 A に関して代替案の間の重要度の比を求めている。

表 4

基準A	案 1	案 2	案 3	案 4
案 1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
案 2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
案 3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
案 4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

基準B	案 1	案 2	案 3	案 4
案 1	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}
案 2	$1/b_{12}$	1	b_{23}	b_{24}
案 3	$1/b_{13}$	$1/b_{23}$	1	b_{34}
案 4	$1/b_{14}$	$1/b_{24}$	$1/b_{34}$	1

基準C	案 1	案 2	案 3	案 4
案 1	1	c_{12}	c_{13}	c_{14}
案 2	$1/c_{12}$	1	c_{23}	c_{24}
案 3	$1/c_{13}$	$1/c_{23}$	1	c_{34}
案 4	$1/c_{14}$	$1/c_{24}$	$1/c_{34}$	1

基準D	案 1	案 2	案 3	案 4
案 1	1	d_{12}	d_{13}	d_{14}
案 2	$1/d_{12}$	1	d_{23}	d_{24}
案 3	$1/d_{13}$	$1/d_{23}$	1	d_{34}
案 4	$1/d_{14}$	$1/d_{24}$	$1/d_{34}$	1

さて最終段階として代替案の順序づけを行う。この順序づけは第 2 段階で意思決定者により求められた一対比較表から計算で求める。なお一対比較表を行列で表したものを一対比較行列とよぶ：

$$\mathrm{K}=\begin{pmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ 1/k_{12} & 1 & k_{23} \\ 1/k_{13} & 1/k_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

ところで AHP の代表的な計算法には固有値法と幾何平均法がある。これらの手法を意味づける数学モデルも考案されている（たとえば[6，p.17]）。この他に対数最小二乗法，調和平均法，左固有ベクトル法などもあるが，実用上はいずれを採用しても結果への影響はほとんどないとされている。また[20，p.161]によると，固有値法での結果が人々の支持を得ている。そこでここでは固有値法を説明する。表 3，表 4 から得られる一対比較行列を以下とする：

$$\mathrm{K}=(k_{ij}),\ \mathrm{A}=(a_{ij}),\ \mathrm{B}=(b_{ij}),\ \mathrm{C}=(c_{ij}).$$

ここで上記の一対比較行列の主固有値（絶対値が最大の固有値）と正規化した主固有ベクトル（主固有値に対する固有ベクトル）を求める。ここでの正規化されたベクトルとは，ベクトルの成分の和が 1 となるようにベクトルの成分を調整したものである。また主固有値ベクトルの一意性と主固有ベクトルで正ベクトルの存在はペロンの定理により保証されている[20]。ちなみに固有値をパソコンで求める方法としてはべき乗法などがある[21，p.108]。また Excel のような表計算ソフトではヤコビ法なども利用できる。しかし幾何平均法に比べるとかなり複雑な計算を強いられることになる。ここでは以下が得られたとする：

主固有値　　$k_{\max}$, $a_{\max}$, $b_{\max}$, $c_{\max}$,

正規化された主固有ベクトル　$\boldsymbol{k}=(k_i)$, $\boldsymbol{a}=(a_i)$, $\boldsymbol{b}=(b_i)$, $\boldsymbol{c}=(c_i)$, ただし

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = \sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i = \sum_{i=1}^{4} c_i = 1.$$

このとき次のようにして代替案の目的に対する重要度が求められる。

$$\begin{pmatrix} \text{案1の重要度} \\ \text{案2の重要度} \\ \text{案3の重要度} \\ \text{案4の重要度} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

この結果，すなわち得られた重要度の大きさにより 4 つの代替案の順位づけを行うことになる。重要度が大きいほど，意思決定者の要求を満たしている。またさらに重要度の大きさや一対比較の結果を分析することで，代替案の順位づけに対する理由（シナリオ）を検討することもできる。

さてこの一連の計算の意味は次のように解釈できる。すなわち，問題（最終目標）に対して得られる理想的な代替案の重要度を 1 とし，この重要度 1 を現実的な代替案（この場合は 4 つ）へ振り分ける。主固有ベクトルを正規化する理由はここにある。

ところで一対比較表が不整合でないこと，たとえば矛盾を含んでいないことは，最終的に得られる結果の正当性にかかわることになる。この一対比較表の整合性を測る尺度として，たとえば Saaty により提案されている整合度 C.I.がある。これは次式により定義されている：

$$\text{C.I.} = \frac{\text{主固有値}-\text{項目数}}{\text{項目数}-1}.$$

項目数とは一対比較を行った対象の個数である。言い換えると，一対比較行列の行（あるいは列）の数である。たとえば一対比較行列 K と A についての整合度はそれぞれ次のようになる：

$$\text{C.I.} = \frac{k_{\max}-3}{3-1}, \qquad \text{C.I.} = \frac{a_{\max}-4}{4-1}.$$

すでに第 2 章で注意したように，この C.I.が 0.1 以下（場合によっては 0.15 以下）であれば一対比較から得られた一対比較表に整合性があるとしてよいとされている。ここで「主固有値≧項目数」であることから C.I.≧0 であり，特に C.I.=0 は完全整合度のときに限ることがわかる。

4．心理学・官能検査における一対比較法

AHP における一対比較法の発想は社会心理学に由来している。そこで心理学,

や官能検査における一対比較についてこの章では検討する。このことの意義は，たとえば[22]にみられるように一対比較を行うための基準は色々考えられるが，本来の一対比較法は心理学に源泉をもつことによる[23]。もちろん一対比較により得られた最終結果が合意できるものであれば，どのような基準による一対比較であったとしても意義が大きい。

さて官能検査における一対比較法には，たとえば次表のような手法がある。

表 5　代表的な一対比較法

判断のしかた	得られる尺度	手法	備考
順位をつける	順位尺度	一意性の検定	
	距離尺度	サーストンの方法	
	比例尺度	ブラッドレーの方法	
順位と，その差の評点をつける	距離尺度	シェッフェの方法	往復判断※は禁止 1 人は 1 組だけ比較
		変形 1 ：浦の変法	往復判断は禁止 1 人で全組合せ比較
		変形 2 ：芳賀の変法	往復判断は任意 1 人は 1 組だけ比較
		変形 3 ：中屋の変法	往復判断は任意 1 人で全組合せ比較

※　往復判断とは，A と B を比較する場合に，最初に A を見て次に B を見ることで 1 回の判断をし，今度は最初に B を見て次に A を見ることでまた 1 回の判断を行うことである。

以下[24]－[26]を参考に，それぞれの手法におけるパネリストによる比較方法（一対比較）について簡単にまとめる。最終的な順序づけを求めるには，この後に統計的な処理が必要になるが本研究の範囲を超えるのでここでは割愛する。

（1）一意性の検定

1 人のパネリストが行った一対比較のデータについて，偶然だけで順位づけされたわけではないこと，言い換えるとそのデータによる順位が有意な順位と考えてよいか検定する方法である。

ここで 3 つの試料 A，B，C について好みの順序を比較することを考える。このとき A と B を比較して $A>B$ と判断し，B と C を比較して $B>C$ と判断したとする。さらに C と A を比較して $A>C$ と判断されれば，$A>B>C$ の順位を得る。しかし C と A を比較して $C>A$ と判断されることもある。この場合は順位関係が一巡するので，試料間に順位をつけることができない（図を参照のこと）。

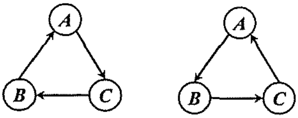


図3 一巡三角形

A→B は A よりも B を好むことを示すとする。

従って試料間に順位がつけられるためには，一巡三角形がなるべく少ないことが必要である。さて試料の数を k とする。このとき図のように描いた多角形の各頂点から外に向かって出ている矢印の数を a_i とすると，一巡三角形の数 d は次式で与えられる（図4）。実際，異なる三角形の個数は異なる試料を3個選ぶ組合せに等しい。また一巡三角形でない三角形であるための必要十分条件は，3つの頂点のうち丁度一つの頂点から外に向かって出る矢印が2本あることである。従って，一巡三角形の数 d は，次のように a_i の式で与えられる。

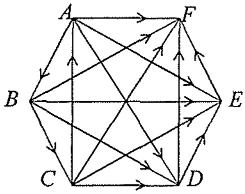


図4 順位関係図

[公式1]
$$d = {}_kC_3 - \sum_{i=1}^{k} {}_{a_i}C_2 = \frac{1}{6}k\times(k-1)\times(k-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} a_i\times(a_i-1)$$

そしてもし判断者が1人で一対比較を行った場合，表6の d の値のとき有意水準5%で「判断者に識別力がないこと」を棄却できることが知られている。なおAHPの一対比較法では，項目数は8から9までが許容範囲と考えられていることから，表6では試料の数 k を9まで記載している。[12, p.72]では項目数の限界については7以下を推奨し，この項目数を上回る場合の手法を紹介している。

表6

k	5以下	6	7	8	9
d	有意水準に達しない	1以下	3以下	7以下	14以下
${}_kC_3$	10以下	20	35	56	84

なお検定で有意にならなかったときは，①判断者はこの程度の試料の差を識別する能力がない ②そもそも比較する試料の間に差がない ③比較する資料に差はあるものの良し悪しについて1次元的に並べられない，のいずれかの解釈がとられることになる。また一巡三角形の数を用いて識別能力の目安を与えるものに，次の一意性の係数（coefficient of consistency）ξ がある：

$$k\ \text{が偶数のとき，}\quad \xi = 1 - \frac{24d}{k^3-4k},\qquad k\ \text{が奇数のとき，}\quad \xi = 1 - \frac{24d}{k^3-k}.$$

（2）シェッフェの一対比較とその変法

まずシェッフェの一対比較について解説する。

t 個の試料 A_1, A_2, …, A_tを，N 人のパネルで評価する場合を考える。t 個から 2 個ずつ組み合わせる組合わせの数は $t(t\text{-}1)/2$ 対であるが，2 個の試料の順序を考慮に入れると，$t(t\text{-}1)$ 対になる。そこで，N 人のパネリストをランダムに $t(t\text{-}1)$ 群にわける。1 群のパネリストの数は，$n{=}N/t(t\text{-}1)$ 人である。次に，このパネルの各群に，$t(t\text{-}1)$ 対の試料の各対をランダムに一対ずつわりあてて判断させる。従って，各パネリストは，試料の対 (A_i, A_j) を i,j の順で 1 回だけ判断するわけであり，試料の 1 つの対 (A_i, A_j) に対しては，$n{=}N/t(t\text{-}1)$ 個の判断が得られることになる。ただし，A_i と A_j の間の判断の往復は許さない。

また各パネリストは，試料 A_i と A_j をこの順序で比較するとき，次の尺度で判断する（表 7)。2 つの試料に差がない，すなわちゼロカテゴリーを許すという特徴がある。このほかに，2 から－2 点や 4 点から－4 点を採用することもできる。

表 7

A_i が A_j に比べて非常に良いとき	3 点
A_i が A_j に比べてかなり良いとき	2 点
A_i が A_j に比べて少し良いとき	1 点
A_i が A_j と同じ良さであるとき	0 点
A_i が A_j に比べて少し悪いとき	－1 点
A_i が A_j に比べてかなり悪いとき	－2 点
A_i が A_j に比べて非常に悪いとき	－3 点

シェッフェの一対比較法には 3 つの変法（芳賀変法，浦変法，中屋変法）がある。変法に対してシェッフェの一対比較法をシェッフェの原法と呼ぶ。シェッフェの原法では，1 人のパネリストは，1 組の試料の組合せ(A_i, A_j)の 2 つの順序(A_i, A_j)と(A_j, A_i)のうち，一方だけを判断した。この 2 つを区別しないで比較する方法，すなわち判断の往復を任意とした場合を芳賀変法である。

また原法では 1 人のパネリストは，1 組の試料の組合せ(A_i, A_j)の対，すなわち(A_i, A_j)あるいは(A_j, A_i)を 1 回だけ判断した。これを 1 人のパネリストが，すべての組合せの両方の順序の対を 1 回ずつ比較する方法を浦変法である。たとえば N が少数の場合に利用される。

原法において(A_i, A_j)と(A_j, A_i)の順序を考慮しない場合が芳賀変法であった。浦変法において順序を考慮しない方法が中屋変法である。

（3）サーストンの方法

シェッフェの方法ではその判断の際に，対にした 2 個の試料を比較して，両者の差の程度を採点を使って表現した。サーストンの方法では両者の間に順位をつけるだけである。順位をつけられないという判断も許す。たとえばパネリ

ストは1組の試料の組合せ(A_i, A_j)について，どちらが良いかのみを判断する。
サーストンの方法は，心理学の分野でサーストンにより開発され，モステラーにより発展されたものであり，計量心理学では代表的な手法の1つである。[23, p.92]には次の注意がある。「一つの刺激対に対する判断数は 50 個以上は必要である。これを同一人から求めてもよいし，また一人一回ずつ求めてもよい。または両者の混合であってもよい」「二者択一不能の判断は，0.5 回分として等分する」「刺激対の中に，好きまたは嫌いの判断が 100%となる対が一つでもできるのは望ましくない」

（4）ブラッドレーの方法

サーストンの方法において同順位を許さないものが，ブラッドレーの方法である。ゼロカテゴリーを許すシェッフェの方法でゼロの判断が多くなる場合は差の検出が悪くなるおそれがあり，この場合はブラッドレーの方法が適している。

（5）トーガソンの方法

一対比較法は判断が容易であり判断の再現性がよい。しかし対の数が多くなるために労力などがかなりかかる。トーガソンは比較する対の数を減らす不完備型の行列を用いる4つの方法を提案している。詳細については[26]。

5．AHPへの応用

この章では一対比較により得られた一対比較表が不整合でないと考えてよいための 1 つの方法を提案する。この方法は心理学や官能検査における一対比較法をもとにしている。またこの方法を適用することで，同時に評価基準や代替案のひとつの順序づけも行うことができる。ただしこれらは距離尺度ではなく順位尺度であり，また同順位を許すものである。従って実際の場面では，AHPの手法により得られた距離尺度による順位への補足的な立場で利用されることになると考えている。

たとえば比較した結果を検討するとき，その結果を導く過程の中に無視できない要素がある場合，改めて内部従属法や外部従属法などを検討することになる。しかし従来の方法によるAHPの結果について，どのような場合に，内部従属法や外部従属法を活用すべきかを数値として明示したものは見当たらない。ここで提案する方法のひとつの意義がここにある。

ところで，C.I.の値が大きくなる場合について，木下は[7, p.126]で，項目間において一巡三角形が存在することはもちろんのこと，推移律を満たしているだけではC.I.の条件を満たすことができないことを示している。なおAHPでは一巡三角形を循環三角形と呼ぶ[9]。ここでは一番簡単な例として，3項目（A, B, C）の例を挙げる。

表 8

	A	B	C
A	1	9	5
B	1/9	1	3
C	1/5	1/3	1

表 8 においてAはBとCよりも評価が高く, BはCより評価が高いことから, A > B > C の関係が想像できる。しかし C.I.=0.162 である。C の列より A:B:C=5:3 : 1 を得る。これより完全整合度となるためには, A : B ＝ 5/3 : 1 ≒ 1.7 : 1 でなければならない。しかし表では A : B＝9 : 1 となっている。このように C.I. は必ずしも推移律が成立することを保障するものではないことがわかる。

またここで木下は[7, p.128]で一巡三角形が推移関係を作らない理由として次を挙げている。これらも再検討する上で重要な視点である。① ルールによる循環関係 ② 自然態度の中の循環関係 ③ 評価基準間の循環関係。そしてすでに第 1 章で解説したように, C.I.が大きい場合は循環関係の存在を確認し, それらを欠損値として不完全ペア比較行列としてハーカーの近似を用いるという方法も提案している。これらは AHP のジレンマのひとつとされている。

また[21, p.121]では矛盾する一対比較値の探索として, 中島の方法と刀根の方法が紹介されている。中島の方法ではすべての一対比較値をひとつずつ欠損値としてハーカーの欠損値のある場合の重要度と C.I.の計算を行い, もっとも C.I. が改善された一対比較値を矛盾する一対比較値の候補とする方法である。刀根の方法は, もとの一対比較表から得られた重要度をもとに, 新しく一対比較表を作成し, それらの各成分の比率を比べることで矛盾する一対比較値の候補を探すという方法である。

さてここで一対比較により得られた一対比較表が不整合でないと考えてよいための 1 つの方法を解説する。第 4 章（1）で一意性の検定について解説したが, この手法を AHP の一対比較表に適用する。すわなち, AHP の一対比較表に含まれる一巡三角形の個数を調べることで, その整合性を検定する。一意性の検定のところでは, 比較項目が 1 次元的に順序付けられているとして, 判定者の能力について検定したが, ここでは判定者に能力があるものとして, 比較項目が 1 次元的に順序付けられるとしてよいか検定する。実際には判断者が一対比較により正しく順位づけできる能力を持つかあらかじめ検定する必要がある。しかし, ① 何について比較させると目的とする比較項目について正しい判断が出来ると判断するか難しい ② 意思決定者が正しい尺度を持っていないと考えると, そもそも AHP の一対比較の意義が損なわれる ③ AHP は簡便であるところが魅力であるが, 前段階で検定を行うことは AHP の手順を複雑にしてしまう, などの理由から, ここでは判断者は正しく順位づけする能力があるとする。

さて AHP の一対比較法は, 官能検査でいうと, 往復判断を許す場合のシェッ

フェの方法もどきである（1人で判断を行うのでシェッフェの方法，及びその変法ではない)。そこでまず，この一対比較の結果を重要度の大小だけで判断した結果に置き換える。たとえばAとBがA：B＝1：3と判断されているとき，Aを0，Bを1とする。これはサーストンの方法もどきといえる（引き分けを許すことに注意)。その後，これを利用して一巡三角形の個数を算出し，その個数により整合性を表6に従って判断する。実際には次の手順で計算する。まず引き分けがない場合の手順を解説する。項目数を n $(n \geq 3)$ とする。

手順1．AHPで得られた一対比較表の各行において，評価値が1未満（すなわち分数）である項目の個数 $a_i (1 \leq i \leq n)$ を数える。

手順2．一巡三角形の個数を求める公式1より一巡三角形の個数 d を求める。

手順3．表6より危険率5%で不整合であることを棄却できるか調べる。

手順4.

（1）棄却できる場合は，AHPで得られた一対比較表の各行において，評価値が1以上である項目数を比較することで順位づけを行う。1以上の項目数が多いほど上位とする。またこの際，同順位を認めるものとする。

（2）棄却できない場合は，一巡三角形の関係となっている項目を探し，それらについて再度一対比較を行う（サーストンの方法もどき)。そして手順1－3により不整合であることが棄却できれば（1）の方法で順位づけを行う。そうでない場合は，項目間に内部従属性や外部従属性などの関係がないか検討する。

さてここで具体例により解説する。まずAHPの一対比較表と，その各行において1未満の値となる項目数を記入したものが以下の表9である。

表9

基準A	案1	案2	案3	案4	案5	1未満
案1	1	2	2	3	5	0
案2	1/2	1	1/2	2	4	2
案3	1/2	2	1	1/2	3	2
案4	1/3	1/2	2	1	2	2
案5	1/5	1/4	1/3	1/2	1	4

ここでC.I.=0.092284である。Saatyの意味では整合性があるといえる。さて次に最終列「1未満」を利用して一巡三角形の個数を計算する。

$$d = {}_5C_3 - \frac{1}{2}\{0\times(0-1)+2\times(2-1)+2\times(2-1)+2\times(2-1)+4\times(4-1)\} = 10-9=1$$

従って一巡三角形は1個ある。図5であることも，この場合には容易にわかる。また一意性の係数は0.8である。この例では項目数が少ないため表6より不整合であることを棄却できない。しかし，意志決定者の判断にもよるが，例えば一巡三角形の個数が 1 個という事実からここでは整合性があると考えることにする。そこで列「1以上」を追加し，これによる順位をつけたものが表10である。

表10

基準A	1未満	1以上	順位1
案1	0	5	1
案2	2	3	2
案3	2	3	2
案4	2	3	2
案5	4	1	5

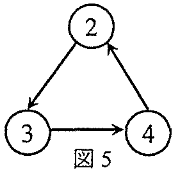


図5

一方でAHPによる重要度及び順位づけは表11の順位2となる。ここでは固有値法を採用した。

表11

基準A	重要度	順位2	順位1
案1	0.370	1	1
案2	0.200	2	2
案3	0.197	3	2
案4	0.170	4	2
案5	0.063	5	5

この結果を比較すると，Saatyが示すように整合性があり，さらに順位も問題ないことがわかる。以上よりAHPの一対比較表から算出した重要度と順位づけは，意思決定者の直感や経験を問題なく反映できていると結論できる。

さて表9で，案2：案3＝1：2であるところを 案2：案3＝1：5に変更したものが表12である。これについて検討する。

表12

基準A	案1	案2	案3	案4	案5	1未満
案1	1	2	2	3	5	0
案2	1/2	1	1/5	2	4	2
案3	1/2	5	1	1/2	3	2
案4	1/3	1/2	2	1	2	2
案5	1/5	1/4	1/3	1/2	1	4

ここでC.I.=0.21075（> 0.1）である。Saatyの意味では整合性に問題がありそうだといえる。ところでこの一対比較表における一巡三角形の個数は 1 個であ

ることが容易にわかる。そして順位は表 13 のようになる。

表 13

基準A	重要度	順位 2	順位 1
案 1	0.343	1	1
案 2	0.166	4	2
案 3	0.260	2	2
案 4	0.172	3	2
案 5	0.058	5	5

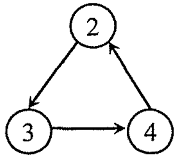


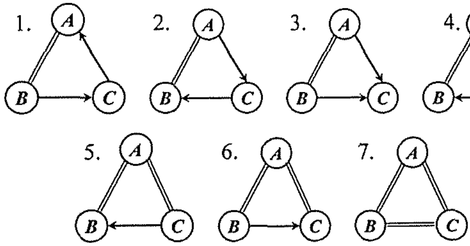
図 6

この結果を検討すると，C.I.からはこの一対比較表は再検討を要するところだが，今回提案している方法で検証すると許容の範囲内としてもよさそうである。むしろこれらの結果から，案 1 と案 5 の順位は確定的であるが，そのほかの案にはそれほど差異がないと捉えた方が良いといえる。もちろんこの結果に不満であれば，改めて案 2，3，4 の間で一対比較を行うことも出来る。

この方法はサーストンの方法もどきにより，順位づけをしたところに意味がある。しかしこれはあくまでも参考とすべき情報を与えるものであり，決定的な順位を与えるものでない（同順を許している)。また内部従属性や外部従属性を考慮するきっかけとなることでも意義があると考えられる。AHP の利点は合意性にある。一巡三角形の存在を調べることは，この意思決定法に対する不安を解消する 1 つの方法である。

ところでここまでは一対比較において「同じぐらい重要」，すなわち自分自身との比較以外の場所に 1 が無い場合を扱ってきた。ここで対角線上以外に「同じぐらい重要」（以下，引き分けとよぶ）を含む場合を解説する。なお，1 つの列に 2 つ以上の同じ一対比較値（≠1）があれば，それらに対応する項目は引き分けとも考えられるが，ここでは引き分けとしない。

さて 3 つの項目 A, B, C に引き分けがある場合を考えると次の 7 種類になる。



A→BはAよりもBを好むことを示すとする。

図 7

ここで 1，2，5，6 は矛盾が起こっていることがわかる。しかしここでは一巡三角形の仲間として扱う。[9]では 1 と 2 を準循環三角形と呼んでいる。これ以外，すなわち 3，4，7 は正しい順序づけがなされている。これらの定義のもとで，引き分けを含む場合の一対比較表における一巡三角形の個数を計算する方

法を解説する。

　ところで，手順 1，2 によると，1，2，5，6 は一巡三角形として正しく数えられ，4 は非一巡三角形として正しく数えられる。しかし 3 と 7 は一巡三角形として誤って数えられる。そこでこの手順で一巡三角形の個数を計算した後，これらの個数を補正する必要がある。ここでは 5，6，7 のパターンが起こる場合は，これらに関しては一対比較をもう一度行うか，内部あるいは外部従属法などの検討を提案する。項目数にもよるが，この場合は一巡三角形の観点からかなり構造が複雑になっていると考えられるからである。この立場に立つと，AHP の一対比較で同程度重要という判断は出来る限り回避した方がよいと思われる。

手順 1’．いずれかの一行に 3 個以上の一対比較値 1 がある場合は，1 に対応する項目間の一対比較を再検討する。その後，手順 1，手順 2 を行う。

手順 2’．一行に 2 個の一対比較値 1 がある場合，その項目の二行を調べ同時に 1 未満となっている項目数 c を数える。

手順 3’．非一巡三角形の個数 $d'=d-c$ を求める。その後，手順 3，4 を行う。

　さて以下具体例で手順 2’を解説する。表 14 では 5 項目（A，B，C，D，E）を対象とした一対比較表の一部分である。この表では A と B が同じぐらい重要という評価を受けている。そして A と B の行を比較すると同時に 1 未満となっている項目は D のみである。従って $c=1$ を得る。

表 14

	A	B	C	D	E
A	1	1	1/2	1/3	3
B	1	1	2	1/3	3

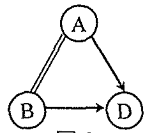


図 8

　最後に，一巡三角形が存在しない自明なパターンに関して次の定理を得る。

定理 1　n 個の項目に関する AHP の一対比較表について，各行の一対比較値が 1 未満の数である項目の個数からなる集合を S とする。このとき，$S=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ であれば，この一対比較表には一巡三角形は存在しない。

補題 1　n を 3 以上の自然数とする。このとき次が成り立つ：

$$ {}_nC_3 = \sum_{k=2}^{n-1} {}_kC_2 . $$

証明）n に関する帰納法で証明する。$n=3$ のとき ${}_3C_3={}_2C_2$ より成り立つ。$n=t$ のとき成り立つと仮定する。このとき，

$$
{}_{t+1}\mathrm{C}_3 = \frac{(t+1)\times t\times(t-1)}{3\times2\times1} = \frac{t+1}{t-2}\times {}_t\mathrm{C}_3 = \left(1+\frac{3}{t-2}\right)\times {}_t\mathrm{C}_3
$$

$$
= {}_t\mathrm{C}_3 + \frac{3}{t-2}\times {}_t\mathrm{C}_3 = \sum_{k=2}^{t-1} {}_k\mathrm{C}_2 + \frac{3}{t-2}\times\frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{3\times2\times1}
$$

$$
= \left(\sum_{k=2}^{t-1} {}_k\mathrm{C}_2\right) + {}_t\mathrm{C}_2 = \sum_{k=2}^{t} {}_k\mathrm{C}_2
$$

よって $n=t+1$ のときも成り立つことがわかる。従って全ての 3 以上の自然数について成り立つことが証明された。

定理 1 の証明）n 個の項目から三角形を作るために 3 項目とるとり方は ${}_n\mathrm{C}_3$ である。S={0, 1, 2, ・・・, $n-1$}より一巡三角形でない三角形の個数は $\frac{0\times(0-1)}{2}+\frac{1\times(1-1)}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}{}_k\mathrm{C}_2$ である。従って補題 1 より，一巡三角形の個数 d は

$$
d = {}_n\mathrm{C}_3 - \left(\frac{0\times(0-1)}{2}+\frac{1\times(1-1)}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}{}_k\mathrm{C}_2\right) = {}_n\mathrm{C}_3 - \sum_{k=2}^{n-1}{}_k\mathrm{C}_2 = 0
$$

従ってこの一対比較表の一巡三角形の個数は 0 個，すなわち一巡三角形は存在しない。

6．検証と考察

この章では，本研究で提案する方法の有効性を実際の事例で確かめたものを紹介する。一対比較表の事例が多い[12]の中から自明でない例をここでは活用する。なおたとえば[5]は全体を通して一対比較表は3個しか掲載されておらず，なおかつ，一巡三角形に関しては自明なものばかりであった。表 15 は[12, p.65]の表 3.2 である。この表で一巡三角形の個数を求めると，

$$
d = {}_6\mathrm{C}_3 - \frac{1}{2}\{0\times(0-1)+3\times(3-1)+3\times(3-1)+0\times(0-1)+2\times(2-1)+5\times(5-1)\}
$$

$$
=20-\frac{1}{2}(6+6+2+20)=20-17=3
$$

より 3 個を得る。

表 15

	A	B	C	D	E	F	1 未満
A	1	3	3	1	3	7	0

B	1/3	1	1	1/3	1/2	5	3
C	1/3	1	1	1/3	1/3	3	3
D	1	3	3	1	3	5	0
E	1/3	2	3	1/3	1	3	2
F	1/7	1/5	1/3	1/5	1/3	1	5

C.I.=0.043

次に各行を調べることで，A と D, B と C が同程度重要であることがわかる。また A と D の列では 1 未満の値はなく，B と C の列では同時に 1 未満の値となっているところが 3 個ある。後者は図 7 のパターン 3 である（$c=3$)。第 5 章で注意したように，これらは一巡三角形として d で数えられている。そこで $d' = d-c=0$ より，この一対比較表は一巡三角形を 0 個含むことがわかる。項目数 n は 6 なので $d'=0$ は表 6 より 5%の危険率で有意に棄却できる。結論として，かなり納得のいく一対比較表が得られていることになる。この手順を踏むことで，C.I.の値の信頼性をかなり実感することができる。

またこのとき順位については表 16 を得る。ここで重要度は固有値法で算出し，この結果による順位が「順位 2」である。順位に関しても，本論文で提案する方法により信頼性を実感することができる。

表 16

	1 以上	順位 1	重要度	順位 2
A	6	1	0.310	1
B	3	4	0.108	4
C	3	4	0.091	5
D	6	1	0.298	2
E	4	3	0.154	3
F	1	6	0.039	6

7．まとめ

本研究で提案する方法を具体的な事例で調査するために，いくつかの書籍で AHP の一対比較表を調べたところ，ほとんどの場合に定理 1 が適用できることがわかった。これは一対比較表を作成するときに無意識のうちに，1 次元的に順序づけをしているためと考えられる。また項目数が少ない場合，たとえば 3 個や 4 個の場合は，ほとんど自明な結果しか得られないこともわかった。そして項目数が 6 個以上の場合に威力を発揮すると考えられた。このことはまさに第 4 章（1）で紹介した表 6 で項目数 n が 5 以下の場合は一巡三角形の個数 d が 0 であっても有意水準に達しないことと符合するところがある。

また 8 個や 9 個の場合は一対比較を行う回数はそれぞれ 28 回，36 回であり，よく言われるように，意思決定者の疲労による集中力の低下に加え，不整合で

あることを棄却できる一巡三角形の個数が全三角形の個数に比べて小さいことを考慮しても，絶対評価法などを利用した方が良いといえそうである。

また対角線上以外に「同じぐらい重要」を意味する一対比較値 1 がある場合，これを一巡三角形としてひとまとめに考えたが，図 7 のパターン 1，2，5，6 が含まれる場合は，明らかにその一対比較は矛盾を含んでいるので，むしろその部分を積極的に再検討する必要があるといえる。

ところで本論文で提案する方法では同順位を許した(たとえば表 16「順位 1」)。しかしこれに関していくつかの視点で順位をつけることができる。たとえば同順位の場合はその項目間での評価を利用する方法がある。またグラフ理論を利用した通信網における中継基地の重要さを評価する方法に連鎖を考慮した勝ち数による順位づけがある[27，p.18]。なお[27]では AHP の解説を別の章で扱っているが，そこではこの連鎖を考慮した方法に触れていない。AHP の一対比較表において，これらの方法を C.I.の値とともに利用することで，意思決定者に信頼性を実感させる順位づけを与えられると思われる。ただしこのままでは，いずれの方法も細かい部分で汎用性に欠けるところがある。

さて AHP の魅力のひとつに簡単でわかりやすいところがあげられた。表計算ソフトを利用することで少々複雑な要求や計算はできるようになったが，計算過程や最終結果が意思決定者にとって妥当性を実感できるものであるかの配慮は必要である。この観点から，本研究では一巡三角形の個数に着目した一意性の検定を応用した方法を提案した。このような視点は[28]などでもみられる。

最後に，AHP では複数人で意思決定をする場合の方法として集団 AHP や集計 AHP が提案されている。ところで第 4 章で紹介した官能試験では，n 人の判断した一対比較の結果がどの程度に一致しているかを調べて，十分に一致しているならば n 人の判断による合計順位を意味のある順位にするという考え方がある（一致性の検定)。複数人が意思決定する場合に，この立場からの提案ができると思われる。これらについては今後の研究課題である。

謝辞　官能検査についてご教示いただいた奥原正夫先生，そして本論文を読んでたくさんの有益な助言をいただいた野澤昌弘先生に感謝申し上げる。

参考文献

[1] T. L. Saaty：The Analytic Hierarchy Process，McGraw-Hill，1980.

[2] T. L. Saaty：The Analytic Network Process，McGraw-Hill，1980.

[3] T. L. Saaty : Theory and applications of the analytic network process，RWS publications，2005.

[4] T. L. Saaty：The encyclicon，RWS publications，2005.

[5] 刀根薫，真鍋龍太郎編：AHP 事例集，日科技連出版社，1990.

[6] 八巻直一，高井英造：問題解決のための AHP 入門－Excel の活用と実務的例題－，日本評論社，2005.

[7] 木下栄蔵：孫子の兵法の数学モデル，講談社ブルーバックス，1998.

[8] 木下栄蔵：孫子の兵法の数学モデル 実践編，講談社ブルーバックス，1998.

[9] 中西昌武，木下栄蔵：階層分析法 AHP における意思決定ストレスのモデル化に関する研究，土木計画学研究・論文集，No.13，1996，153－160.

[10] 保脇祥充，千田裕司，倉重賢治，亀山嘉正：AHP における一対比較結果に対する信頼性指標の提案，日本オペレーションズ・リサーチ学会誌，Vol.49，No.8，pp.518－524，2004.

[11] K. Taji，K. Matsumoto : Inverse sensitive analysis of pairwise comparison matrices， Journal of Operations Research Society of Japan， Vol.49，No.4 (2006)，332－341.

[12] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法，日科技連出版社，1986.

[13] 竹田英二，サーティの方法によるウェイトの若干の吟味，刀根薫，真鍋龍太郎編，AHP 事例集，日科技連出版社，pp.223－246，1990.

[14] E.F.Lane and W.A.Verdini: A consistency test for AHP decision ,makers, Decision Sciences, Vol.20 (1989), pp.575－590.

[15] 木下栄蔵：入門 AHP－決断と合意形成のテクニック，日科技連出版社，2000.

[16] 木下栄蔵編：AHP の理論と実際，日科技連出版社，2000.

[17] 木下栄蔵：AHP の世界（連載講座），日本オペレーションズ・リサーチ学会誌，Vol.48，No.8－12，2003.

[18] 木下栄蔵：初学者のための AHP 入門講座（連載），第 38 巻第 6 号－第 38 巻第 9 号，第 38 巻第 11 号－第 39 巻第 6 号，理系への数学，2005.

[19] 木下栄蔵：よくわかる AHP－孫子の兵法の戦略モデル－，オーム社，2006.

[20] 関谷一之：AHP と固有値の問題，木下栄蔵編著，AHP の理論と実際，pp.161－182，日科技連出版社，2000.

[21] 高萩栄一郎，中島信之：Excel で学ぶ AHP 入門－問題解決のための階層分析法－，オーム社，2005.

[22] 木下栄蔵：AHP を用いた柔道選手の強さの推定，日本オペレーションズ・リサーチ学会誌，第 51 巻，第 6 号，352－356，2006.

[23] 北村晴朗，安倍淳吉，黒田正典編：心理学研究法，誠信書房，1969.

[24] 日科技連官能検査委員会編：新版官能検査ハンドブック，日科技連出版社，1973.

[25] 佐藤信：官能検査入門，日科技連出版社，1978.

[26] 佐藤信：統計的官能検査法，日科技連出版社，1984.

[27] 大村平：数学思考トレーニング，PHP 研究所，2003.

[28] 鈴木聡士：順位尺度型 AHP による交通案内表示の評価に関する研究－高齢者の交通行動特性を対象として－，第 34 回日本都市計画学会学術研究論文集，889－894，1999.

（諏訪東京理科大学 経営情報学部 准教授
信州大学 全学教育機構 非常勤講師）

2007 年 2 月 23 日 採録決定