平面や球面を美しく表現してみよう

伊藤　武廣　信州大学教育学部
前田　定廣　島根大学総合理工学部

キーワード：球面、測地線、極小曲面、ベロネーズ曲面・多様体

1. 初めに.

本論文では、空間内の馴染み深い曲面である球面や平面の幾何学的でスマートな特徴付けの紹介を通して、小・中学校や高校で算数や数学を教える先生方にリフレッシュしてもらうのと、数学に興味を持ち始めた人達が、さらに、夢を膨らまして数学に挑戦してもらのが狙いである。

一般に（3 次元ユーリッド）空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面というと、最も簡単な平面や平面を皺がよらないよう適当に曲げたものかなと思うであろう。もう少し知識のある人なら、2 次元 xy-平面上のグラフ $y = f(x)$ を曲線と呼んだように、空間 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフを曲面だ、と言われても理解できると思う。

しかし、球面とかドーナツや円筒等も曲面だとは認識しづらいのではなかろうか。その理由の一つは、我が国における曲面に関する教育の曖昧さにあると言える。例えば、球面を例にとってみると、小学校から高校まで“球面”と“球体”が混同して教えられている。多分、一般にドーナツも同様の認識だと思う。かなり正確な人でも、球面は球体の表面（皮）というぐらいの認識であろう。球面（球体）の定義（認識）の変遷を見ると、小学校では“どこから見ても丸く見えるもの”と教え、中学校では、“半円の回転体”と教え、高校で“$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$、あるいは、$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ と表される集合体”と教えているが、いずれの場合も、上で注意したように、“球面”と“球体”が混同して教えられている。これらの球面（球体）の定義は同じであること（数学者はこの事を“同値である”という）が知られている ([2])。別の論文 ([5]) でこの事実の証明を現代風に紹介することにする。

ここで、数学の専門家が使っている空間内の曲面の定義を少し直感的に表現してみると、大きな絨毯のような四角な平面状の紙を空間に投げ入れて得られるもの、ということができる。これを、数学の専門用語では“埋め込み”とか“はめ込み”等と呼んでいる。

とにかく、どうも曲面は無限に多く存在しそうだなという気がしてくる。その無数ある中で我々が最も安心して“美しい”と思える曲面は何であろうか？　やはりその答えは平面と球面であろう。では何故我々はそう感じるのであろうか？　多くの読者はそ

The first author partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 17530653), Ministry of Education, Science, Sports and Culture.

の理由を平面や球面の表示式の簡明さに求めるであろう。高校を卒業した人であれば、平面は $ax+by+cz=d$ と表され、(原点を中心とする) 球面は $x^2+y^2+z^2=r^2$ と表されることを知っている。だからこれらの曲面は美しいのだと。しかしこれは理由にならない。$\mathbb{R}^3$ の座標系 (x,y,z) の取り方はいっぱいあるし、直交座標系である必要性さえない。いくらでもそれらの曲面の表示式を複雑にできる。第一、それらの表示式を知らない小学生でも平面や球面は美しいと感じるであろうし、その感じ方に高校の卒業生と差があるとも思えない…。

そこで、本論文では、先ず、次の問題を考える:「$\mathbb{R}^N$ 内の曲面にどんな幾何学的条件を仮定すれば、平面や球面になるか?」。このような問題に対する答えを与える定理を平面定理および球面定理と呼ぶ。そのような定理を幾何学的に美しく得るために、$\mathbb{R}^N$ に身を置いて、曲面上の曲線を観ることにする。特に、曲面上の最短線 (即ち、測地線) やその一般化である曲面上の円を観てみよう。本論文では、主にこの観点から平面定理や球面定理を紹介する。

2. 曲面上の最短線 (測地線) と円について.

$\mathbb{R}^N$ $(3 \leqq N)$ 内の曲面 M で曲面上の異なる2点 p,q が M 上の最短線 (測地線という) で結べるようなものを考えることにする。このような曲面を"完備"な曲面という。一般に (曲面 M が完備であってもなくても) 点 x とその点を始点とする単位接ベクトル $X \in T_xM$に対して、初期条件 $\gamma(0)=x,\ \dot\gamma(0)=X$ を満たす M 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ (s : 弧長) は、常微分方程式の解の存在性と一意性より (局所的に) ただ一つ存在する。曲面 M には外側の空間 $\mathbb{R}^N$ からリーマン接続 ∇ という微分作用素が導入できるが、M 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ は、2階線形常微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$ の解としても定義できる。

更に測地線を含む概念として曲面 M 上の円がある。M 上の曲線 $\gamma=\gamma(s)$ が、連立線形常微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kY(s),\ \nabla_{\dot\gamma}Y(s) = -k\dot\gamma\ (k \text{ は正の定数}) \tag{2.1}$$

を満たすとき、γ を M 上の曲率 k の円と呼ぶ。任意の正数 k に対して、M 上の任意の点 x、任意の正規直交系 $u,v \in T_xM$ を取るとき、初期条件

$$\gamma(0)=x,\ \dot\gamma(0)=u,\ Y(0)=v \tag{2.2}$$

を満たす曲率 k の円は、測地線の場合と同様に、常微分方程式の解の存在性と一意性により、(局所的に) ただ一つ存在することが分かる。勿論、測地線は曲率零の円と考え円の仲間に入れる。特に、M が完備であれば、すべての円 $\gamma=\gamma(s)$ は$-\infty < s < \infty$ である任意の s に対して存在することが知られている。

一般に与えられた曲面 M に対して、M 上の円が $\mathbb{R}^N$ 内の曲線としてどのようになっているかを調べるのは易しくない。そこで一番単純な曲面である平面上の円γ を調べてみよう。特に γ を測地線とすると、γ の満たすべき微分方程式は $\mathbb{R}^N$ において $\ddot\gamma=\dfrac{d^2\gamma}{ds^2}=0$ と書き直せるから、平面上の測地線は、$\mathbb{R}^N$ 内の直線 (即ち、曲率零の円) になっている。次に γ を平面上の曲率 $k(>0)$ の円とする。このとき (2.1) は $\mathbb{R}^N$ においては

$$\frac{d^3\gamma}{ds^3}+k^2\frac{d\gamma}{ds}=0$$

となるから、$\gamma = \gamma(s)$ は

$$\gamma(s) = A + (\cos ks)B + (\sin ks)C \quad (A, B, C:\ \mathbb{R}^N \text{ における定ベクトル})$$

と表される。一方、初期条件 (2.2) は $\mathbb{R}^N$ において

$$\gamma(0) = x, \ \ \dot\gamma(0) = u, \ \ \ddot\gamma(0) = kv$$

だから、A, B, C は一意的に定まり

$$\gamma(s) = x + \frac{v}{k} - \frac{\cos ks}{k}v + \frac{\sin ks}{k}u$$

を得る。この表示式より γ は $\mathbb{R}^N$ において中心が $x + \dfrac{v}{k}$, 半径が $\dfrac{1}{k}$ の円であることが分かる。以上の議論より平面上の全ての円は $\mathbb{R}^N$ 内の円になった。では、球面上の円は $\mathbb{R}^N$ 内の曲線と見たときどうなっているのであろうか？　次節で調べてみよう。

3. 球面 $S^2(r)$ 上の円は $\mathbb{R}^N$ でどう見える.

M として $\mathbb{R}^N$ $(3 \leqq N)$ 内の（半径 r の）2次元球面 $S^2(r)$ を考える。∇, $\overline{\nabla}$ をそれぞれ $S^2(r)$, $\mathbb{R}^N$ のリーマン接続としよう。本節の目的は、$S^2(r)$ 上の全ての円は $\mathbb{R}^N$ においても円になることを示すことにある。一般性を損なうことなく $r = 1$ としてよい。

まず $S^2(1)$ 上の単位法線ベクトル場 $\mathcal{N}$ として（$S^2(1)$ 上の）各点における位置ベクトルを取る。従って、$S^2(1)$ 上の任意の接ベクトル X に対して $\overline{\nabla}_X\mathcal{N} = X$ が成り立つ。ここで、ベクトル $\mathcal{N}$ の向きは $S^2(1)$ に対して外向きであることに注意してほしい。

先ず、球面 $S^2(1)$ 上の測地線について考えよう。球面 $S^2(1)$ 上の測地線の方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ を $\mathbb{R}^N$ において書き直すと、ユークリッド内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表して、

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \ddot\gamma - \langle\ddot\gamma, \mathcal{N}\rangle\mathcal{N} = \ddot\gamma + \langle\dot\gamma, \overline{\nabla}_{\dot\gamma}\mathcal{N}\rangle\mathcal{N}\\ &= \ddot\gamma + \mathcal{N} = \ddot\gamma + \gamma\end{aligned}$$

となる。したがって、$S^2(1)$ 上の測地線 γ は $\mathbb{R}^N$ において

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} + \gamma = 0$$

を満たす。そこで γ の初期条件を $\gamma(0) = x, \ \dot\gamma(0) = u$ とすると

$$\gamma(s) = (\cos s)x + (\sin s)u$$

を得る。よって、“球面 $S^2(1)$ 上の測地線 γ は $\mathbb{R}^N$ 内の単位円（即ち、$S^2(1)$ 上の大円）である” ことが分る。

次に γ を $S^2(1)$ 上の曲率 $k(>0)$ の円とすると、測地線の場合と同様な計算で微分方程式 (2.1) と初期条件 (2.2) は $\mathbb{R}^N$ においてそれぞれ次のように書き直せる。

$$\frac{d^3\gamma}{ds^3}+(k^2+1)\frac{d\gamma}{ds}=0,$$
$$\gamma(0)=x,\ \dot{\gamma}(0)=x,\ \ddot{\gamma}(0)+\gamma(0)=kv.$$

これを解くと γ の $\mathbb{R}^N$ における次の表示式を得る。

$$\gamma(s)=\frac{k}{k^2+1}(kx+v)+\frac{\cos(\sqrt{k^2+1}s)}{k^2+1}(x-kv)+\frac{\sin(\sqrt{k^2+1}s)}{\sqrt{k^2+1}}u.$$

よって、球面 $S^2(1)$ 上の曲率 k の円 γ は $\mathbb{R}^N$ 内の半径 $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(<1)$ の円（即ち、$S^2(1)$ 上の小円）ということが分かる。$S^2(r)$ 上の曲率 k の小円に対しても同様にして、γ は $\mathbb{R}^N$ 内の半径 $\frac{r}{\sqrt{k^2r^2+1}}\left(=\frac{1}{\sqrt{k^2+\frac{1}{r^2}}}<r\right)$ の円（即ち、$S^2(r)$ 上の小円）ということが分かる。このように、“球面 $S^2(r)$ 上の円は $\mathbb{R}^N$ 内の円である”ことが確認された。

4. 円による平面および球面の特徴付け.

我々が $\mathbb{R}^N$ に身を置いて観ている平面 Π および球面 $S^2(r)$ を次のように定式化してみよう。

(例１)　$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ ax+by+cz=d\}\xrightarrow{\iota_1}\mathbb{R}^3\xrightarrow{\iota_2}\mathbb{R}^N$

ここで ι_1 は自然な包含写像であり、写像 ι_2 は $\iota_2(x,y,z)=(x,y,z,0,\dots,0)$ で定義される全測地的な埋蔵である。勿論、合成写像 $\iota_2\circ\iota_1$ は Π から $\mathbb{R}^N$ への全測地的な埋蔵である。

(例２)　$S^2(r)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x^2+y^2+z^2=r^2\}\xrightarrow{\iota_3}\mathbb{R}^3\xrightarrow{\iota_2}\mathbb{R}^N$

ここで ι_3 も自然な包含写像であり、合成写像 $\iota_2\circ\iota_3$ は $S^2(r)$ から $\mathbb{R}^N$ への全臍的な埋蔵である。

本論文において $\mathbb{R}^N$ 内の平面 Π というときは、対 $(\Pi,\iota_2\circ\iota_1)$ を意味している。よって、自然な埋め込み $\iota_2\circ\iota_1:\Pi\to\mathbb{R}^N$ と本質的に異なる等長埋入 $f:\Pi\to\mathbb{R}^N$（即ち、f と $\iota_2\circ\iota_1$ が $\mathbb{R}^N$ の合同変換に関して合同ではない）に対しては、対 (Π,f) はもはや $\mathbb{R}^N$ 内の平面とは呼ばないのである。球面の場合も同様で、対 $(S^2(r),\iota_2\circ\iota_3)$ を球面という。これは平面や球面に限った話ではない。$\mathbb{R}^N$ 内の曲面 M といったときは、等長埋入 $f:M\to\mathbb{R}^N$ も込みで考え対 (M,f) を $\mathbb{R}^N$ 内の曲面と微分幾何学では言うのである。したがって、等長埋入 $f_1,f_2:M\to\mathbb{R}^N$ が互いに（$\mathbb{R}^N$ の合同変換に関して）合同ではないとき、(M,f_1) と (M,f_2) は互いに異なる曲面と考える。

第２節と第３節で平面 $(\Pi,\iota_2\circ\iota_1)$ と球面 $(S^2(r),\iota_2\circ\iota_3)$ 上の全ての円は $\mathbb{R}^N$ 内の円になることを示した。この性質を利用して平面と球面を同時に特徴付けることができる（参照 [6]）。

命題１．$\mathbb{R}^N$ $(3 \leqq N)$ 内の曲面 M に関する次の２条件は同値である。
(1) M は平面 $(\Pi, \iota_2 \circ \iota_1)$ または球面 $(S^2(r), \iota_2 \circ \iota_3)$ である。
(2) ある正数 k を曲率に持つ M 上の全ての円は $\mathbb{R}^N$ 内の円である。

命題Ⅰでは曲面上の円に着目した。勿論、命題Ⅰ (2) における正数 k は任意である。それでは曲面上の（特別な円である）測地線に着目しても同様な結果が得られるかということを次節で考えてみよう。

5. 測地線では球面定理は作れない.

本節では曲面上の測地線に着目する。次の平面定理はあまりにも自明である。

命題２．$\mathbb{R}^N$ $(3 \leqq N)$ 内の曲面 M が平面 $(\Pi, \iota_2 \circ \iota_1)$ であるための必要十分条件は、M 上の全ての測地線が $\mathbb{R}^N$ 内の直線になることである。

ここで次の問題を設定するのはある意味自然であろう。

問題. 曲面上の全ての測地線が $\mathbb{R}^N$ 内の円であるような曲面は平面 $(\Pi, \iota_2 \circ \iota_1)$ または球面 $(S^2(r), \iota_2 \circ \iota_3)$ に限るか？

実は、この問題を満たす（$\mathbb{R}^N$ 内の）曲面は既に分類されている（参照 [7]）。その結果、上述の問題は $N = 3,\ 4$ の場合は、肯定的に解かれることが分かる。

命題３．$\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^4$ 内の曲面 M に関する次の２条件は同値である。
(1) M は平面 $(\Pi, \iota_2 \circ \iota_1)$ または球面 $(S^2(r), \iota_2 \circ \iota_3)$ である。
(2) M 上の全ての測地線は $\mathbb{R}^N$ 内の円である。

一方、$5 \leqq N$ の場合は上述の問題は否定的に解かれている。即ち、$5 \leqq N$ では反例がある。この反例はベロネーゼ曲面と呼ばれている。ベロネーゼ曲面の定義及びその幾何学的性質は次節で述べる。

6. ベロネーゼ曲面上の円を観てみよう.

ベロネーゼ曲面は、次のようにして R^N $(5 \leqq N)$ 内の曲面として実現できる。

(例３) $$S^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^N.$$

ここで、f は $f(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, $u_1 = \dfrac{yz}{r}$, $u_2 = \dfrac{zx}{r}$, $u_3 = \dfrac{xy}{r}$, $u_4 = \dfrac{1}{2r}(x^2 - y^2)$, $u_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{6r}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ で与えられ、ι は $\mathbb{R}^5$ から $\mathbb{R}^N$ への全測地的な埋蔵である。このとき、$f : S^2(r) \to \mathbb{R}^5$ は等長埋入になり、更に第二基本形式が平行になっている。よって、合成写像 $\iota \circ f : S^2(r) \to \mathbb{R}^N$ も第二基本形式が平行である。対 $(S^2(r), \iota \circ f)$ を $\mathbb{R}^N$ 内のベロネーゼ曲面と呼ぶ。

それでは、$\mathbb{R}^N$ において、ベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota \circ f)$ 上の測地線 γ（これは $S^2(r)$ 上の大円であった）を観察してみよう。$\iota \circ f$ が幾何学的に良好な写像であるから、容易に次の命題を得る。

命題４．γ をベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ 上の測地線とすると、曲線$\iota\circ f\circ\gamma$ は、 $\mathbb{R}^N$ 内の半径が $r/2$ の円である。

この命題はベロネーゼ曲面上の（長さ $2\pi r$ の）測地線が、 $\mathbb{R}^N$ では長さπr の円になることを示している。長さが半分になっている訳は、$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$ より $S^2(r)$ 上の任意の直径対点が、 写像 $\iota\circ f$ によって $\mathbb{R}^N$ 内の同じ点に移ることに由来している。ここで、 写像 $\iota\circ f$ は実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ から $\mathbb{R}^N$ への（第二基本形式が平行な）等長埋蔵を自然に定義することに注目してほしい。

次の結果は、 測地線を観察することにより平面、 球面、 ベロネーゼ曲面を同時に特徴付けられることを示している（参照 [7]）。

定理１．$\mathbb{R}^N$ $(3\leqq N)$ 内の曲面 M に関する次の２つの条件は同値である。

(1) M は平面 $(\Pi, \iota_2\circ\iota_1)$, 球面 $(S^2(r), \iota_2\circ\iota_3)$ またはベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ である。

(2) M 上の全ての測地線は $\mathbb{R}^N$ 内の円である。

次に、ベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ 上の曲率正の円（即ち、 小円）を観てみよう。球面 $(S^2(r), \iota_2\circ\iota_3)$ 上の曲率 $k(>0)$ の円は、$\mathbb{R}^N$ 内の半径が $r/\sqrt{k^2r^2+1}$ の円であったが、 今度は、 円とは全く異なる曲線に見えることを次の結果が示している（参照 [1]）。

命題５．ベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ 上の曲率 $k(>0)$ の円は、$\mathbb{R}^N$ 内の次数４の螺旋（即ち、 $\mathbb{R}^N$ において第４曲率以降は恒等的に零で、 第３曲率までは曲率がそれぞれ正の定数になっている曲線）である。ここで、 第１曲率 κ_1、 第２曲率 κ_2、第３曲率 κ_3 は次式で与えられる。

$$\kappa_1=\frac{\sqrt{k^2r^2+4}}{r},\ \kappa_2=\frac{3k}{\sqrt{k^2r^2+4}},\ \kappa_3=\frac{2(k^2r^2+1)}{r\sqrt{k^2r^2+4}}.$$

大円を観測するだけでは識別できなかった球面 $(S^2(r), \iota_2\circ\iota_3)$ とベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ を小円を観ることにより識別できたことになる。

ベロネーズ曲面の特徴付けには、第一著者による断面曲率によるものがある（参照[3]）。更にこの結果の高次元版として次のような、球面内の極小部分多様体に関する断面曲率だけによる簡明な結果がある（参照[4]）。

定理２．定曲率 c の $(n+p)$-次元球面内のコンパクトで向き付け可能な n-次元極小部分多様体で、その断面曲率 K_σ が $\frac{nc}{2(n+1)}$ 以上のものは全測地的球面かまたはベロネーズ多様体である。

この定理で現れたベロネーゼ多様体については、次節で詳しく紹介する。

7. 未解決問題.

ベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ は昔から部分多様体論ではよく知られた曲面で、 その上の測地線が $\mathbb{R}^N$ の円であることも周知の事実である。この曲面上の曲率正の円を調べたというのが、筆者達のアイデアなのである。

命題５は色々なことを我々に教えてくれる。例えば、 次の問題が考えられる。

問題１．ある正数 k に対して、$\mathbb{R}^N$ 内の曲面 M 上の曲率 k の全ての円が、$\mathbb{R}^N$ 内の互いに合同な４次の螺旋であるとする。このとき、曲面 M はベロネーゼ曲面 $(S^2(r), \iota\circ f)$ に限るか？

また命題５より我々は、$\mathbb{R}^5$（本当は $\mathbb{R}^4$ でよい）内に長さ $2\pi r/\sqrt{k^2r^2+1}$ の（単純）閉曲線になっている４次の螺旋の例を大量に構成したことになる（k, r に関する２パラメーター族)。ここで、$\mathbb{R}^N$ 内の任意の螺旋は閉曲線であろうとなかろうと必ず単純曲線になることに注意してほしい。

これから問題１を部分多様体論の専門家向きに球面内の部分多様体に関する問題として書き直そう。

（例３）にある $f: S^2(r) \to \mathbb{R}^5$ の定義式から分かるように写像 f は、$f: S^2(r) \to S^4(r/\sqrt{3})$ を自然に定義する。勿論、$S^4(r/\sqrt{3})$ は半径 $r/\sqrt{3}$ の４次元球面を表す。ここで記号を導入しよう。$S^n(c)$ と書けば、定曲率 c の n 次元球面を表すことにする。よって、半径が r であれば、$c = 1/r^2$ となる。故に f は、等長埋入 $f: S^2(c/3) \to S^4(c)$ を定義する。ここで f の定義域を（定曲率 $c/3$ の）実射影平面 $\mathbb{R}P^2(c/3)$ 上に制限すると前に述べたように、我々は等長埋蔵 $f: \mathbb{R}P^2(c/3) \to S^4(c)$ を得る。しかも $(\mathbb{R}P^2(c/3), f)$ は $S^4(c)$ 内の極小曲面で第２基本形式が平行になっている。この曲面もベロネーゼ曲面という。今まで本論文では、$(S^2(r), \iota\circ f)$ をベロネーゼ曲面と呼んできたが、ベロネーゼ曲面は球面内の曲面と考えるのが自然なのである。

そこで $S^4(c)$ から $\mathbb{R}P^2(c/3)$ 上の全ての円を観てみよう。命題４、５に似た次の結果を得る（参照 [1])。

命題６．γ を（$S^4(c)$ 内の）ベロネーゼ曲面 $(\mathbb{R}P^2(c/3), f)$ 上の曲率 $k(\geqq 0)$ の円とするとき、次が成り立つ。

(1) $k=0$ のとき、曲線 $f\circ\gamma$ は、$S^4(c)$ 内の曲率 $\sqrt{\dfrac{2c}{3}}$ の円である。

(2) $k=\sqrt{\dfrac{c}{6}}$ のとき、曲線 $f\circ\gamma$ は、$S^4(c)$ 内の次数３の螺旋で、曲率 κ_1, κ_2 は、$\kappa_1 = \sqrt{\dfrac{c}{2}}$, $\kappa_2 = \sqrt{c}$ と表される。

(3) $k \neq \sqrt{\dfrac{c}{6}}$ のとき、曲線 $f\circ\gamma$ は、$S^4(c)$ 内の次数４の螺旋で、曲率 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ は、$\kappa_1 = \sqrt{\dfrac{3k^2+c}{3}}$, $\kappa_2 = \dfrac{3k\sqrt{c}}{\sqrt{3k^2+c}}$, $\kappa_3 = \dfrac{|6k^2-c|}{\sqrt{3(3k^2+c)}}$ と表される。

この結果が命題４、５に似るのは当然の事なのである。何故ならば $\mathbb{R}P^2$ 上の円は、S^2 上の円であるから（もっとも測地線の場合は長さが半分になるが)。ただ曲率が正の場合は命題５と比べると螺旋の次数にばらつきがある。$k=\sqrt{c/6}$ の場合のみ曲線 $f\circ\gamma$ は S^4 内の次数３の螺旋、他の場合は全て次数４の螺旋になっている。特異点的に次数が下がる幾何学的な理由は著者達には分からない。とにかく直接計算によって命題６は確かめられる訳である。勿論、これは命題５と矛盾しない。S^4 内の次数３または次数４の螺旋は $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 5)$ 内の次数４の螺旋になるからである。ここで次の事実

を思い出そう。γ を $S^n(c)$ 上の次数 $d(\geqq 1)$ の螺旋とすると d が偶数のとき、曲線 γ は $\mathbb{R}^{n+p}$ 内の次数 d の螺旋になり、d が奇数のとき、曲線 γ は $\mathbb{R}^{n+p}$ 内の次数 $d+1$ の螺旋になる。これは $S^n(c)$ 上の円は $\mathbb{R}^{n+p}$ 内の円になるということの一般化である。

ここで、ベロネーゼ曲面 $(\mathbb{R}P^2(c/3), f)$ の高次元版であるベロネーゼ多様体を考える。これは極小埋蔵 $f : \mathbb{R}P^n\left(\dfrac{nc}{2(n+1)}\right) \to S^{n(n+3)/2-1}(c)$ で与えられる。ここで、f は第1標準極小埋蔵と呼ばれる極小埋蔵で、実射影空間 $\mathbb{R}P^n(nc/2(n+1))$ 上のラプラシアンの第1固有値に対応する固有空間の正規直交基底を全部並べることにより、f は構成できる（参照 [8]）。$n=2$ の場合、この f は（例3）で与えられた f と一致する。よって、同じ文字 f を使うことにする。

ベロネーゼ多様体 $(\mathbb{R}P^n(nc/2(n+1)), f)$ は定曲率空間を球面に（全測地的でなく）極小部分多様体として第2基本形式が平行にしかも充満 (full) にはめ込む唯一の例として知られている。この部分多様体に様々な特徴付けを与えるのは自然な問題と思われる。そこで外側の空間 $S^{n(n+3)/2-1}(c)$ からベロネーゼ多様体上の円 γ を観てみよう。ベロネーゼ多様体が定曲率空間だということに注意すると円 γ は、$\mathbb{R}P^n(nc/2(n+1))$ の2次元全測地的部分多様体 $\mathbb{R}P^2(nc/2(n+1))$ 上に円として乗っていることが分かる。そこで、我々の等長埋蔵 $f : \mathbb{R}P^n\left(\dfrac{nc}{2(n+1)}\right) \to S^{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ を全測地的曲面 $\mathbb{R}P^2(nc/2(n+1))$ に制限すると次の第2基本形式が平行な等長埋蔵 g になる。

$$g = \iota \circ f :\ \mathbb{R}P^2\left(\frac{nc}{2(n+1)}\right) \xrightarrow{f} S^4\left(\frac{3nc}{2(n+1)}\right) \xrightarrow{\iota} S^{\frac{n(n+3)}{2}-1}(c)$$

ここで、ι は $n=2$ のときは恒等写像、$n \geqq 3$ のときは全せい写像（しかし、全測地的でない）。従って、命題6より γ が測地線であれば曲線 $g\circ\gamma$ は円（特に、小円）である。また、γ が曲率が正の円であれば、$n=2$ のときは曲線 $g\circ\gamma$ は次数3または4の螺旋になり、$n \geqq 3$ のときは曲線 $g\circ\gamma$ は次数4の螺旋である。

一方、球面 $S^{n+p}(c)$ 内の円測地的部分多様体 (M^n, f)（即ち、M^n 上の任意の測地線 γ に対して、曲線 $f\circ\gamma$ は 外側の空間 $S^{n+p}(c)$ 上の円になっている）は既に分類済みである。文献 [7] によれば、円測地的部分多様体 M^n はコンパクトな階数1の対称空間になり、等長埋入 f の第2基本形式は平行であることが分かる。よって、ベロネーゼ多様体 $(\mathbb{R}P^n(nc/2(n+1)), f)$ 上の測地線 γ を観てもこの部分多様体だけを特徴付けることはできないのである。

そこで、円 γ が曲率正の円の場合を考えて次の2つの問題を提示しよう。

問題2．(M^n, f), $3 \leqq n$ を $S^N(c)$ 内の充満にはめ込まれた極小部分多様体とする。ある正数 k が存在して、M^n 上の曲率 k の全ての円 γ に対して、曲線 $f\circ\gamma$ が $S^N(c)$ 上の互いに合同な次数4の螺旋と仮定する。このとき、次のことは成り立つか？

(1) $N = n(n+3)/2-1$.
(2) M^n は曲率 $nc/2(n+1)$ の定曲率空間である。
(3) 等長埋入 f の第2基本形式は平行である。

問題３．(M^2, f) を $S^N(c)$ 内の充満にはめ込まれた極小曲面とする。ある正数 k が存在して、M^n 上の曲率 k の全ての円 γ に対して、曲線 $f \circ \gamma$ が $S^N(c)$ 上の互いに合同な次数３の螺旋と仮定する。このとき、次のことは成り立つか？

(1) $N = 4$.
(2) M^2 は曲率 $c/3$ の定曲率空間である。
(3) 等長埋入 f の第２基本形式は平行である。

最後に読者に一言。以前から知られている実例でも色々な角度から調べると未知の性質を発見し、そこから研究が進展することもたまにはあるのではなかろうか？手持ちの example を数学的に手のひらで転がすことをお勧めしたい。

References

[1] T. Adachi, S. Maeda and K. Ogiue, *Extrinsic shape of circles and the standard imbedding of a Cayley projective plane*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), 411–419.

[2] 平川　淳康, 球の特性に関する問題に就て, 高数研究 **8** (1943), 1–2.

[3] T.Itoh, *Minimal surfaces in 4-dimensional Riemannian manifolds of constant curvature*, Kōdai Math. Sem Rep. **24** (1972), 451-458.

[4] T.Itoh, *Addendum to my paper "On Veronese manifolds"*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 73-74.

[5] T.Itoh, S. Maeda and A. Sakamaki, 球面の特徴付け, to appear.

[6] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. **210** (1974), 163–170.

[7] K. Sakamoto, *Planar geodesic immersions*, Tôhoku Math. J. **29** (1977), 25–56.

[8] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math, Soc, Japan **18** (1966), 380–385.

(2006年５月24日　受理)