事象を数学的に考察し処理する能力の育成

飯田洋市
非常勤講師 (諏訪東京理科大学)
iida@rs.suwa.tus.ac.jp

要 旨
大学の初年次教育における数学教育 (専門基礎科目) の目的は，それぞれの専門についての勉学をしていくのに必要な数学の基礎的能力の習得である。ところがここ数年，本来は中等教育までに身につけているはずの数学力の低下がみられ，スムーズに初年次教育が進められない状況が起こるようになってきた。本研究では中等教育における数学科の目標のひとつである「事象を数学的に考察し処理する能力」を取り上げ，いくつかの事例により数学力の低下を示すとともに，大学の初年次教育でこの能力を育成するための指導法を提案する。具体的には，数学の講義で演習問題を扱う場合，学生に答案を黒板に書かせ，それを教員が添削するという方法である。またこの指導法を取り入れない授業と取り入れた授業の両方を受講した学生へのアンケート調査により，この指導法を取り入れた授業を学生達が希望していることを示し，最後にこの指導法を実施する場合の注意点をまとめる。

キーワード
数学教育，初年次教育，数学的論理力，板書，学習指導要領

1. はじめに

大学の初年次教育（以下，初年次教育という）における専門基礎科目としての数学教育の目的は，専門分野を学習するために基礎となる数学力を習得することにある。一方で，中等教育までの数学教育の目的は，数学そのものの学力を向上させるばかりでなく，数学的論理力などを習得し，それらを日常生活の中で活用できるようにすることなどとなっている（cf. [1, p.20–25]）。文部科学省の学習指導要領 [2],[3],[4] では，以下のように目標を定めている。

- 小学校算数科：数量や図形についての算数的活動を通して，基礎的な知識と技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに，活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活に生かそうとする態度を育てる。
- 中学校数学科：数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。
- 高等学校数学科：数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

さてここで，数学の初年次教育の現場で起こっていることを検討してみる。大学入学者の学力低下は周知の事実 (たとえば [5]) であり，以下は観察なので直接には関わりませんが，従来

の指導法では，専門分野を学習するための基礎知識としての数学を十分習得させられない状況になっている。たとえば，順序だてて論理を進めていく能力が未熟であるために，微分積分学などの内容をストーリーとして捉えることが出来なくなっている。具体的には，教科書のそれぞれの章や節，ときにはひとつの問を，単なるトピックとして捉えてしまう傾向が見られる。このことは微分積分学を習得することはもとより，今後，数学的な考え方を必要とするときに，重大な悪影響を及ぼすことを予感させるものである。

ところでこの順序だてて論理を進めていく能力は，たとえば高等学校数学科の目標の「事象を数学的に考察し処理する能力」に深く関連する能力であり，本来は中等教育までに育成されることが望ましいものである。この状況はまさしく，中等教育までに育成されることが期待されていた能力までも，高等教育で育成する必要が出てきたといえる。

2. 研究目的

本研究の目的は，中等教育における数学科の目標（高等学校学習指導要領第2章第4節数学第1款目標）のひとつである「事象を数学的に考察し処理する能力」が，大学入学以前に十分に育成されていないことを指摘し，あわせてその能力を育成するための指導法について提案することである。具体的には，初年次教育での数学の講義における問題演習では，学生が答案を黒板に書き，それを教員が添削する指導法が有効であることを示す。また筆者が担当する授業において，この指導法を取り入れない授業（前期科目）と取り入れた授業（後期科目）の両方を受講した学生へのアンケート調査の結果より，この指導法を取り入れた授業を学生達も希望していることを示し，最後にこの指導法を実施する場合の注意点をまとめる。

3. 研究方法

本研究では，問題をあてられた学生が答案を黒板に書き，それを教員が添削しながら，問題解説を行う指導法（以下,「黒板による答案添削指導法」とよぶ）の有効性について検討し，あわせて「事象を数学的に考察し処理する能力」を初年次教育において教育する必要があることを示す。特に,「黒板による答案添削指導法」を省略した指導を受けた学生達の試験結果（前期中間試験）を分析することで，論理的に考え進める能力（根気強く論理的に考え続ける力 [1, p.20]），たとえば「事象を数学的に考察し処理する能力」が大学入学次には未熟であることを示す。

さて筆者が非常勤講師として信州大学で担当している科目は，前期「微分積分学Ⅰ」と後期「微分積分学Ⅱ」である。いずれも工学部機械システム工学科1年対象で，教科書は [6] である。教科書内にある問題の解答は巻末に記載されている。

まず前期は「黒板による答案添削指導法」を実施せず，教員が演習問題の解答を黒板で示しながら解説することとした。そして前期中間試験（第9回目に実施）において論理力を問う問題を2問出題した（問 1(2) と問 5）。一方で後期は「黒板による答案添削指導法」を実施し，後期中間試験（第9回目に実施）において前期と同じような論理力を問う問題を2問出題した（問 1(2) と問 5）。そして，これらについての学生の解答状況を比較した。前期中間試験と後期中間試験の結果で比較した理由は，前期は1変数関数の定義から微分まで，後期は2変数関数の定

義から微分までの範囲であり授業内容が似ていること，しかも論理力を問う問題を出題しやすいことによる。

ところで本研究では,「黒板による答案添削指導法」による効果の差を明確にするために，前期中間試験（問 1 (2) と問 5）の結果と後期中間試験（問 1(2) と問 5）の結果を「事象を数学的に考察し処理する能力」という観点から点数化し，それらの平均点の差を比較することで有意であるか検定することは避けている。この理由は，本研究の議論が，この点数化の方法になることを避けるためと，紙面の制約による。これについては別の機会に譲ることとする。

本研究では，試験の答案やそれに対するクレーム，さらに学生のアンケート結果によりわかる範囲で,「黒板による答案添削指導法」の有効性を検討する。

4. 研究結果

平成 17 年度前期,「黒板による答案添削指導法」を取り入れない授業を行い中間試験を実施したところ，最終的な解答は正しいが途中の計算に誤りのあるもの，あるいは途中の計算として認められない答案が頻出した。また教科書どおりの答案なのにどうして零点，あるいは減点されているのかといったクレームも多くあった。最終的には，途中計算を書くことを指示していることを確認した上で，途中計算は論理的に組み立てられ，行間に論理的飛躍があってはならないことを説明し，学生からの納得は得ている。以下，論理力を問う問題として出題した 2 問とその解答について説明する。

問 1 (前期). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ を求めよ。

模範解答. $\displaystyle\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

答え $\frac{3}{4}$

不十分な解答例 1.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right\}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

答え $\frac{3}{4}$

不十分な解答例１の問題点は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}$ を展開したときに最後の部分が明確に記載されていないことである（“$\cdots$” となっている）。確かに $\displaystyle\lim_{k\to\infty}$ より，明確に記載されていない最後の部分は０となり，最終的な答えに影響はない。しかし数学的論理の観点で見ると不十分である。実際クレームをつけにきた学生は，この違いを理解できていなかった。また以下のような解答もあった。

不十分な解答例 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4} \qquad \text{答え } \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

不十分な解答例２の問題点は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}$ を展開し，次に計算して得た式の最後が $-\dfrac{1}{k+2}$ となっているところである。ひとつの考えとしては，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0$ より，$-\dfrac{1}{k+1}$ は省略してもよいといえる。我々はよく「数学的には間違っていない」という表現を用いることがあるが，学生の論理能力を考えたとき，進んで良心的に解釈するのは良いことではない。むしろ，このような証明問題を通して，学生の論理力を確認することが重要である（[7, p.50] を参照のこと）。

ところで問１は教科書の問題（p.9 問 3(3)）である。また以下の問題を授業で模範解答を書きながら解説している。これらの意味で，問１などは数学的論理力が試される問いである。ちなみに，試験問題は教科書から出題することを授業中に宣言している。

問題 ([6, p.9]).　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

模範解答.　$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ より，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)} &= \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{1}-\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{k+1}\right)=1 \qquad \text{答え}\quad 1$$

もう１問は以下である。

問 5 (前期).　$(\cos\, x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $(n\in\mathbf{N})$ を証明せよ。ただし，$\mathbf{N}$ は自然数全体からなる集合とする。

模範解答.　n に関する帰納法により証明する。

$n=1$ のときは，$(\cos x)^{(1)}=(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{1\times\pi}{2}\right)$ より成り立つ。$n=k$ のとき成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}(\cos x)^{(k+1)} &= \left((\cos x)^{(k)}\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)' \\ &= -\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\cos\left(\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

したがって，すべての $n(\in\mathbf{N})$ について等式は成立する。　(証明終わり)

<u>不十分な解答例 3.</u>　$(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{1\times\pi}{2}\right)$,
$(\cos x)''=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)'=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{2\times\pi}{2}\right)$,
$(\cos x)^{(3)}=\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{2}\right)'=-\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{3\times\pi}{2}\right)$,
$(\cos x)^{(4)}=\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)'=-\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{4\times\pi}{2}\right)$.　以下同様。　(証明終わり)

不十分な解答例 3 については，不十分か否か若干意見が分かれるところかもしれない。「数学的には間違っていない」からである。しかし，このような問題では数学的帰納法を用いる必要があり，最終的に“以下同様”としているのでは証明とはいえない。この問 5 は教科書の例からの出題である。以下教科書より転載する。

例 8 ([6, p.40]))　$(\sin\ x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $(\cos\ x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

[解]　$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(\sin x)''=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\dfrac{2\times\pi}{2}\right),\cdots$,
$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. $(\cos x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+1)}=\left(\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

授業ではこの [解] を用いて「示すこと」と「証明すること」は別であることを説明し,「証明する」場合は数学的帰納法を利用しなければならないことを注意している。さらに $(\sin x)^{(n)}$ について，数学的帰納法を用いた模範解答を黒板に書いた。ここで改めて問 5 の別の不十分な解答例を紹介する。上記の [解] と比べると，この学生の数学的論理力が未熟であることが分かる。

<u>不十分な解答例 4.</u>　$(\cos x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+1)}=\left(\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

不十分な解答例 4 は,「教科書どおりなのに点がもらえなかった」と学生よりクレームがあった解答でもある。この学生は数学的帰納法の意味を全く理解しておらず，このクレームに対する説明により理解したようであった。いずれにせよ，授業において，このような問題を比較的丁寧に解説したいと考えている著者にとっては，数年前であれば考えられないような答案やクレームといえる。

次に，平成 17 年度「微分積分学 II」の後期中間試験で出題した 2 問について説明する。後期からは「黒板による答案添削指導法」を取り入れたために，授業における学生の態度や質問などから，前期とは比べものにならないほど数学的論理力が高まっていることは明らかであった。特に，数学的論理力が何を意味しているのか，ほとんど全ての学生が理解できているようであった。(問題が解けるようになったということではない。問題が解けるか否かは，初年次教育としての本来の教育の範疇である。)

問 1 (後期).　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ を示せ。

模範解答.　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと，$(x,y)\to(0,0) \Longleftrightarrow r\to 0$。このとき，$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = r|\cos^2\theta\sin\theta| \leq r \to 0\ (r\to 0)$ より，極限が存在してその値は0となる。(証明終わり)

問1(後期) では，x と y の式を r の式で評価すること，さらに $(x,y)\to(0,0)$ と $r\to 0$ が同値な条件であることを指摘することが必要である。これと類似な問題は授業で扱い，学生に答案を書かせ，添削しながら解説した。そして試験でもこの観点で出題し採点を行った。結果，これらを書き落としている学生は3名であった。またこの他に1名の学生より，「$r\to 0$ であれば θ に関係ないので，

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = r|\cos^2\theta\sin\theta| \to 0\ (r\to 0)$$

でも正解でないか」とクレームがあったが，それでは解答としては不十分であることは，すぐに理解していた。このような態度こそが，何を証明しなければならないかを整理し，それをしっかり書かなければならないこと，そしてそれを書くことが数学における途中計算を書くことにあたる（数学的論理力が試されるところ）ということを理解できた成果であるといえる。もう1問は以下である。

問 5 (後期).　$z = f(x,y)$, $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ のとき，$z_{xx}+z_{yy} = z_{uu}+z_{vv}$ を示せ ($f \in \mathrm{C}^2$)。

模範解答.　$z_u = z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha$, $z_v = z_x(-\sin\alpha) + z_y\cos\alpha$ より，

$$\begin{aligned}
z_{uu} &= \cos\alpha(z_{xx}\cos\alpha + z_{xy}\sin\alpha) + \sin\alpha(z_{yx}\cos\alpha + z_{yy}\sin\alpha)\\
&= \cos^2\alpha z_{xx} + 2\cos\alpha\sin\alpha z_{xy} + \sin^2\alpha z_{yy}\\
z_{vv} &= (-\sin\alpha)(z_{xx}(-\sin\alpha) + z_{xy}\sin\alpha) + \cos\alpha(z_{yx}(-\sin\alpha) + z_{yy}\cos\alpha)\\
&= \sin^2\alpha z_{xx} - 2\cos\alpha\sin\alpha z_{xy} + \cos^2\alpha z_{yy}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
z_{uu}+z_{vv} &= \cos^2\alpha z_{xx} + 2\cos\alpha\sin\alpha z_{xy} + \sin^2\alpha z_{yy}\\
&\qquad + \sin^2\alpha z_{xx} - 2\cos\alpha\sin\alpha z_{xy} + \cos^2\alpha z_{yy}\\
&= \cos^2\alpha z_{xx} + \sin^2\alpha z_{yy} + \sin^2\alpha z_{xx} + \cos^2\alpha z_{yy}\\
&= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)z_{xx} + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)z_{yy} = z_{xx}+z_{yy} \quad \text{(証明終わり)}
\end{aligned}$$

上記の問5(後期) の学生よる黒板での答案は，以下のようなものであった。

不十分な解答例 5.　$z_u = z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha$, $z_v = z_x(-\sin\alpha) + z_y\cos\alpha$ より，

$$\begin{aligned}
z_{uu}+z_{vv} &= \cos^2\alpha z_{xx} + \sin^2\alpha z_{yy} + \sin^2\alpha z_{xx} + \cos^2\alpha z_{yy}\\
&= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)z_{xx} + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)z_{yy} = z_{xx}+z_{yy} \quad \text{(証明終わり)}
\end{aligned}$$

不十分な解答例5も「数学的には間違っていない」かもしれないが，模範解答と比べれば，途中計算が不十分なことがすぐにわかる。これも実際の試験で途中計算を書いていない学生は4名であった。(途中計算を書いたが間違っていた学生は，このほかに3名いた。)

以上，問1(前期)，問5(前期)と問1(後期)，問5(後期)の答案内容を比較することにより，「黒板による答案添削指導法」により数学的論理力である「事象を数学的に考察し処理する能力」が向上したといえる。本稿ではあまり触れられなかったが，クレームの内容の変化からもこのことはわかる。また，教科書を自分で読み進めることができるようになったという学生からのアンケートの回答もあった。

5. 学生による評価の検討

平成17年度後期科目「微分積分学Ⅱ」の中間試験中に，10分程度で記入できる，以下の記名式アンケートを実施した。

学生による板書に関するアンケート

数学の授業（「微分積分学」「線形代数学」など）における，「学生に（教科書の）問題をあて，黒板に解答を書かせ，それを教師が添削する」指導法に関して，以下の問に答えてください。

1. 上記の指導法は，学力を向上させるために必要だと思いますか。該当する番号に○をつけてください。また，その理由を書いてください。

   (1) 絶対に必要だと思う (2) できるかぎり必要だと思う (3) どちらともいえない

   (4) あまり必要ない (5) 全く必要ない

2. 上記の指導法の運用方法についてお答えください。グループごとに，該当する回答を1つ○をつけてください。

   A)　(1) 問題をあてる時間と，解答を書く時間は別にしたほうが良い。

   　　(2) 問題をあてる時間と，解答を書く時間は同一時間内が良い。

   B)　(1) 学生が書いた解答を添削すれば，改めて模範解答を書く必要はない。

   　　(2) 学生が書いた解答を添削するだけではなく，模範解答を書いたほうが良い。

   C)　(1) 授業全体を通して，学生には平等に当てたほうが良い。

   　　(2) 授業全体を通して，全員を当てる必要はない。

   D)　(1) 黒板に書いた学生は，平等に成績評価したほうが良い。

   　　(2) 黒板に書いた内容により，成績評価に差をつけたほうが良い。

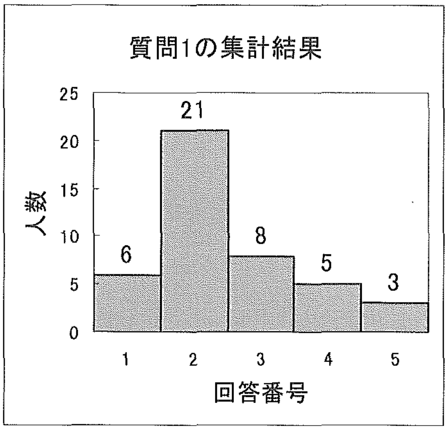
   　　(3) 黒板に書くことは，評価の対象から除いたほうが良い。

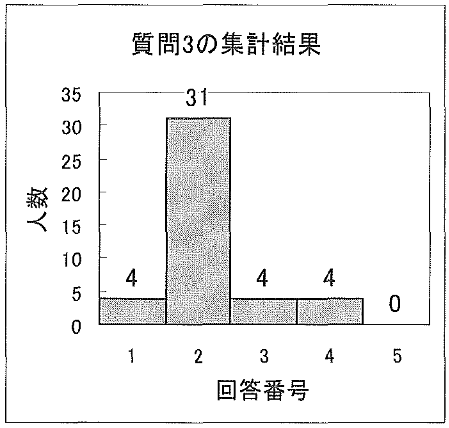
3. 上記の指導法を取り入れることで，理解度は変わると思いますか。

   (1) かなり理解度は増す (2) 理解度は増す (3) 変わらない (4) 理解度は減る

   (5) かなり理解度が減る

質問１と質問３の回答の集計結果は以下である。参考のために，質問１と質問３の回答結果をクロス集計した表と，質問１と前期の最終評価をクロス集計した表もあわせて掲載する。





		質問３					計
		1	2	3	4	5	
質問１	(1)	3	3	0	0	0	6
	(2)	0	21	0	0	0	21
	(3)	1	4	3	0	0	8
	(4)	0	3	1	1	0	5
	(5)	0	0	0	3	0	3
計		4	31	4	4	0	43

		前期最終評価				計
		優	良	可	不可	
質問１	(1)	3	1	0	2	6
	(2)	12	4	3	2	21
	(3)	4	3	0	1	8
	(4)	1	0	1	3	5
	(5)	2	1	0	0	3
計		22	9	4	8	43

質問１と質問３の回答結果より，ほとんどの学生が，「黒板による答案添削指導法」の必要性を感じていることが分かる。回答理由は以下のようであった（文末の番号は該当学生の回答番号）。

- 教科書の解答は解き方の説明がほとんどなく，解く過程が間違っていても，答えがあっていたので，その解き方が正解だと思い込んでしまったことがあるから。(1)
- 自分の答えが正しいかどうか分からないことがあるから。(1)
- 解答の書き方がわかるし，先に自分の考えをもつようになるので解説をきくことで，理解度が上がるし，疑問点も個別に明らかになる。(2)
- 講義で問題の答えをノートに写すだけでは思考力は身につかないから。(2)
- 他人が誤った所を自分も誤解していたりすることがあるので。(2)
- 解けない問だった場合なら，自分で考え，また調べることをするようになり，自分なりの学習姿勢の向上や，表現力の向上につながると考えるため。(2)
- 前期の前半に比べると，このやり方の方が理解できたと思うから。(2)

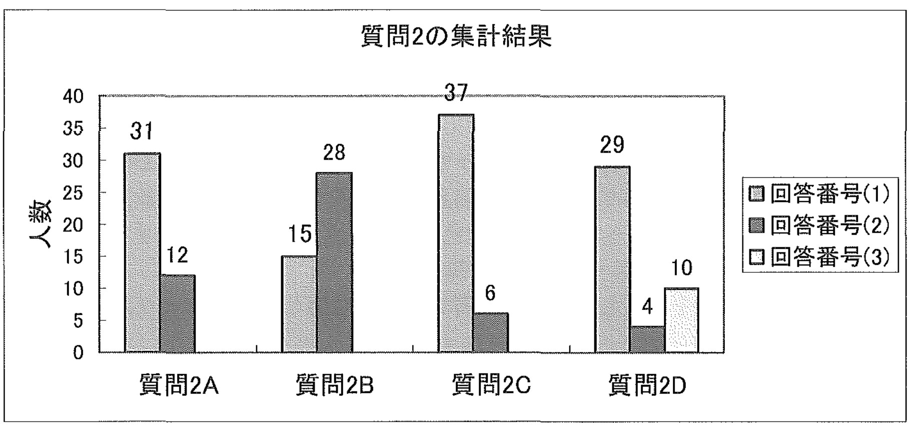
- 解答の悪いところを添削してくれるから。(2)
- 黒板でやってもらうと間違いやすいところがわかっていいが，時間がかかる。(3)

回答理由の中には，クラスの雰囲気がよくなるとか，個人が活躍できる場ができるのでよいというものもあった。このような視点は，初等・中等教育の場で黒板を活用した指導が欠かせない理由であり，実際に大いに研究されている（[8],[9] など）。ただ本研究の目的とは異なることから，ここでの言及は避ける。さて一方で，質問１で「必要ない」(回答番号 (4) または (5)) を選択した学生の回答理由は以下であった。

- 授業の時間がなくなる。(４名)
- 書き方に個人差があり見づらい。(２名)
- 自分とやり方が違う場合，模範解答がわからない。(２名)

特に，後半の２つの回答理由を書いている学生が，質問３で理解度が減る (回答 (4)) を選択していることは興味深い。授業時間が少なくなることを指摘した学生の内１名は，レポートにしてほしいという要望を書いていた。研究計画段階で「黒板による答案添削指導法」のほかにレポートによる指導法も検討したが，教員の負担がかなり大きくなる一方で，学生が教員の添削をきちんと読み取れるか吟味し現実的でないという結論にいたっている。また [10] で大村氏が指摘しているように，教師の目の前で学生が問題を解き，それを教師が傍らで見ていて随時指導することこそが教育であり教師の役目であるという考えも,「黒板による答案添削指導法」を提案したい理由である。ただここで学生から指摘されている，時間がかかるという問題は大きい。今回は授業の進度が遅くなることはなかったので，これは授業中に扱う例題の数の差によるものと考えられる。たとえば演習時間に数名の大学院生によるアシスタントがあると，学生一人一人のノートに書かれた答案を，学生のペースに合わせてその場で指導できるので，この問題は飛躍的に解消されると考えられる（演習時間が別途設けられると更に良い)。黒板の見づらさなどについては，この指導法を行うための注意点として次節でまとめる。なお，質問１で回答番号 (3) を選択した学生の回答理由は，(1) や (2) を選択した学生の回答理由に加えて，但し書きとして (4) や (5) を選択した学生の回答理由を書いている。

次に質問 2A) から D) の回答の集計結果は以下である。



質問 2A) から D) は学生の満足度に関する設問でもある。アンケート集計結果による学生による希望は以下の通りである。

- 問題をあてる時間と，解答を書く時間は別にしたほうが良い。
- 学生が書いた解答を添削するだけではなく，模範解答を書いたほうが良い。
- 授業全体を通して，学生には平等に当てたほうが良い。
- 黒板に書いた学生は，平等に成績評価したほうが良い。

6. 学生に板書させる場合の注意点

5 節でみたように,「黒板による答案添削指導法」には，学生への板書の仕方の指導などが必要である。そこで以下に注意点としてまとめる。参考にした文献は，[11],[12] などである。

- 黒板を縦線により分割し，学生が答案を各場所を指定する。
- 白いチョークを使わせる。色つきチョークは絶対に避ける。: ホワイトボードの場合は黒を使う。
- 字が小さい場合には，大きく書くように指示する。
- 字が余り上手でない学生に対しては，ゆっくり書くように指示する。

教員への注意としては，以下のようなことが考えられる。

- （事前準備）事前に模範解答をノートに作成しておく。必要に応じて学生に提示する。
- （事前準備）問題をあてた学生を管理するための名簿を作る。むやみに同じ学生を複数回指名しないようにする。
- （指名）半期で学生全員に 1 回ずつ問題をあてる。
- （指名）一度に黒板に書く人数は，黒板の大きさによるが，少なくとも添削する時間を考慮して，黒板に書かせる人数を決める。。
- （学生の板書）学生が板書しているときに教室の後ろに移動し，黒板の字が読みにくくないか確認したり，それを書き取っている学生の反応をよく見る。
- （学生の板書）解答があまりにも不十分な学生に対しては，その場で助言しながら訂正させる。気が早い学生は，かなり間違えのある答案でも書き写してしまうので注意が必要である。
- （学生の板書）問題に手をつけることが出来ない学生に対しては，教員が作成した模範解答を見せ，翌週に黒板に書かせる。
- （添削）添削をするときは黄色いチョークで添削する。赤いチョークは使わない。
- （添削）学生の答案について添削による訂正箇所が多くなる場合，別途，模範解答を書く。このときは，白いチョークを使う。黄色いチョークでたくさん板書すると，学生からは読みづらい。: ホワイトボードの場合は黒を使う。
- （添削後）添削結果を利用して，質疑応答を行う。添削した答案により議論できると効果が上がる。
- （添削後）添削した後に十分時間をおく。学生に板書を消しても良いか聞き，学生が書き写し終わるまでに消してしまわないようにする。

- （事後処理）黒板に答案を書いた学生を名簿でチェックする。
- （事後処理）問題をあてたが答案を黒板に書こうとしない学生に対しては，成績を減点することを告知した上で，教師が模範解答を黒板に書く。
- （その他）習熟度の高い学生に対しては，机間巡視の中でノートをチェックし，積極的に助言を与えるようにする。または，新しい問題を与える。

7. おわりに

学力低下問題が高等教育に及ぼす影響が明らかになる一方で，時代の進歩の流れはますます加速するばかりである。このような背景により近年は，e-Learning をはじめとするテクノロジーを主体とした教育が注目されるようになり，実際に広まりつつある。これらは大いに望まれることであり，また今後の発展に期待が膨らむところである。筆者もこの種の研究に携わっている。

しかし，活用できる知識を理解させ，習得させるためには，論理力・推論力・イメージ力など思考するための基礎・基本が，学生に素地として身についていなければならない。そしてこの素地が，中等教育での積み残しになっているといえる。この意味で，もっと人である教員による指導に期待が集まってもよいと筆者は考えている。本研究では，教員の持つ素地力を提供することで，学生１人１人のニーズにまとめて応えることが出来る指導法を提案した。高等教育の現場でこのような視点での数多くの実践研究が進められることが期待される。

参考文献

[1] 文部省：高等学校学習指導要領解説　数学編理数編 (平成 11 年 12 月)，実教出版株式会社, (1999).
[2] 文部科学省：小学校学習指導要領 (平成 10 年 12 月告示, 15 年 12 月一部改正), (1998).
[3] 文部科学省：中学校学習指導要領 (平成 10 年 12 月告示, 15 年 12 月一部改正), (1998).
[4] 文部科学省：高等学校学習指導要領 (平成 11 年 3 月告示, 14 年 5 月, 15 年 4 月, 15 年 12 月一部改正), (1999).
[5] 戸瀬信之，西村和雄著：「大学生の学力を診断する」，岩波新書，(2001).
[6] 戸田暢茂著：「基礎微分積分」，学術図書出版社, (1996).
[7] 芳沢光雄著：「数学的思考法－説明力を鍛えるヒント－」, 講談社現代新書, (2005).
[8] 小島宏，寺崎千秋編：「学力保障時代の授業力　6　思考を深める発問・板書の仕方」，明治図書出版株式会社, (2003).
[9] 板倉弘幸編著：「「参加型板書」で集団思考を深める　3　算数科編」,(2004).
[10] 大村はま著：「新編　教えるということ」，ちくま学芸文庫, (1996).
[11] S.G. クランツ著，蓮井敏訳：「大学授業の心得－数学の教え方をとおして」，玉川大学出版部, (1998).
[12] 帯広畜産大学大学教育センター：授業における板書・プレゼンテーションの留意点，平成 15 年 5 月，http://www.obihiro.ac.jp/ cea/bansyo.html，2005 年 12 月 30 日に最終閲覧.